Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 62–68

УДК 511.21
MSC2010 11B37

© М. Д. Монина[1]

Мультипликативный метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9

Пусть заданы две целочисленные последовательности Сомос-4. В работе доказывается, что, за некоторыми исключениями, их произведение является последовательностями Сомос-8 и Сомос-9.

Ключевые слова: *нелинейные последовательности, квадратичные рекуррентные последовательности, сигма-функция Вейерштрасса, последовательности Сомоса.*

Введение

Пусть k — любое натуральное число большее единицы и $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ — произвольный набор из $[k/2]$ комплексных чисел, одновременно не равных нулю. Последовательность $A : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая квадратичному рекуррентному соотношению

$$A(n+k)A(n) = \sum_{i=1}^{[k/2]} \alpha_i A(n+k-i)A(n+i) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

называют Сомос-k.

Если все элементы A отличны от нуля, то она однозначно определяется коэффициентами α_i и любыми k последовательными значениями; в частности, $A(1), \ldots, A(k)$. В случае появления элемента $A(n) = 0$ эта однозначность нарушается.

Выберем вместо набора комплексных чисел $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]})$ набор из $[k/2]$ формальных переменных $u = (u_1, \ldots, u_{[k/2]})$, а вместо набора $(A(1), \ldots, A(k))$ из k комплексных чисел набор $X = (X_1, \ldots, X_k)$ с формальными переменными X_i. Построим последовательность рациональных функций

$$Q_k(n) = Q_k(u; X; n) = Q_k(u_1, \ldots, u_{[k/2]}; X_1, \ldots, X_k; n),$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: monina@iam.khv.ru

положив в качестве k начальных значений

$$Q_k(1) = X_1, \ldots, Q_k(k) = X_k.$$

Далее продолжаем её вправо ($n > 0$) и влево ($n \leq 0$) по рекуррентным формулам

$$Q_k(n+k) = \frac{1}{Q_k(n)} \sum_{i=1}^{[k/2]} u_i Q_k(n+k-i) Q_k(n+i),$$

$$Q_k(n) = \frac{1}{Q_k(n+k)} \sum_{i=1}^{[k/2]} u_i Q_k(n+k-i) Q_k(n+i).$$

Вышеупомянутую проблему с Сомос-последовательностями, у которых встречаются нулевые элементы, можно решить следующим способом. Под Сомос-k мы понимаем только те последовательности, которые получаются в качестве значений рациональных функций $Q_k(n)$ при замене переменных α_i и X_i на конкретные числа.

В простейших случаях рекуррентное соотношение имеет вид

$$Q_2(n+2)Q_2(n) = u_1 Q_2^2(n+1) \qquad (k=2),$$
$$Q_2(n+3)Q_2(n) = u_1 Q_2(n+2) Q_2(n+1) \qquad (k=3).$$

Индукцией по n можно показать, что

1) при $k = 2$

$$Q_2(u_1; X_1, X_2; n) = u_1^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} X_1^{2-n} X_2^{n-1};$$

1) при $k = 3$

$$Q_3(u_1; X_1, X_2, X_3; n) = \begin{cases} u_1^{\frac{(n-2)^2}{4}} X_1^{\frac{2-n}{2}} X_2 X_3^{\frac{n-2}{2}}, & \text{если } n \text{ — чётное;} \\ u_1^{\frac{(n-1)(n-3)}{4}} X_1^{\frac{3-n}{2}} X_3^{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ — нечётное.} \end{cases}$$

При $k \geq 4$ ситуация существенно усложняется и таких, как при $k = 2, 3$, простых формул для $Q_k(n)$ нет.

В работах [1] и [2] (см. обзор в [3]) начал изучаться вопрос о том, при каких условиях наложенных на коэффициенты α_i и начальные значения $A(j)$ все элементы последовательности Сомос–k являются целочисленными для $k \geq 4$. При $k = 2, 3$, ввиду того, что существуют явные формулы для $Q_k(n)$, ответ очевиден.

