

УДК 517.977.58

MSC2010 49M05, 35K58, 35Q79

© Г. В. Гренкин<sup>1</sup>

## Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена

Рассматривается нестационарная модель сложного теплообмена, включающая  $P_1$  приближение для уравнения переноса излучения. Задача оптимального управления заключается в нахождении коэффициента граничного отражения из заданного промежутка, доставляющего минимум функционалу качества. Рассматриваемый алгоритм решения задачи управления основан на том, что оптимальное управление удовлетворяет принципу bang-bang, и использует идею метода градиентного спуска. Алгоритм протестирован для трехмерной области.

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, диффузионное приближение, оптимальное управление, bang-bang, метод градиентного спуска.*

### 1. Введение

Задачи управления для моделей сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами представляют интерес в связи с инженерными приложениями [1, 2]. Работы [3–9] посвящены исследованию задач управления температурой на границе области для нестационарных моделей сложного теплообмена, включающих нестационарное уравнение теплопроводности и стационарное  $SP_N$  приближение уравнения переноса излучения; аналогичная задача управления для стационарной модели исследована в [10].

Задача управления граничным коэффициентом отражения для стационарной модели сложного теплообмена рассмотрена в [11], для нестационарных моделей — в [12, 13]. Для данных задач управления справедлив аналог принципа bang-bang, т.е. оптимальное управление принимает либо минимальное, либо максимальное значение в точках границы области, где функция переключения не обращается в нуль.

---

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: [glebgrenkin@gmail.com](mailto:glebgrenkin@gmail.com)

Настоящая работа посвящена анализу алгоритма нахождения оптимального управления для задачи, рассмотренной в [13]. Существующие алгоритмы вычисления оптимального bang-bang управления разработаны главным образом для одномерных управлений, например, зависящих от времени. Так, в [14] применен алгоритм градиентного спуска, когда управление на каждой итерации не обязательно имеет тип bang-bang. В [15] использован вариант градиентного метода, когда управление на каждом шаге имеет тип bang-bang, при этом после вычисления градиента функционала новое и старое приближения усредняются посредством вычисления выпуклых комбинаций точек переключения. В [16] для нахождения оптимального управления применялся метод простой итерации. Обзор алгоритмов решения задач управления с одномерным bang-bang управлением содержится в [17, 18]. В [19, 20] задачи управления с одномерным и двумерным управлением решались путем сведения к дискретной задаче оптимизации. В [21] для решения задачи с двумерным управлением применен многосеточный метод.

В работе автора [13] рассмотрена задача управления для модели сложного теплообмена, доказана разрешимость задачи управления, получены необходимые условия оптимальности и использован оптимизационный алгоритм, который может быть применен и в случае, когда управление является двумерным. Похожий алгоритм предлагался в [22, раздел 4.3] для задачи управления системой ОДУ. В настоящей работе этот алгоритм проанализирован для задачи управления сложным теплообменом и протестирован для трехмерной области.

## 2. Постановка задачи

Нестационарная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный и кондуктивный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , имеет следующий вид [5, 13]:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \quad (2)$$

Здесь  $\theta$  — нормализованная температура,  $\varphi$  — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям,  $\kappa_a$  — коэффициент поглощения. Постоянные  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  определяются по формулам:

$$a = \frac{k}{\rho c_p}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{max}^3}{\rho c_p}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где  $k$  — теплопроводность,  $c_p$  — удельная теплоемкость,  $\rho$  — плотность,  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $n$  — показатель преломления,  $T_{max}$  — максимальная температура в ненормализованной модели,  $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$  — коэффициент полного взаимодействия,  $\kappa_s$  — коэффициент рассеяния. Коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеяния, случай  $A = 0$  соответствует изотропному рассеянию.

Будем предполагать, что функции  $\theta, \varphi$ , описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе  $\Gamma = \partial\Omega$ :

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad (3)$$

а также начальному условию

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (4)$$

Здесь через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Неотрицательная функция  $\theta_b = \theta_b(x, t)$ , функция  $\beta = \beta(x)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $t \in (0, T)$ , и начальная функция  $\theta_0$  являются заданными. Коэффициент  $u$  играет роль управления и зависит от степени черноты поверхности  $\varepsilon$  таким образом:  $u = \frac{\varepsilon}{2(2 - \varepsilon)}$ .

Рассмотрим множество управлений  $u(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , удовлетворяющих условию

$$u_1(x) \leq u(x) \leq u_2(x), \quad x \in \Gamma,$$

где  $u_1, u_2$  — заданные положительные функции. Задача оптимального управления заключается в нахождении функции  $u$  из указанного множества, доставляющей минимум функционалу  $\hat{J}(u) = J(\theta(u), \varphi(u))$ . Здесь  $J(\theta, \varphi)$  — некоторый функционал качества,  $\{\theta(u), \varphi(u)\}$  — решение задачи (1)–(4), соответствующее управлению  $u$ . Через  $\{f, g\}$  обозначаем упорядоченную пару функций.

### 3. Формализация задачи и результаты теоретического анализа

В дальнейшем считаем, что  $\Omega$  — липшицева ограниченная область,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ . Через  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , обозначаем пространство Лебега, через  $H^1$  — пространство Соболева  $W_2^1$ , а через  $L^p(0, T; X)$  — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве  $X$ . Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

(i)  $\beta, u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\theta_b \in L^\infty(\Sigma)$ ,  $0 < \beta_0 \leq \beta$ ,  $0 < u_0 \leq u_1 \leq u_2$ ,  $\beta_0, u_0 = \text{Const}$ ,  $\theta_b \geq 0$ ;

(ii)  $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$ ;

(iii)  $\frac{d\theta_b}{dt} \in L^2(\Sigma)$ .

Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ , через  $V'$  обозначаем пространство, сопряженное с пространством  $V$ . Отметим, что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Обозначим через  $(f, v)$  значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ .

Определим пространство  $W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T, V')\}$ . Здесь и далее  $y' = dy/dt$ . Обозначим через  $Y = W \times L^2(0, T; V)$  пространство состояний системы (1)–(4), через  $U = L^2(\Gamma)$  — пространство управлений,  $U_{ad} = \{u \in U : u_1 \leq u \leq u_2\}$  — множество допустимых управлений.

**Определение 1.** Пара  $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$  называется слабым решением задачи (1)–(4), соответствующим управлению  $u \in U_{ad}$ , если для любых  $v, w \in V$  почти

всюду на  $(0, T)$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} (\theta', v) + a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma, \\ \alpha(\nabla\varphi, \nabla w) + \int_{\Gamma} u\varphi w \, d\Gamma + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3, w) &= \int_{\Gamma} u\theta_b^4 w \, d\Gamma \end{aligned}$$

и при этом  $\theta|_{t=0} = \theta_0$ .

**Теорема 1.** [13] Пусть выполняются условия (i), (ii). Тогда для любого  $u \in U_{ad}$  задача (1)–(4) имеет единственное слабое решение  $\{\theta, \varphi\}$  и справедливы неравенства  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $0 \leq \varphi \leq M^4$ , где  $M = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ .

Пусть функционал качества  $J: Y \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид  $J(\theta, \varphi) = J_1(\theta, \varphi) + J_2(\theta|_{t=T})$  и выполняется условие

(iv)  $J_1: L^2(0, T; V \times V) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J_2: H \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемые по Фреше, ограниченные снизу и слабо полунепрерывные снизу функционалы.

Определим приведенный функционал качества следующим образом:  $\hat{J}(u) = J(\theta(u), \varphi(u))$ . Здесь и далее  $\{\theta(u), \varphi(u)\}$  — слабое решение задачи (1)–(4), соответствующее управлению  $u$ . Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала  $\hat{J}$  на множестве  $U_{ad}$ :

$$\hat{J}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}. \quad (5)$$

Решение  $\hat{u}$  задачи (5) будем называть оптимальным управлением.

**Теорема 2.** [13] Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда существует решение задачи (5).

**Определение 2.** Пусть  $u \in U_{ad}$ ,  $\theta = \theta(u)$ ,  $\varphi = \varphi(u)$ . Пара  $p = \{p_1, p_2\} \in Y$  называется слабым решением сопряженной задачи, соответствующей управлению  $u$ , если для любых  $v, w \in V$  почти всюду на  $(0, T)$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} -(p_1', v) + a(\nabla p_1, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta p_1 v \, d\Gamma + 4\kappa_a(\theta^3(bp_1 - p_2), v) &= (J'_{1\theta}(\theta, \varphi), v), \\ \alpha(\nabla p_2, \nabla w) + \int_{\Gamma} u p_2 w \, d\Gamma + \kappa_a(p_2 - bp_1, w) &= (J'_{1\varphi}(\theta, \varphi), w) \end{aligned}$$

и при этом  $p_1|_{t=T} = J'_2(\theta|_{t=T})$ .

**Лемма 1.** [13] Пусть выполняются условия (i), (ii), (iv). Для любого  $u \in U_{ad}$  существует единственное слабое решение  $p \in Y$  сопряженной задачи, соответствующей управлению  $u$ .

Слабое решение сопряженной задачи, соответствующей управлению  $u \in U_{ad}$ , обозначим через  $\{p_1(u), p_2(u)\}$ .

**Теорема 3.** [13] Пусть выполняются условия (i), (ii), (iv). Для любого оптимального управления  $\hat{u}$  справедлив аналог принципа bang-bang:

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{если } \psi(x) < 0, \\ u_2(x), & \text{если } \psi(x) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь

$$\psi(x) = \int_0^T (\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt, \quad x \in \Gamma, \quad \hat{\varphi} = \varphi(\hat{u}), \quad p_2 = p_2(\hat{u}). \quad (7)$$

**Замечание 1.** Градиент функционала  $\hat{J}$  вычисляется по формуле [13]

$$\hat{J}'(u) = -\psi, \quad \psi(x) = \int_0^T (\varphi(u) - \theta_b^4) p_2(u) dt, \quad x \in \Gamma. \quad (8)$$

Приведем примеры сопряженных задач для функционалов

$$J_1(\theta) = \int_0^T \int_{\Omega} (\theta - \theta_d)^2 dx dt, \quad J_2(\theta) = \int_{\Omega} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx, \quad (9)$$

где  $\theta_d \in L^2(0, T; H)$  (соответственно  $\theta_d \in H$ ) — заданная функция.

Если  $J = J_1$ , то сопряженная задача является слабой формулировкой задачи (см. [13])

$$\begin{aligned} -\partial p_1 / \partial t - a \Delta p_1 + 4\kappa_a \theta^3 (bp_1 - p_2) &= \theta - \theta_d, \\ -\alpha \Delta p_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ a \partial_n p_1 + \beta p_1 = 0, \quad \alpha \partial_n p_2 + up_2 &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ p_1|_{t=T} &= 0. \end{aligned}$$

В случае  $J = J_2$  сопряженная задача соответствует слабой формулировке задачи

$$\begin{aligned} -\partial p_1 / \partial t - a \Delta p_1 + 4\kappa_a \theta^3 (bp_1 - p_2) &= 0, \\ -\alpha \Delta p_2 + \kappa_a (p_2 - bp_1) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ a \partial_n p_1 + \beta p_1 = 0, \quad \alpha \partial_n p_2 + up_2 &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ p_1|_{t=T} &= \theta|_{t=T} - \theta_d. \end{aligned}$$

## 4. Оптимизационный алгоритм

Численный алгоритм решения задачи управления (5) основан на системе оптимальности, которая включает уравнения состояния (1)–(4), сопряженную задачу и соотношение (6), выражающее аналог принципа bang-bang. Поскольку система оптимальности представляет собой необходимые условия минимума функционала

$\widehat{J}$ , то найденное решение системы оптимальности гарантированно будет решением задачи (5) в том случае, если система оптимальности имеет единственное решение. Вопрос о единственности решения системы оптимальности, так же, как и вопрос о единственности решения задачи (5), является открытым.

