Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 69–82

УДК 519.116, 511.556
MSC2010 11F20, 11F27

© М. А. Романов[1]

Арифметическая природа тождества для восьмикратного произведения

В работе предлагается новое доказательство тождества для восьмикратного произведения с помощью элементарных арифметических методов.

Ключевые слова: *тройное произведение, пятикратное произведение, восьмикратное произведение, тождества Лиувилля.*

1. Введение

В своих основополагающих работах [1] и [2] для построения теории эллиптических функций Якоби использовал четыре тэта-функции:

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1(z;q) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)iz} = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\sin(2n+1)z,$$

$$\vartheta_2(z) = \vartheta_2(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)iz} = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\cos(2n+1)z,$$

$$\vartheta_3(z) = \vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2inz} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nz,$$

$$\vartheta_4(z) = \vartheta_4(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inz} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz.$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: romanov@iam.khv.ru

Фундаментальную роль в теории тэта-функций играют их разложения в бесконечные произведения с $x = e^{2iz}$:

$$\vartheta_1(z;q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} x^{n+\frac{1}{2}} =$$
$$= -iq^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-xq^{2k})(1-x^{-1}q^{2k}),$$
$$\vartheta_2(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} x^{n+\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+xq^{2k})(1+x^{-1}q^{2k}),$$
$$\vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+xq^{2k-1})(1+x^{-1}q^{2k-1}),$$
$$\vartheta_4(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-xq^{2k-1})(1-x^{-1}q^{2k-1}).$$

Эти разложения были открыты К. Якоби (см. [3]) и независимо от него К. Гауссом в опубликованных много лет спустя научных дневниках (см. [4]). Некоторые авторы называют их разложениями в тройное произведение по количеству множителей под знаком бесконечного произведения.

На странице 433 первого тома монографии Фрикке [5] приведено ещё одно замечательное тождество

$$2q^{\frac{1}{6}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(6n+1)^2}{12}} \cos(6n+1)z = \vartheta_2(z;q)\vartheta_3(z;q)\vartheta_4(z;q) \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-2}.$$

С помощью разложений ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 в тройные произведения и замен

$$z \to z + \frac{\pi}{2}, \quad q \to q^{\frac{1}{2}}$$

оно преобразуется в тождество

$$(1-x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-xq^k)(1-x^{-1}q^k)(1-x^2q^{2k-1})(1-x^{-2}q^{2k-1}) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3n^2+n}{2}}(x^{3n} - x^{-3n-1}), \tag{1}$$

которое переоткрывалось в работах [6], [7], [8] и [9]. В свою очередь, заменами (см. [10])

$$q \to q^6, \quad x \to xq^3$$

(1) приводится к виду

$$q(x-x^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-xq^{3k})(1-x^{-1}q^{3k})(1+xq^{6k})(1+x^{-1}q^{6k}) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q^{(3n+1)^2} x^{3n+1} - q^{(3n-1)^2} x^{3n-1}). \tag{2}$$

Это тождество иногда называют тождеством для пятикратного произведения.

Положим $y = e^{2iw}$. К числу важнейших в теории эллиптических и тэта-функций относится тождество для восьмикратного произведения

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} x^m y^n q^{mn} - \sum_{m,n=1}^{\infty} x^{-m} y^{-n} q^{mn} = \\ = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^k)^2 \cdot (1-xyq^{k-1})(1-x^{-1}y^{-1}q^k)}{(1-xq^{k-1})(1-x^{-1}q^k)(1-yq^{k-1})(1-y^{-1}q^k)}. \tag{3}$$

С помощью разложения $\vartheta_1(z;q)$, $\vartheta_1(w;q)$ и $\vartheta_1(z+w;q)$ в тройное произведение и замен

$$q \to q^2, \quad x \to x^2, \quad y \to y^2$$

оно преобразуется в восходящее к Якоби тождество (см. [11], стр. 92)

$$\frac{\vartheta_1' \vartheta_1(z+w)}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} w + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q^{mn} \sin(2mz + 2nw),$$

где ϑ_1' — производная по z в точке $z=0$ нечётной функции Якоби ϑ_1. Тождество (3) также возникало в работах Л. Кронекера по теории эллиптических функций (см. [12]) и является частным случаем формулы произведения Рамануджана (см. [13]). Кроме того, тождества для тройного и восьмикратного произведений естественным образом появляются в теории аффинных алгебр Каца – Муди и суперbegin алгебр Ли (см. [14]).