В работе [4] было доказано, что при $4 \leq k \leq 7$

$$Q_k(u_1, \ldots, u_{[k/2]}; X_1, \ldots, X_k; n) = \sum_{l=(l_1,\ldots,l_k)\in\mathbb{Z}^k} P_l(u_1, \ldots, u_{[k/2]}) X_1^{l_1}(1) \ldots X_k^{l_k}(k),$$

где P_l — полином от переменных u_i с целыми коэффициентами. Отсюда следует, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ — целые числа, а начальные значения $A(1), \ldots, A(k)$ равны ± 1, то A — целочисленная последовательность Сомос–k. В работе [5], опирающейся на [6] и [7], для $k = 4, 5$ были получены более сильные результаты.

В настоящей работе методами из [8] и [9] построены новые семейства целочисленных последовательностей Сомос-8,9.

Автор благодарит В.А. Быковского за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

§1. Эллиптические системы последовательностей

Пусть Γ — произвольная дискретная аддитивная подгруппа (решётка) в поле комплексных чисел. Сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, определяется во формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} (1-\frac{z}{w})\, e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}.$$

В вырожденных случаях:

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\qquad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw \mid m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{nw}\right) e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}(\frac{z}{nw})^2} = \frac{w}{\pi}\sin\frac{\pi z}{w} e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}.$$

Сигма-функция является нечётной функцией с простыми нулями в узлах решётки Γ. В работе [6], а также в некоторых других было доказано, что за исключением вырожденных случаев последовательность Сомос-4 имеет вид

$$A(n) = e^{an^2+bn+c}\sigma_\Gamma(z_0+nz), \tag{2}$$

где a, b, c, z_0 и $z \neq 0$ — произвольные комплексные числа, а Γ — любая решётка на комплексной плоскости.

В докладе [8] были построены так называемые "эллиптические системы последовательностей". Речь идет о следующей конструкции.

Пусть $A, B : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — две последовательности, тождественно не равные нулю, для которых найдутся $4k$ других последовательностей

$$C_1^{(0)}, \dots, C_k^{(0)}, D_1^{(0)}, \dots, D_k^{(0)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$
$$C_1^{(1)}, \dots, C_k^{(1)}, D_1^{(1)}, \dots, D_k^{(1)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

таких, что для любых целых m, n выполняются равенства

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \tag{3}$$

$$A(m+n+1)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n). \tag{4}$$

В таком случае мы назовём пару (A, B) эллиптической системой ранга $k = R(A, B)$, где k — минимально возможное натуральное число для представлений (3) и (4).

Для любых целых $m_0, \dots, m_k$ и $n_0, \dots, n_k$ из (3) и (4) соответственно следуют равенства

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_{A,B}^{(0)}\begin{pmatrix} m_0, \dots, m_k \\ n_0, \dots, n_k\end{pmatrix} = \\ &= \det\begin{pmatrix} A(m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(m_k+n_k)B(m_k-n_k)\end{pmatrix} = 0,\end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathcal{D}^{(1)}_{A,B}\begin{pmatrix} m_0,\ldots,m_k \\ n_0,\ldots,n_k\end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(1+m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(1+m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(1+m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(1+m_k+n_k)B(m_k-n_k)\end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Из теории эллиптических функций (формулы сложения для сигма-функций) непосредственно следует, что пара (A, A) вида (2) является эллиптической системой ранга 2.

§2. Целочисленные последовательности Сомос-8

Пусть A, B — целочисленные последовательности Сомос-4 вида (2). Определим целочисленную последовательность $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$C(n) = A(n)B(n). \tag{7}$$

Теорема 1. *Если* $\mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0\end{pmatrix} \neq 0$, *то* C *— целочисленная последовательность Сомос-8.*

Доказательство. Для последовательностей A и B при любых целых m и n справедливо разложение

$$A(m+n)B(m-n) = C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(n) + C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(n).$$