Простейшим алгоритмом нахождения оптимального управления в задаче (5) является метод простой итерации, который заключается в следующем. Выбирается начальное приближение для управления  $u^0$ . На каждой итерации вычисляется решение  $\{\theta^j, \varphi^j\}$  задачи (1)–(4) при  $u = u^j$ , затем находится решение  $\{p_1^j, p_2^j\}$  сопряженной задачи, и следующее приближение  $u^{j+1}$  вычисляется по формуле

$$u^{j+1}(x) = \begin{cases} u_1(x), & \text{если } \psi(x) < 0, \\ u_2(x), & \text{если } \psi(x) > 0, \end{cases}$$

$$\text{где } \psi(x) = \int_0^T (\varphi^j - \theta_b^4) p_2^j dt, \quad x \in \Gamma.$$

Однако ожидать сходимости метода простой итерации можно лишь в отдельных случаях, например,  $\theta_d = 0$ . На каждой итерации данный метод обновляет управление во всех точках границы, что может привести к тому, что приближения  $u^j$  будут поочередно равны крайним значениям  $u_1$  и  $u_2$ , т.е.  $u^j \equiv u_1$ ,  $u^{j+1} \equiv u_2$ ,  $u^{j+2} \equiv u_1, \dots$ . Поэтому можно предложить обобщение метода простой итерации, в котором управление обновляется лишь на некотором подмножестве границы  $\Gamma$ .

Разобьем границу  $\Gamma = \partial\Omega$  на ячейки  $\gamma_i$  приблизительно одинаковой площади. На каждой ячейке выберем точку (узел)  $x_i$ . Нас будет интересовать множество управлений, для которых а)  $u(x) = u(x_i)$  на  $\gamma_i$ ; б) управление имеет вид bang-bang:  $u(x_i) = u_1(x_i)$  или  $u_2(x_i)$ . Узлы, в которых имеется несоответствие между управлением и знаком функции переключения  $\psi(x)$ , т.е. не выполняется равенство (6), назовем *критическими*. На каждой итерации алгоритм изменяет управление в  $k$  критических узлах либо во всех критических узлах, если их число меньше  $k$ .

Остановимся на вопросе выбора критических узлов, в которых нужно изменить управление. Если функционал  $\widehat{J}$  дифференцируем по Фреше, то

$$\widehat{J}(u+v) - \widehat{J}(u) = -(\psi, v)_{L^2(\Gamma)} + o(\|v\|_{L^2(\Gamma)}),$$

где функция  $\psi$  определяется по формуле (8). Поэтому при изменении управления на малом подмножестве границы  $\Gamma$  главная часть приращения функционала  $\widehat{J}$  будет определяться слагаемым  $-(\psi, v)_{L^2(\Gamma)}$ , где  $v$  — приращение управления.

Допустим, что  $v(x) = u^{\text{new}}(x_i) - u(x_i)$  на  $\gamma_i$  и  $v(x) = 0$  на  $\Gamma \setminus \gamma_i$ . Тогда

$$-(\psi, v)_{L^2(\Gamma)} \approx -\psi(x_i)(u^{\text{new}}(x_i) - u(x_i))|\gamma_i| \equiv d_i,$$

где  $|\gamma_i|$  — площадь  $\gamma_i$ . Поэтому если  $u(x_i) = u_1(x_i)$  и  $\psi(x_i) < 0$  либо  $u(x_i) = u_2(x_i)$  и  $\psi(x_i) > 0$ , то при изменении  $u(x_i)$  величина  $d_i$  будет положительной. В противном случае, когда в узле  $x_i$  имеется несоответствие между управлением и знаком функции  $\psi$ , величина  $d_i$  будет отрицательной:

$$d_i = -(u_2(x_i) - u_1(x_i))|\psi(x_i)||\gamma_i|,$$

если  $u^{\text{new}}(x_i) = u(x_i) + (u_2(x_i) - u_1(x_i)) \text{sign } \psi(x_i)$ .

Таким образом, для того чтобы приближенное приращение функционала  $\widehat{J}$  было отрицательным и минимальным, нужно выбрать  $k$  критических узлов с наибольшими значениями выражения  $|\psi(x_i)|(u_2(x_i) - u_1(x_i))$  и изменить управление в этих узлах на противоположное крайнее значение.

Параметр  $k$  будем изменять динамически. Вначале  $k$  равно общему количеству узлов, что соответствует методу простой итерации. Пока  $\widehat{J}(u^{j+s}) \geq \widehat{J}(u^j)$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , возвращаемся к управлению  $u^j$ , уменьшаем  $k$  вдвое и получаем новое приближение  $u^{j+s+1}$  описанным выше способом из управления  $u^j$ . Если  $\widehat{J}(u^{j+s}) < \widehat{J}(u^j)$ , то не изменяем  $k$  и получаем новое приближение  $u^{j+s+1}$  из управления  $u^{j+s}$ . При  $k = 1$  условие уменьшения  $k$  не проверяется.

Условием окончания итераций является либо отсутствие критических узлов, либо заикливание алгоритма при  $k = 1$ . Заикливание означает, что приближение управления  $u^j$  совпало с прежним приближением  $u^{j-s}$ ,  $s \geq 1$ , если на  $(j - s)$ -й итерации  $k$  равнялось 1.

Отметим, что рассмотренный алгоритм является вариантом метода градиентного спуска, и роль параметра шага играет параметр  $k$ .