В 1858–1865 годах в “Journal de mathématiques pures et appliquées” Лиувилль в более чем ста заметках опубликовал без доказательств множество подобного рода тождеств. В отличие от Якоби, он опирался на специальные арифметические тождества, опубликованные в серии из восемнадцати статей под общим названием “Sur quelques formules générales qui peuvent étre utiles dans la théorie des nombres” в те же годы, в том же журнале и так же без доказательств.

Методы Лиувилля были воссозданы в работах Баскакова, Назимова, Успенского и других авторов (см. [15], [16], [17] и [18]). В статье [10] показано, что разложение функции ϑ_3 в тройное произведение и тождество для пятикратного произведения эквивалентны арифметическим тождествам, содержащим произвольную нечётную функцию, скрученную с квадратичными характерами по модулю 3 и 4, и приведены доказательства этих тождеств.

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для любой функции $F : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ с условием*

$$F(-m,-n) = -F(m,n) \tag{4}$$

и любого фиксированного натурального d справедливо тождество

$$\sum_{mn=d} \left(-dF(m,n) + m \sum_{s=0}^{n}{}'' (F(s,n) + F(n,s) - F(s,0) - F(0,s)) \right) = \\ = \sum_{mn+kl=d} k\big(2F(m,n) + F(m+l,n+l) + F(m-l,n-l) - \\ - F(m+l,n) - F(m-l,n) - F(m,n+l) - F(m,n-l)\big) \tag{5}$$

(штрихи возле знака суммы означают, что слагаемые с $s = 0$ и $s = n$ берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$; m, n, k, l – натуральные числа).

С помощью логарифмического дифференцирования мы показываем эквивалентность тождества для восьмикратного произведения (3) арифметическому тождеству (5) с некоторой функцией F. Теорема 1 доказывается элементарными методами.

Замечание. В работе [19] получено другое арифметическое тождество, эквивалентное (3).

Автор выражает благодарность В.А. Быковскому за постановку задачи и полезные замечания.

2. Эквивалентность

После преобразования исходного тождества (3) получим

$$-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\sum_{m,n=1}^{\infty}(x^my^n-x^{-m}y^{-n})q^{mn}=$$
$$=\frac{1-xy}{(1-x)(1-y)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k)^2(1-xyq^k)(1-x^{-1}y^{-1}q^k)}{(1-xq^k)(1-x^{-1}q^k)(1-yq^k)(1-y^{-1}q^k)}.$$

Обозначим двойную сумму в левой части этого равенства через $S(x,y;q)$. Применив к обеим частям логарифмическую производную $q\frac{d}{dq}\log$ и воспользовавшись разложением

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{l=1}^{\infty}z^l,$$

найдём

$$\frac{q\frac{dS(x,y;q)}{dq}}{-1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+S(x,y;q)}=$$
$$=-\sum_{k=1}^{\infty}k\Bigg(\frac{2q^k}{1-q^k}+\frac{xyq^k}{1-xyq^k}+\frac{x^{-1}y^{-1}q^k}{1-x^{-1}y^{-1}q^k}-$$
$$-\frac{xq^k}{1-xq^k}-\frac{x^{-1}q^k}{1-x^{-1}q^k}-\frac{yq^k}{1-yq^k}-\frac{y^{-1}q^k}{1-y^{-1}q^k}\Bigg)=$$
$$=-\sum_{k,l=1}^{\infty}k(2+x^ly^l+x^{-l}y^{-l}-x^l-x^{-l}-y^l-y^{-l})q^{kl}.$$