Отсюда следует, что

$$C(m+n)C(m-n) = A(m+n)B(m+n)A(m-n)B(m-n) =$$
$$= A(m+n)B(m-n)A(m-n)B(m+n) =$$
$$= \left(C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(n) + C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(n)\right)\left(C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(-n) + C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(-n)\right) =$$
$$= \tilde{C}^{(0)}_1(m)\tilde{D}^{(0)}_1(n) + \tilde{C}^{(0)}_2(m)\tilde{D}^{(0)}_2(n) + \tilde{C}^{(0)}_3(m)\tilde{D}^{(0)}_3(n) + \tilde{C}^{(0)}_4(m)\tilde{D}^{(0)}_4(n),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(0)}_1(m) &= C^{(0)}_1(m)C^{(0)}_1(m), & \tilde{D}^{(0)}_1(n) &= D^{(0)}_1(n)D^{(0)}_1(-n), \\ \tilde{C}^{(0)}_2(m) &= C^{(0)}_1(m)C^{(0)}_2(m), & \tilde{D}^{(0)}_2(n) &= D^{(0)}_1(n)D^{(0)}_2(-n), \\ \tilde{C}^{(0)}_3(m) &= C^{(0)}_2(m)C^{(0)}_2(m), & \tilde{D}^{(0)}_3(n) &= D^{(0)}_2(n)D^{(0)}_2(-n), \\ \tilde{C}^{(0)}_4(m) &= C^{(0)}_1(m)C^{(0)}_2(m), & \tilde{D}^{(0)}_4(n) &= D^{(0)}_1(-n)D^{(0)}_2(n). \end{aligned}$$

Поэтому пара (C, C) — эллиптическая система с $R(C, C) \leq 4$. Тогда, в соответствии с (5), для любого целого n

$$\mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix} n+4, & 3, & 2, & 1, & 0 \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\3,2,1,0\end{pmatrix}C(n+8)C(n) - \mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\4,2,1,0\end{pmatrix}C(n+7)C(n+1)+$$

$$+\mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\4,3,1,0\end{pmatrix}C(n+6)C(n+2) - \mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\4,3,2,0\end{pmatrix}C(n+5)C(n+3)+$$

$$+\mathcal{D}^{(0)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\4,3,2,1\end{pmatrix}C(n+4)C(n+4) = 0.$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $C(n+8)C(n)$, получим утверждение теоремы 1.

Пример 1. Пусть последовательность A задана рекуррентным соотношением

$$A(n+2)A(n-2) = A(n+1)A(n-1) + A^2(n)$$

и начальными условиями

$$A(-4) = A(-3) = A(-2) = A(-1) = 1,$$

а для последовательности B

$$B(n+2)B(n-2) = B(n+1)B(n-1) - B^2(n)$$

и

$$B(-4) = B(-3) = B(-2) = -B(-1) = 1.$$

В соответствии с (7) получим целочисленную последовательность C

$$\begin{gathered}\ldots,\ C(-4)=1,\ C(-3)=1,\ C(-2)=1,\ C(-1)=-1,\ C(0)=-4,\\ C(1)=-9,\ C(2)=-7,\ C(3)=161,\ C(4)=649,\ C(5)=6280,\\ C(6)=-29051,\ C(7)=-714183,\ C(8)=-15912783,\ \ldots,\end{gathered}$$

каждый член которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{gathered}C(n+8)C(n) =\\ = \frac{1}{3}\Big(23C(n+7)C(n+1) - 127C(n+6)C(n+2)+\\ +179C(n+5)C(n+3) - 266C(n+4)C(n+4)\Big).\end{gathered}$$

§3. Целочисленные последовательности Сомос-9

Пусть A, B и C — целочисленные Сомос–последовательности такие же, как в §2.

Теорема 2. *Если* $\mathcal{D}^{(1)}_{C,C}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\3,2,1,0\end{pmatrix} \neq 0$, *то* C *— целочисленная последовательность Сомос-9.*

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, для последовательностей A и B при любых целых m и n справедливо разложение

$$A(m+n+1)B(m-n) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n) + C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(n).$$