## 5. Численные эксперименты

В этом разделе считаем, что  $\Omega = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq L\}$  — куб со стороной  $L$  и  $\theta_0, \theta_b, \beta, u_1, u_2$  — положительные постоянные, не зависящие от  $x$  и  $t$ . Предполагается, что функционал качества  $J$  — это  $J_1$  либо  $J_2$ , см. (9), причем  $\theta_d = \text{Const}$ .

**Определение 3.** Назовем функцию  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  симметричной, если для почти всех  $x, y \in (0, L)$ :

$$f(x, y, 0) = f(x, y, L) = f(x, 0, y) = f(x, L, y) = f(0, x, y) = f(L, x, y),$$

$$f(x, y, 0) = f(L - x, y, 0) = f(x, L - y, 0) = f(y, x, 0).$$

Для упрощения численных экспериментов будем рассматривать только симметричные управления. Пусть  $U_0$  — множество симметричных управлений из множества  $U_{ad}$ . Рассмотрим задачу оптимального управления на множестве  $U_0$ :

$$\widehat{J}(u) \rightarrow \inf, \quad u \in U_0. \quad (10)$$

Так как множество  $U_0$  выпукло и замкнуто, справедлива следующая лемма, доказательство которой аналогично доказательству теоремы 2.

**Лемма 2.** Существует решение задачи (10).

Сопряженная задача для задачи управления (10) определяется так же, как и для задачи управления (5) (см. определение 2).

**Лемма 3.** Для любого  $u \in U_0$  функции  $\theta(u)|_\Gamma$ ,  $\varphi(u)|_\Gamma$ ,  $p_1(u)|_\Gamma$ ,  $p_2(u)|_\Gamma$  симметричны.

*Доказательство.* Рассмотрим функции  $\tilde{\theta}(x, y, z) = \theta(L - x, y, z)$ ,  $\tilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi(L - x, y, z)$ . Нетрудно проверить, что  $\{\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$  — слабое решение задачи (1)–(4). В силу того, что слабое решение единственно, получаем, что  $\tilde{\theta} = \theta$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi$ . Следовательно, решение  $\{\theta, \varphi\}$  симметрично относительно плоскости  $x = L/2$ , аналогично доказывается симметрия относительно плоскостей  $y = L/2$  и  $z = L/2$ .

Таким образом, на каждой грани куба решение  $\{\theta, \varphi\}$  симметрично относительно средних линий соответствующей грани. Остается доказать, что решение на грани куба симметрично относительно диагоналей грани. Для этого достаточно рассмотреть функции  $\tilde{\theta}(x, y, z) = \theta(y, x, z)$ ,  $\tilde{\varphi}(x, y, z) = \varphi(y, x, z)$  и проделать выкладки так же, как и выше.

Рассуждения, касающиеся решения сопряженной задачи, проводятся аналогично.  $\square$

**Лемма 4.** *Для любого решения  $\hat{u}$  задачи (10) справедлив аналог принципа bang-bang (6).*

*Доказательство.* Повторяя рассуждения [13], получим, что для любого  $u \in U_0$  выполняется неравенство

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt \leq 0,$$

где  $\hat{\varphi} = \varphi(\hat{u})$ ,  $p_2 = p_2(\hat{u})$ .

Рассмотрим подмножество  $\Gamma_0 = \{(x, y, 0) : 0 \leq x \leq L/2, 0 \leq y \leq x\}$  границы  $\Gamma$ . По лемме 3 функции  $\hat{\varphi}|_{\Gamma}$  и  $p_2|_{\Gamma}$  симметричны, следовательно,

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 d\Gamma dt = 48 \int_{\Gamma_0} (u - \hat{u}) \int_0^T (\hat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt d\Gamma \leq 0,$$

поэтому (ср. [12, 13])

$$\psi(\xi - \hat{u}) \leq 0 \quad \forall \xi \in [u_1, u_2] \text{ почти всюду на } \Gamma_0,$$

где функция  $\psi$  определяется по формуле (7). Отсюда следует аналог принципа bang-bang (6).  $\square$

Из лемм 2 и 4 вытекает

**Следствие 1.** *Существует симметричное решение системы оптимальности для задачи (5).*

Для тестирования оптимизационного алгоритма будем использовать симметричные тесты, в которых на каждой итерации приближение управления симметрично, и поэтому граничные значения решений задачи (1)–(4) и сопряженной задачи также симметричны.



Для решения прямой и сопряженной задач применим метод конечных разностей. Введем в кубе равномерную сетку, разделив стороны куба на  $N$  равных частей. Узлы, в которых задаются значения управления, совпадают с узлами расчетной сетки. Зададим управление на треугольнике — восьмой части грани куба, т.е. в узлах  $(x_i, y_j)$ ,  $0 \leq i \leq n$ ,  $0 \leq j \leq i$ , где  $n = \lfloor N/2 \rfloor$ . На остальные граничные узлы управление распространяется согласно симметрии, указанной в определении 3.

В соответствии с проведенным численным экспериментом, есть основания полагать, что при использовании метода конечных разностей численные решения прямой и сопряженной задач обладают симметрией, и поэтому управление на следующей итерации будет сохранять свойство симметрии.

Применим схему Кранка–Николсон (метод трапеций). Для решения нелинейной системы (1)–(4) используем линеаризацию методом Ньютона. Граничные условия третьего рода аппроксимируем со вторым порядком, аппроксимация граничных условий может быть получена методом фиктивных точек [23, с. 306].

Всего получаем 27 групп разностных уравнений, которые можно разделить на 4 типа: 1) для внутренних узлов; 2) для граней; 3) для ребер; 4) для вершин. При программировании, учитывая симметрию задачи, достаточно записать 4 группы уравнений.

Для решения СЛАУ используем алгоритм Bi-CGSTAB [24] с предобусловливателем ILU (неполное LU-разложение), реализованный в библиотеке ITL [25]. Значение функционала качества вычисляется с помощью формулы трапеций. Для проведения численных экспериментов разработана программа для ЭВМ [26] на языке программирования C++.