Последнюю сумму в этом равенстве обозначим через $T(x,y;q)$. Таким образом,

$$-q\frac{dS(x,y;q)}{dq}+\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right)T(x,y;q)=S(x,y;q)T(x,y;q). \qquad (6)$$

Определим функцию f равенством

$$f(m,n)=f_{x,y}(m,n)=x^m y^n - x^{-m}y^{-n}.$$

Тогда слагаемые из левой части и правая часть (6) примут вид

$$q\frac{dS(x,y;q)}{dq}=\sum_{m,n=1}^{\infty} mnf(m,n)q^{mn},$$

$$\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right)T(x,y;q)=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{\infty} k\left(1+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}\right)(2+x^l y^l+x^{-l}y^{-l}-x^l-x^{-l}-y^l-y^{-l})q^{kl}=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{\infty} k(1+x^{-l}y^{-l})\biggl(\frac{1}{2}(x^l-1)(y^l-1)+(x^l-1)\frac{y^l-1}{y-1}+$$

$$+\frac{1}{2}(x^l-1)(y^l-1)+(y^l-1)\frac{x^l-1}{x-1}\biggr)q^{kl}=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{\infty} k\left({\sum_{s=0}^{l}}'' f(s,l)+f(l,s)-f(s,0)-f(0,s)\right)q^{kl},$$

$$S(x,y;q)T(x,y;q)=\sum_{m,n,k,l=1}^{\infty} kf(m,n)(2+x^l y^l+x^{-l}y^{-l}-x^l-x^{-l}-y^l-y^{-l})q^{mn+kl}=$$

$$=\sum_{m,n,k,l=1}^{\infty} k\bigl(2f(m,n)+f(m+l,n+l)+f(m-l,n-l)-$$

$$-f(m+l,n)-f(m-l,n)-f(m,n+l)-f(m,n-l)\bigr)q^{mn+kl}.$$

После подстановки полученных выражений в (6) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях q получим тождество (5) с $F=f$. Чтобы распространить его на произвольную функцию F с условием (4), заметим, что при фиксированном $d\in\mathbb{N}$ переменные суммирования m,n,k,l в (5) принимают лишь конечное число значений. Поэтому F можно считать периодической с достаточно большим периодом $N\in\mathbb{N}$ по каждой переменной, и, следовательно, разложить в конечный ряд Фурье

$$F(m,n)=\sum_{-\frac{N}{2}<m',n'\leqslant\frac{N}{2}} \widehat{F}(m',n')e^{2\pi i\frac{mm'+nn'}{N}},$$

где

$$\widehat{F}(m',n')=\frac{1}{N^2}\sum_{-\frac{N}{2}<m,n\leqslant\frac{N}{2}} F(m,n)e^{-2\pi i\frac{mm'+nn'}{N}}.$$

При условии (4) это разложение принимает вид

$$F(m,n)=\sum_{0<m',n'<\frac{N}{2}} \widehat{F}(m',n')f_{\exp(\frac{2\pi i m'}{N}),\exp(\frac{2\pi i n'}{N})}(m,n). \tag{7}$$

Поэтому, из-за линейности по F тождество (5) будет верно для любой функции вида (7).