Отсюда следует, что

$$C(m+n+1)C(m-n) = A(m+n+1)B(m+n+1)A(m-n)B(m-n) =$$

$$= A(m+n+1)B(m-n)A(m-n)B(m+n+1) =$$

$$= \Big(C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n) + C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(n)\Big)\Big(C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(-n-1) + C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(-n-1)\Big) =$$

$$= \tilde{C}_1^{(1)}(m)\tilde{D}_1^{(1)}(n) + \tilde{C}_2^{(1)}(m)\tilde{D}_2^{(1)}(n) + \tilde{C}_3^{(1)}(m)\tilde{D}_3^{(1)}(n) + \tilde{C}_4^{(1)}(m)\tilde{D}_4^{(1)}(n),$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_1^{(1)}(m) &= C_1^{(1)}(m)C_1^{(1)}(m), & \tilde{D}_1^{(1)}(n) &= D_1^{(1)}(n)D_1^{(1)}(-n-1),\\
\tilde{C}_2^{(1)}(m) &= C_1^{(1)}(m)C_2^{(1)}(m), & \tilde{D}_2^{(1)}(n) &= D_1^{(1)}(n)D_2^{(1)}(-n-1),\\
\tilde{C}_3^{(1)}(m) &= C_2^{(1)}(m)C_2^{(1)}(m), & \tilde{D}_3^{(1)}(n) &= D_2^{(1)}(n)D_2^{(1)}(-n-1),\\
\tilde{C}_4^{(1)}(m) &= C_1^{(1)}(m)C_2^{(1)}(m), & \tilde{D}_4^{(1)}(n) &= D_1^{(1)}(-n-1)D_2^{(1)}(n).
\end{aligned}$$

Поэтому пара (C, C) — эллиптическая система с $R(C, C) \leq 4$. Тогда, в соответствии с (6), для любого целого n

$$\mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} n+4, & 3, & 2, & 1, & 0 \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} C(n+9)C(n) - \mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix} C(n+8)C(n+1) +$$

$$+ \mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,1,0 \end{pmatrix} C(n+7)C(n+2) - \mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,0 \end{pmatrix} C(n+6)C(n+3) +$$

$$+ \mathcal{D}_{C,C}^{(1)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,1 \end{pmatrix} C(n+5)C(n+4) = 0.$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $C(n+9)C(n)$, получим утверждение теоремы 2.

Пример 2. Пусть последовательность A и B — последовательности из примера 1. В соответствии с (7) получим целочисленную последовательность C

$$\ldots,\ C(-4) = 1,\ C(-3) = 1,\ C(-2) = 1,\ C(-1) = -1,\ C(0) = -4,$$
$$C(1) = -9,\ C(2) = -7,\ C(3) = 161,\ C(4) = 649,\ C(5) = 6280,$$
$$C(6) = -29051,\ C(7) = -714183,\ C(8) = -15912783,\ \ldots,$$

каждый член которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$
\begin{gathered}
C(n+9)C(n) = \\
= \frac{1}{24049580676263}\Big(112792562797699\, C(n+8)C(n+1)+ \\
+1708618180721210\, C(n+7)C(n+2) + 2898090503135775\, C(n+6)C(n+3)- \\
-4915886116192761\, C(n+5)C(n+4)\Big).
\end{gathered}
$$

Список литературы

[1] M. Ward, “Memoir on elliptic divisibility sequences”, Amer. J. Math., **70**, 1948, 31–74.

[2] M. Somos, *Problem 1470*, Crux Mathematicorum 15 208, 1989.

[3] D. Gale, “Mathematical Entertainments: The Strange and Surprising Saga of the Somos Sequences”, Math. Intel., **13**, 1991, 40–42.

[4] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent Phenomenon”, Adv. Appl. Math., **28**, 2002, 19–44.

[5] A. N. W. Hone, C. S. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Mathematical Proceedigs of the Cambridge Philosophical Society*, **145** (2008), 65–85.

[6] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, Bull. Lond. Math. Soc., **37**, 2005, 161–171.

[7] A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos-5 sequences”, Trans. Amer. Math. Soc., **359**, 2007, 5019–5034.

[8] V. Bykovskii, “Elliptic systems of sequences and functions”, 2015, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.

[9] М. Д. Монина, “О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневосточный математический журнал*, **15**:1 (2015), 70–75.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 18 апреля 2016 г.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00335).

Monina M. D. A multiplicative method of construction of integer Somos-8 and Somos-9 sequences. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 62–68.

ABSTRACT

The article offers a new method for constructing of integer Somos-8,9 sequences.

Key words: *nonlinear sequences, quadratic recurrence sequences, Weierstrass sigma-function, Somos sequences.*