В качестве примера возьмем данные из [13], соответствующие параметрам стеклянного кубика. Положим  $L = 10$  [см],  $T = 300$  [с],  $T_{max} = 1000$  К,  $a = 0.006$  [см<sup>2</sup>/с],  $\alpha = 0.333 \dots$  [см],  $b = 0.025$  [см/с],  $\kappa_a = 1$  [см<sup>-1</sup>],  $\beta = 0.00005$  [см/с],  $\theta_b = 0.3$ ,  $\theta_0 = 1$ . Границы для управления выберем следующим образом:  $u_1 = 0.1$ ,  $u_2 = 0.4$ . Введем равномерную сетку с  $101 \times 101 \times 101$  узлами по пространству ( $N = 100$ ) и 301 узлом по времени.

Проведем вычисления для функционалов (9). Рассмотрим пример задачи с функционалом  $J_1$ ,  $\theta_d = 0.8$ . Начальным приближением в этом и последующих тестах будет  $u_1$ . На рис. 1а приведен график оптимального управления на стороне куба. Светлая область соответствует значению  $u_1$ , темная —  $u_2$ . На рис. 1б изображен график оптимальной температуры в центральном сечении куба  $z = L/2$  в конечный момент времени  $t = T$ . Рисунок 2 показывает значения функционала качества, количество критических узлов и значения параметра  $k$  на разных итерациях алгоритма. Конечное значение функционала равно 2452.49, конечное число критических узлов равно 2.

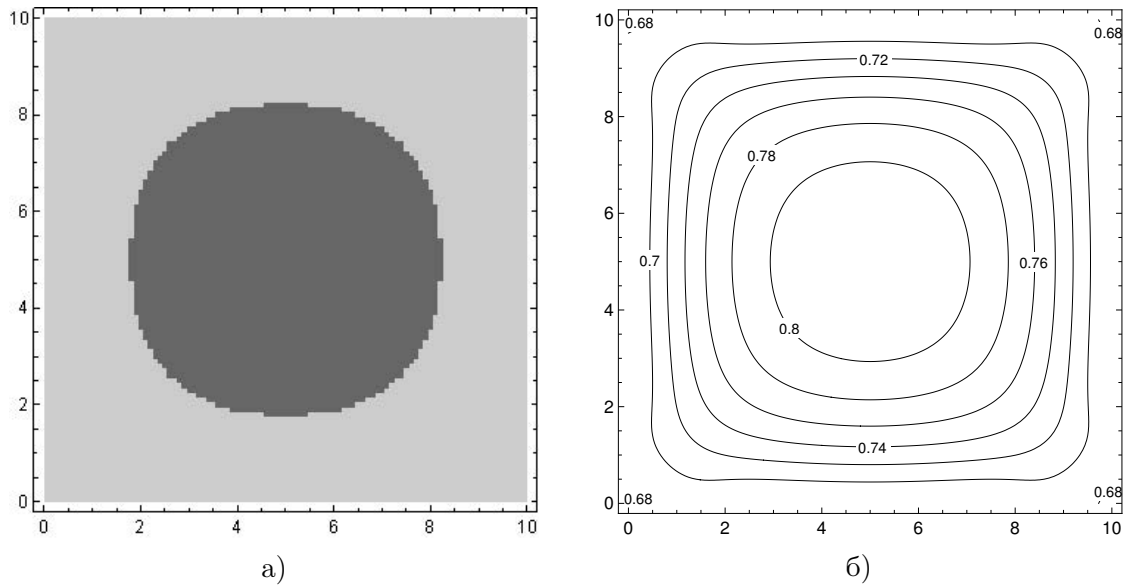


Рис. 1. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.

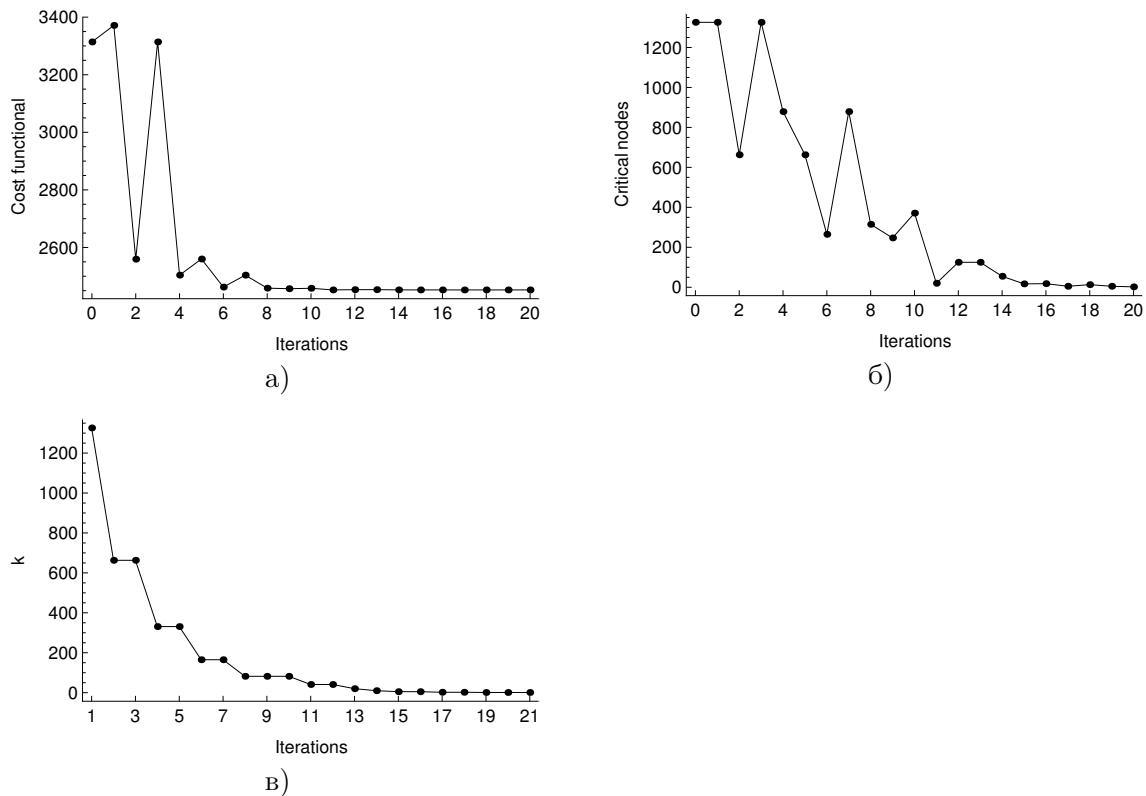


Рис. 2. а) Функционал качества. б) Количество критических узлов. в) Параметр  $k$ .