3. Доказательство теоремы

Легко проверить, что для функции F, удовлетворяющей условию $F(n,m) = -F(m,n)$, левая и правая части (5) равны нулю. Поэтому можно считать, что

$$F(n,m) = F(m,n). \tag{8}$$

При таком условии тождество (5) принимает более простой вид

$$\begin{gathered}\sum_{mn=d}\left(-dF(m,n) + 2m\sideset{}{''}\sum_{s=0}^{n}\big(F(s,n)-F(s,0)\big)\right) = \\ = \sum_{mn+kl=d} k\big(2F(m,n) + F(m+l,n+l) + F(m-l,n-l) - \\ -2F(m+l,n) - 2F(m-l,n)\big).\end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим его правую часть через S и разобьём её на пять слагаемых:

$$S_0 = 2\sum_{mn+kl=d} kF(m,n), \tag{10}$$

$$S_1 = \sum_{mn+kl=d} kF(m+l,n+l),$$

$$S_2 = \sum_{mn+kl=d} kF(m-l,n-l),$$

$$S_3 = -2\sum_{mn+kl=d} kF(m+l,n),$$

$$S_4 = -2\sum_{mn+kl=d} kF(m-l,n).$$

Суммы S_1, S_2, S_3, S_4 с помощью соответствующих им четырёх замен переменных суммирования

$$\begin{gathered}(m,n,k,l) = (m'-l, n'-l, k'+m'+n'-l, l) \quad \text{при условии} \\ m'-l>0, n'-l>0, k'+m'+n'-l>0, \\ (m,n,k,l) = (m'+l, n'+l, k'-m'-n'-l, l) \quad \text{при условии} \\ m'+l>0, n'+l>0, k'-m'-n'-l>0, \\ (m,n,k,l) = (m'-l, n', k'+n', l) \quad \text{при условии} \\ m'-l>0, n'>0, k'+n'>0, \\ (m,n,k,l) = (m'+l, n', k'-n', l) \quad \text{при условии} \\ m'+l>0, n'>0, k'-n'>0\end{gathered}$$

приводятся к виду

$$S_1 = \sum_{\substack{m'n'+k'l=d \\ m'-l>0,\, n'-l>0 \\ k'+m'+n'-l>0}} (k'+m'+n'-l)F(m',n'),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{m'n'+k'l=d \\ m'+l>0,\, n'+l>0 \\ k'-m'-n'-l>0}} (k'-m'-n'-l)F(m',n'),$$

$$S_3 = -2\sum_{\substack{m'n'+k'l=d \\ m'-l>0,\, n'>0 \\ k'+n'>0}} (k'+n')F(m',n'),$$

$$S_4 = -2\sum_{\substack{m'n'+k'l=d \\ m'+l>0,\, n'>0 \\ k'-n'>0}} (k'-n')F(m',n').$$

(Здесь и в дальнейшем переменные со штрихом — целые числа, а без штриха — натуральные.) Каждую из этих сумм разобьём на части в соответствии с условиями

$$\begin{aligned} m' = m > 0, \quad m' = -m < 0, \quad m' = 0; \\ n' = n > 0, \quad n' = -n < 0, \quad n' = 0; \\ k' = k > 0, \quad k' = -k < 0, \quad k' = 0. \end{aligned}$$

Для этих частей будем применять обозначение S_j^{***}, где j – индекс суммы, а вместо звёздочек стоят знаки переменных m', n', k' ($+$, $-$ или 0 в зависимости от того, больше нуля, меньше нуля или равна нулю переменная).

В сумме S_1 $m' > l > 0$, $n' > l > 0$, поэтому

$$S_1 = S_1^{+++} + S_1^{++-} + S_1^{++0}, \tag{11}$$

где

$$S_1^{+++} = \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (k+m+n-l)F(m,n),$$

$$S_1^{++-} = \sum_{\substack{mn-kl=d \\ m>l,\, n>l \\ -k+m+n-l>0}} (-k+m+n-l)F(m,n),$$

$$S_1^{++0} = \sum_{\substack{mn=d \\ m>l,\, n>l}} (m+n-l)F(m,n).$$

В сумме S_2 при $m' \geqslant 0$, $n' \geqslant 0$ либо при $m'n' < 0$ неравенство $k' \leqslant 0$ невозможно. В первом случае оно противоречит условию $k'-m'-n'-l > 0$, а во втором уравнение

$m'n' + k'l = d$ не имеет решений. Кроме того, при условии (8) S_2 инвариантна относительно замены $(m', n') \to (n', m')$, поэтому

$$\begin{gathered} S_2^{-++} = S_2^{+-+}, \\ S_2^{0++} = S_2^{+0+}, \\ S_2^{0-+} = S_2^{-0+}, \end{gathered}$$

и, согласно (4), $S_2^{00+} = 0$. Следовательно,

$$S_2 = S_2^{+++} + 2S_2^{-++} + 2S_2^{0++} + 2S_2^{0-+} + S_2^{--+} + S_2^{---} + S_2^{--0}, \tag{12}$$

где

$$S_2^{+++} = \sum_{\substack{mn+kl=d \\ k-m-n-l>0}} (k-m-n-l)F(m,n),$$

$$S_2^{0++} = \sum_{\substack{kl=d \\ k-n-l>0}} (k-n-l)F(0,n),$$

$$S_2^{-++} = \sum_{\substack{-mn+kl=d \\ m<l \\ k+m-n-l>0}} (k+m-n-l)F(-m,n),$$

$$S_2^{0-+} = -\sum_{\substack{kl=d \\ n<l \\ k+n-l>0}} (k+n-l)F(0,n),$$

$$S_2^{--+} = -\sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l \\ k+m+n-l>0}} (k+m+n-l)F(m,n),$$

$$S_2^{---} = -\sum_{\substack{mn-kl=d \\ m<l,\, n<l \\ -k+m+n-l>0}} (-k+m+n-l)F(m,n),$$

$$S_2^{--0} = -\sum_{\substack{mn=d \\ m<l,\, n<l \\ m+n-l>0}} (m+n-l)F(m,n).$$

В сумме S_3 $m' > l > 0$, $n' > 0$, следовательно,

$$S_3 = S_3^{+++} + S_3^{++-} + S_3^{++0}, \tag{13}$$

где

$$S_3^{+++} = -2\sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l}} (k+n)F(m,n),$$

$$S_3^{++-} = -2\sum_{\substack{mn-kl=d \\ m>l,\, n>k}} (n-k)F(m,n), \qquad S_3^{++0} = -2\sum_{\substack{mn=d \\ m>l}} nF(m,n).$$

И, наконец, на основании неравенства $k' > n' > 0$

$$S_4 = S_4^{+++} + S_4^{-++} + S_4^{0++}, \tag{14}$$

где

$$S_4^{+++} = -2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ n<k}} (k-n)F(m,n),$$

$$S_4^{-++} = -2 \sum_{\substack{-mn+kl=d \\ m<l,\, n<k}} (k-n)F(-m,n), \qquad S_4^{0++} = -2 \sum_{\substack{kl=d \\ n<k}} (k-n)F(0,n).$$

Из условия $k-m-n-l > 0$ следует, что $m<k$, $n<k$, поэтому после замены $(k,l) \to (l,k)$ сумма S_2^{+++} будет отличаться от S_2^{--+} лишь условием $k+m+n-l<0$ вместо $k+m+n-l>0$. Так как слагаемые с $k+m+n-l=0$ равны нулю, то

$$S_2^{+++} + S_2^{--+} = - \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (k+m+n-l)F(m,n). \tag{15}$$

Сумму S_3^{+++} разобьём на три в соответствии с условиями $n>l$, $n<l$, $n=l$. Сумму S_4^{+++} после замены $(k,l) \to (l,k)$ также разобьём на части с $m>l$, $m<l$, $m=l$. Обозначая $H_1 = S_0 + S_1^{+++} + S_2^{+++} + S_2^{--+} + S_3^{+++} + S_4^{+++}$ и принимая во внимание (15), получим

$$H_1 = S_0 + \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (k+m+n-l)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (k+m+n-l)F(m,n) -$$

$$-2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (k+n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n<l}} (k+n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n=l}} (k+n)F(m,n) -$$