Далее рассмотрим пример задачи с функционалом  $J_2$ ,  $\theta_d = 0.8$ . Результаты вычислений показаны на рисунках 3, 4. Конечное значение функционала равно 1.349, конечное число критических узлов равно 0.

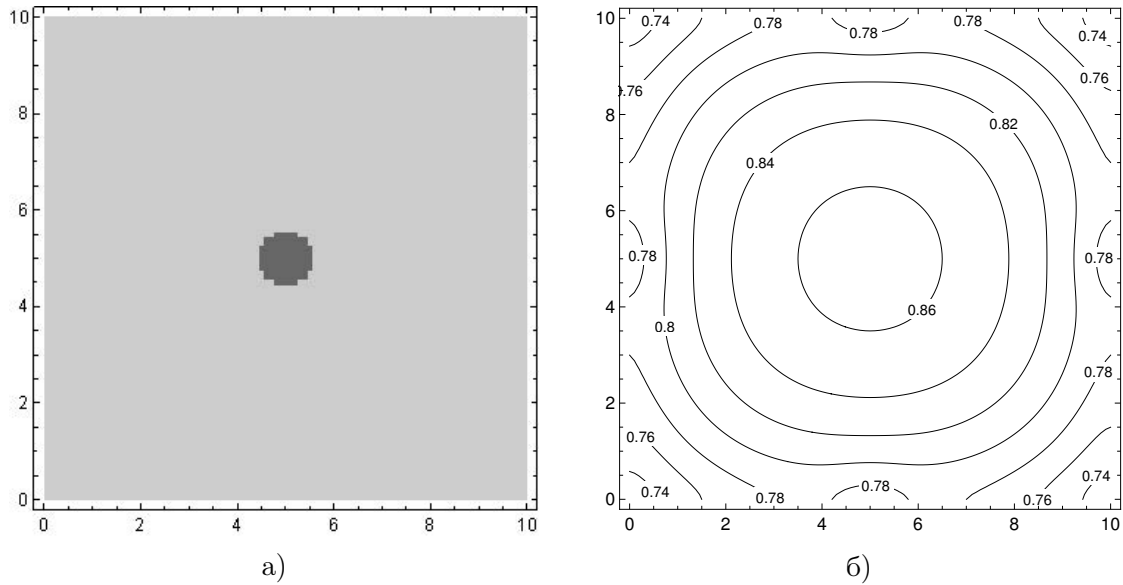


Рис. 3. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.

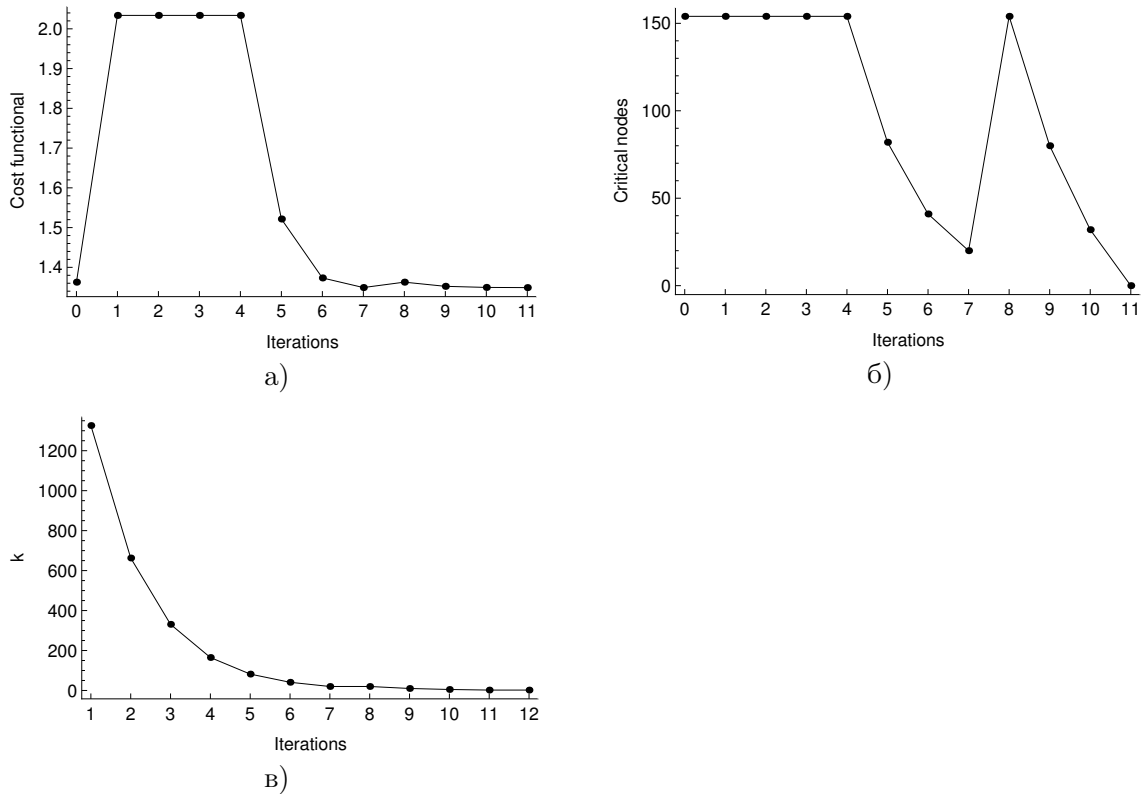


Рис. 4. а) Функционал качества. б) Количество критических узлов. в) Параметр  $k$ .

Наконец, рассмотрим пример задачи с функционалом  $J_2$ ,  $\theta_d = 0.7$ . Результаты вычислений показаны на рисунках 5, 6. Конечное значение функционала равно 1.739, конечное число критических узлов равно 1.

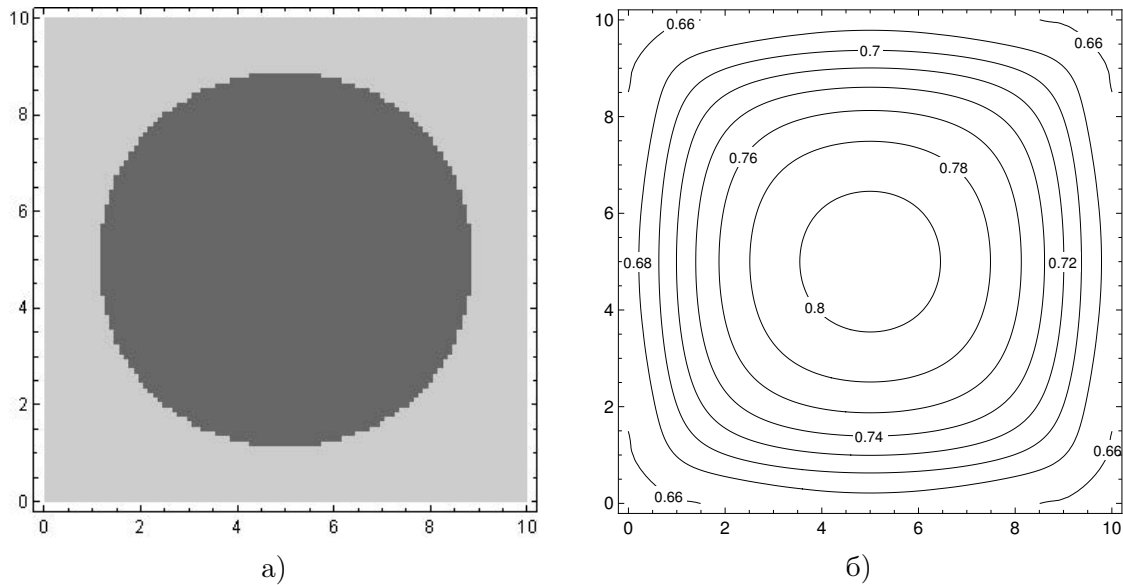


Рис. 5. а) Оптимальное управление. б) Оптимальная температура в центральном сечении куба в конечный момент времени.

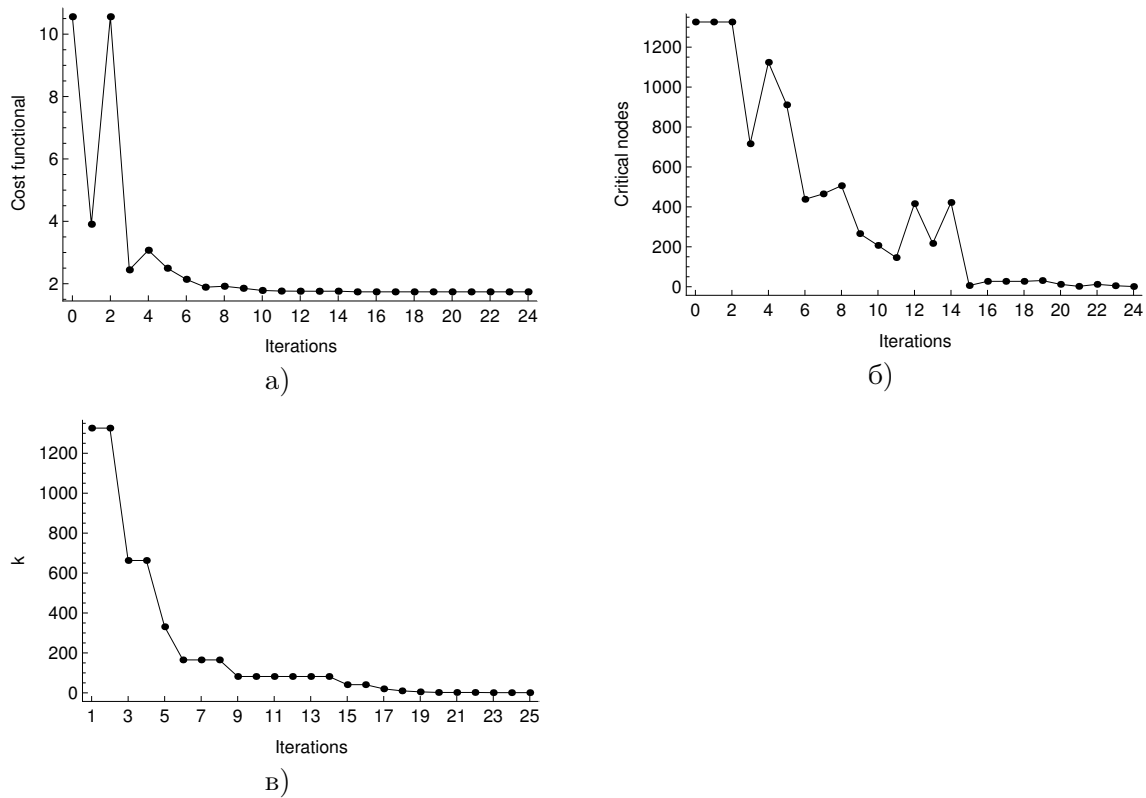


Рис. 6. а) Функционал качества. б) Количество критических узлов. в) Параметр  $k$ .