$$-2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (l-n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n<l}} (l-n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m=l,\, n<l}} (l-n)F(m,n) =$$

$$= S_0 + 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (-k+m-n-l)F(m,n) + \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (-k-m+n-l)F(m,n) -$$

$$-2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n<l}} (k+l)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n=l}} (k+n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m=l,\, n<l}} (l-n)F(m,n) =$$

$$= S_0 + \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (m-n)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (m-n)F(m,n) -$$

$$- \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n>l}} (k+l)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n<l}} (k+l)F(m,n) -$$

$$- \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n<l}} (k+l)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m<l,\, n>l}} (k+l)F(m,n) -$$

$$-2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m>l,\, n=l}} (k+n)F(m,n) - 2 \sum_{\substack{mn+kl=d \\ m=l,\, n<l}} (l-n)F(m,n).$$

Суммы

$$\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m>l,\, n>l}} (m-n)F(m,n)$$

и

$$\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m<l,\, n<l}} (m-n)F(m,n)$$

при замене $(m,n) \to (n,m)$ меняют знак на противоположный и поэтому равны нулю. Кроме того,

$$S_0 = 2\sum_{mn+kl=d} kF(m,n) = \sum_{mn+kl=d} (k+l)F(m,n),$$

тогда

$$\begin{gathered} S_0 - \sum_{\substack{mn+kl=d\\ m>l,\, n>l}} (k+l)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d\\ m<l,\, n<l}} (k+l)F(m,n) - \\ - \sum_{\substack{mn+kl=d\\ m>l,\, n<l}} (k+l)F(m,n) - \sum_{\substack{mn+kl=d\\ m<l,\, n>l}} (k+l)F(m,n) = \\ = \sum_{\substack{mn+kl=d\\ m=l \text{ или } n=l}} (k+l)F(m,n) = 2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ n=l}}{}'' (k+l)F(m,n) \end{gathered}$$

(здесь штрихи означают, что слагаемые с $m = l$ берутся с коэффициентом 1/2).

Поэтому выражение для H_1 преобразуется к виду

$$\begin{gathered} H_1 = 2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ n=l}}{}'' (k+l)F(m,n) - \\ -2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m>l,\, n=l}} (k+l)F(m,n) - 2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m<l,\, n=l}} (l-m)F(m,n) = \\ = 2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m\leqslant l,\, n=l}}{}'' (k+l)F(m,n) - 2\sum_{\substack{mn+kl=d\\ m<l,\, n=l}} (l-m)F(m,n) = \\ = 2\sum_{\substack{(k+m)l=d\\ m\leqslant l}}{}'' (k+m)F(m,l). \end{gathered} \tag{16}$$

В сумме S_2^{-++} из условий $m < l$, $k + m - n - l > 0$ следует неравенство $n < k$. Поэтому, при выполнении условий (4) и (8), замена $(m, n, k, l) \to (n, m, l, k)$ не изменяет значение этой суммы, но меняет условие $k+m-n-l > 0$ на $k+m-n-l < 0$, при этом множитель $k + m - n - l$ обращает в нуль слагаемые с $k + m - n - l = 0$.

Следовательно,

$$2S_2^{-++} = \sum_{\substack{-mn+kl=d\\ m<l,\, n<k\\ k+m-n-l>0}} (k+m-n-l)F(-m,n) + \sum_{\substack{-mn+kl=d\\ m<l,\, n<k\\ k+m-n-l<0}} (k+m-n-l)F(-m,n) =$$