Отметим особенность задачи: при изменении управления в малом числе узлов знак функции переключения может измениться в большом числе узлов, поэтому не во всех случаях удастся получить полное соответствие управления и знака функции переключения, т.е. получить управление с отсутствием критических точек.

Возможно использовать многосеточный метод, когда оптимальное управление сначала вычисляется на более грубой сетке и затем выбирается в качестве начального приближения на более мелкой сетке.

## 6. Заключение

В статье проведен анализ алгоритма нахождения оптимального bang-bang управления для модели сложного теплообмена, алгоритм протестирован для трехмерной области. В проведенных тестах алгоритм находит управление с достаточно малым количеством критических точек, что означает, что найденное управление приближенно удовлетворяет системе оптимальности. Поскольку для решения задачи требуется небольшое число итераций, алгоритм можно считать эффективным.

## Список литературы

- [1] D. Clever, J. Lang, D. Schröder, “Model hierarchy-based optimal control of radiative heat transfer”, *Int. J. Comput. Sci. Eng.*, **9**:5–6 (2014), 509–525.
- [2] A. Farina, A. Klar, R. M. M. Mattheij, A. Mikelić, N. Siedow, *Mathematical models in the manufacturing of glass*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 2011.
- [3] G. Thömmes, R. Pinnau, M. Seaid, T. Götz, A. Klar, “Numerical methods and optimal control for glass cooling processes”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **31**:4–6 (2002), 513–529.
- [4] R. Pinnau, G. Thömmes, “Optimal boundary control of glass cooling processes”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:11 (2004), 1261–1281.
- [5] R. Pinnau, “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by the SP<sub>1</sub>-system”, *Commun. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.
- [6] R. Pinnau, A. Schulze, “Newton’s method for optimal temperature-tracking of glass cooling processes”, *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **15**:4 (2007), 303–323.
- [7] M. Frank, A. Klar, R. Pinnau, “Optimal control of glass cooling using simplified P<sub>N</sub> theory”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **39**:2–4 (2010), 282–311.
- [8] D. Clever, J. Lang, “Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient”, *Optimal Control Appl. Methods*, **33**:2 (2012), 157–175.
- [9] O. Tse, R. Pinnau, “Optimal control of a simplified natural convection-radiation model”, *Commun. Math. Sci.*, **11**:3 (2013), 679–707.
- [10] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects”, *J. Math. Anal. Appl.*, **439**:2 (2016), 678–689.
- [11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**:1 (2014), 520–528.
- [12] Г. В. Гренкин, “Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 160–172.
- [13] G. V. Grenkin, A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Boundary optimal control problem of complex heat transfer model”, *J. Math. Anal. Appl.*, **433**:2 (2016), 1243–1260.
- [14] A. Münch, F. Periago, “Numerical approximation of bang-bang controls for the heat equation: An optimal design approach”, *Systems Control Lett.*, **62**:8 (2013), 643–655.

- 
- [15] K. Glashoff, E. Sachs, “On theoretical and numerical aspects of the bang-bang-principle”, *Numer. Math.*, **29**:1 (1977), 93–113.
- [16] K. Deckelnick, M. Hinze, “A note on the approximation of elliptic control problems with bang-bang controls”, *Comput. Optim. Appl.*, **51**:2 (2012), 931–939.
- [17] C. Y. Kaya, S. K. Lucas, S. T. Simakov, “Computations for bang-bang constrained optimal control using a mathematical programming formulation”, *Optimal Control Appl. Methods*, **25**:6 (2004), 295–308.
- [18] T. Taleshian, A. Ranjbar Noei, R. Ghaderi, “IPSO-SQP algorithm for solving time optimal bang-bang control problems and its application on autonomous underwater vehicle”, *Journal of Advances in Computer Research*, **5**:2 (2014), 69–88.
- [19] H. Maurer, H. D. Mittelmann, “Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 1. Boundary control”, *Comput. Optim. Appl.*, **16**:1 (2000), 29–55.
- [20] H. Maurer, H. D. Mittelmann, “Optimization techniques for solving elliptic control problems with control and state constraints: Part 2. Distributed control”, *Comput. Optim. Appl.*, **18**:2 (2001), 141–160.
- [21] A. Borzi, K. Kunisch, “A multigrid scheme for elliptic constrained optimal control problems”, *Comput. Optim. Appl.*, **31**:3 (2005), 309–333.
- [22] M. J. Zandvliet, O. H. Bosgra, J. D. Jansen, P. M. J. Van den Hof, J. F. B. M. Kraaijevanger, “Bang-bang control and singular arcs in reservoir flooding”, *J. Pet. Sci. Eng.*, **58**:1–2 (2007), 186–200.
- [23] Н. Н. Калиткин, *Численные методы*, Наука, М., 1978.
- [24] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. M. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst, *Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods*, 2nd Edition, SIAM Press, Philadelphia, 1994.
- [25] *The Iterative Template Library* <http://www.osl.iu.edu/research/itl/>.
- [26] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Оптимальное управление граничным коэффициентом в полустационарной модели сложного теплообмена в трехмерной области”, *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2016611950*, 15.02.2016, Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 декабря 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00037).

---

*Grenkin G. V.* An algorithm for solving the problem of boundary optimal control in a complex heat transfer model. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 24–38.

#### ABSTRACT

A nonstationary model of complex heat transfer, which includes  $P_1$  approximation for the radiative heat transfer equation, is considered. The optimal control problem consists in determination of the boundary reflection coefficient within the specified range in order to minimize the cost functional. The considered algorithm for solving the control problem is based on the fact, that the optimal control satisfies the bang-bang principle, and employs the idea of the gradient descent method. The algorithm is tested for a three-dimensional domain.

*Key words: radiative heat transfer, diffusion approximation, optimal control, bang-bang, gradient descent method.*