$$= \sum_{\substack{-mn+kl=d\\ m<l,\, n<k}} (k+m-n-l)F(-m,n).$$

Эта же замена приводит сумму S_4^{-++} к виду

$$S_4^{-++} = -2 \sum_{\substack{-mn+kl=d\\ m<l,\, n<k}} (m-l)F(-m,n),$$

поэтому

$$S_4^{-++} = - \sum_{\substack{-mn+kl=d\\ m<l,\, n<k}} (k+m-n-l)F(-m,n)$$

и

$$2S_2^{-++} + S_4^{-++} = 0. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим суммы S_1^{++-}, S_2^{---} и S_3^{++-}. Все они инвариантны относительно замен $(m,n) \to (n,m)$ и $(k,l) \to (l,k)$, следовательно,

$$S_1^{++-} = 2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ m\geqslant n>l\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n) =$$

$$= 2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ m>l,\, m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n) + 2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ l>m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n) +$$

$$+2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ m=l,\, m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n),$$

$$S_2^{---} = -2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ l>m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}}{}'' (-k+m+n-l)F(m,n)$$

(штрихи означают, что слагаемые с $m=n$ берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$; условие $n>k$ в сумме S_2^{---} следует из неравенств $m<l$ и $-k+m+n-l>0$).

Сумма S_3^{++-} после замены $(m,n,k,l) \to (n,m,l,k)$ принимает вид

$$S_3^{++-} = -2 \sum_{\substack{mn-kl=d\\ m>l,\, n>k\\ -k+m+n-l>0}} (m-l)F(m,n),$$

поэтому

$$S_3^{++-} = -\sum_{\substack{mn-kl=d\\ m>l,\, n>k\\ -k+m+n-l>0}} (-k+m+n-l)F(m,n) = -2 \sideset{}{''}\sum_{\substack{mn-kl=d\\ m>l,\, m\geqslant n>k\\ -k+m+n-l>0}} (-k+m+n-l)F(m,n).$$

Тогда

$$H_2 = S_1^{++-} + S_2^{---} + S_3^{++-} = 2 \sideset{}{''}\sum_{\substack{(n-k)l=d\\ k<n\leqslant l}} (n-k)F(l,n) \tag{18}$$

(слагаемые с $n = l$ берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$).

Принимая во внимание (10)–(14) и (16)–(18), заключаем, что

$$S = H_1 + H_2 + S_1^{++0} + 2S_2^{0++} + 2S_2^{0-+} + S_2^{--0} + S_3^{++0} + S_4^{0++}. \tag{19}$$

Осталось показать, что S совпадает с левой частью (9). Для этого, во-первых, в суммах H_1 и H_2 сделаем замены переменных $k \to m-k$ и $k \to k-m$ соответственно. Получим

$$H_1 = 2\sum_{kl=d} \sideset{}{''}\sum_{\substack{m<k\\ m\leqslant l}} kF(m,l),$$

$$H_2 = 2\sum_{kl=d} \sideset{}{''}\sum_{k<m\leqslant l} kF(m,l).$$

Тогда

$$H_1 + H_2 = 2\sum_{kl=d} \sideset{}{''}\sum_{\substack{m\leqslant l\\ m\neq k}} kF(m,l) = 2\sum_{kl=d} \sideset{}{''}\sum_{m\leqslant l} kF(m,l) - \sum_{kl=d} \min(k,l)F(k,l).$$

Во-вторых, замена $(k,l) \to (l,k)$ приводит сумму S_2^{0-+} к виду

$$S_2^{0-+} = \sum_{kl=d} \sum_{k-l<n<k} (k-n-l)F(0,n),$$

следовательно,

$$2S_2^{0++} + 2S_2^{0-+} + S_4^{0++} =$$
$$= 2\sum_{kl=d} \left(\sum_{n<k-l} (k-n-l)F(0,n) + \sum_{k-l<n<k} (k-n-l)F(0,n) - \sum_{n<k} (k-n)F(0,n) \right) =$$
$$= -2\sum_{kl=d} \sum_{n<k} lF(0,n).$$

И, наконец,

$$S_1^{++0} + S_2^{--0} + S_3^{++0} = \sum_{mn=d} F(m,n) \left(\sum_{\substack{l<m\\ l<n}} (m+n-l) - \sum_{\substack{l>m\\ l>n}} (m+n-l) - 2\sum_{l<m} n \right).$$

Вычисляя выражение в скобках при $m \leqslant n$ и при $m > n$, находим, что оно равно $n - mn + \min(0, n - m)$. Поэтому

$$S_1^{++0} + S_2^{--0} + S_3^{++0} = \sum_{mn=d} \big(n - mn + \min(0, n-m)\big) F(m,n) =$$
$$= -\sum_{mn=d} dF(m,n) + \sum_{mn=d} nF(m,n) + \sum_{\substack{mn=d\\ m>n}} (n-m)F(m,n) =$$
$$= -\sum_{mn=d} dF(m,n) + \sum_{\substack{mn=d\\ m\leqslant n}} mF(m,n) + \sum_{\substack{mn=d\\ m>n}} nF(m,n) =$$
$$= -\sum_{mn=d} dF(m,n) + \sum_{mn=d} \min(m,n)F(m,n).$$

Подставляя найденные суммы в (19) и переименовывая единообразно переменные суммирования, получим значение S правой части тождества (9)

$$S = \sum_{mn=d} \left(-dF(m,n) + 2m \sum_{0<s\leqslant n}'' F(s,n) - 2m \sum_{0\leqslant s<n}'' F(0,s) \right) =$$
$$= \sum_{mn=d} \left(-dF(m,n) + 2m \sum_{0\leqslant s\leqslant n}'' \big(F(s,n) - F(s,0)\big) \right),$$

которое в точности совпадает с левой частью. Теорема доказана.

Список литературы

[1] C. G. J. Jacobi, “Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum”, *Gesammelte Werke*. V. 1, Berlin, 1881, 49–239.

[2] C. G. J. Jacobi, “Teoriae der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet”, *Gesammelte Werke*. V. 1, Berlin, 1881, 497–538.

[3] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*. V. 1, Berlin, 1881.

[4] C. F. Gauss, *Gauss Werke II*, Göttingen, 1863.

[5] R. Fricke, *Die Elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*. V. 1, Springer, Berlin, 2011.

[6] A. O. L. Atkin , P. Swinnerton-Dyer, “Some properties of partitions”, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **4** (1954), 84–106.

[7] B. Gordon, “Some identities in combinatorial analysis”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **12** (1961), 285–290.

[8] G. N. Watson, “Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on a continued fraction”, *J. London Math. Soc.*, **4** (1929), 39–48.

[9] А. А. Клячко, “Модулярные формы и представления симметрических групп”, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, **116** (1982), 174–185.

[10] Н. В. Бударина, В. А. Быковский, “Арифметическая природа тождеств для тройного и пятикратного произведений”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:2 (2011), 140–148.

[11] H. M. Weber, *Lehrbuch der Algebra*. V. 3, Braunschweig, 1908.

[12] А. Вейль, *Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру*, Мир, Москва, 1978.

[13] В. Г. Кац, П. Чен, *Квантовый анализ*, МЦНМО, Москва, 2005, 128 с.

[14] В. Г. Кац, *Вертексные алгебры для начинающих*, МЦНМО, Москва, 2005, 200 с.

[15] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers.* V. 2, Chelsea Pub. Co., New York, 1952.

[16] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York and London, 1939.

[17] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ НКПТ СССР, Москва, Ленинград, 1937, 222 с.

[18] Kenneth S. Williams, *Number theory in the spirit of Liouville.* V. 76, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2011.

[19] В.А̇. Быковский, М. Д. Монина, “Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **13**:1 (2013), 15–34.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 октября 2015 г.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335).

Romanov M. A. Arithmetic essence of octuple product identity. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 69–82.

ABSTRACT

In the paper a new proof of octuple product identity is offered using simple arithmetic methods.

Key words: *octuple product identity, Liouville's identities, triple product identity, quintuple product identity.*