Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 83–95

УДК 514.76
MSC2010 53A17

© Г. А. Султанова[1]

О размерностях алгебр Ли автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой

В работе получены точные оценки размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда база является проективно-евклидовой.

Ключевые слова: *дифференцируемое многоообразие, касательное расслоение, полный лифт линейной связности, проективно-евклидово пространство с линейной связностью, инфинитезимальное аффинное преобразование, алгебра Ли инфинитезимальных аффинных преобразований.*

Введение

Геометрия касательных расслоений над дифференцируемым многообразием M является одним из интенсивно развивающихся направлений теории расслоенных пространств. Впервые расслоения p^v-струй высших порядков, к числу которых относятся и касательные расслоения, были построены С. Эресманом. Позже А. Вейль заметил, что касательные расслоения могут быть включены в общую теорию расслоения "близких точек" над локальными алгебрами. К этому кругу вопросов относятся работы А. Моримото [1].

Первые результаты по теории касательных расслоений принадлежат Ш. Сасаки, К. Яно, С. Ишихара [2]. Среди отечественных ученых касательные расслоения исследовали А. П. Широков, В. В. Вишневский, В. В. Шурыгин, Б. Н. Шапуков и их ученики.

А. П. Широковым обнаружены структуры многообразий над алгебрами на касательных расслоениях и расслоениях "близких точек" в смысле А. Вейля [3].

[1]Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет, 681000, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Кирова, д. 17, корп. 2. Электронная почта: sultgaliya@yandex.ru

В. В. Шурыгиным рассмотрены алгебраические структуры более общего вида при изучении расслоений струй и затем многообразий над локальными алгебрами А. Вейля [4]. В. В. Вишневским введены полукасательные расслоения k-го порядка [5]. Б. Н. Шапуковым был построен полный лифт линейной связности на тензорных расслоениях [6].

Цикл исследований по геометрии касательных расслоений осуществил Ф. И. Каган. Им подробно изучены аффинорные структуры, общие инфинитезимальные связности на касательном расслоении TM [7].

Большое значение при исследовании автоморфизмов обобщенных пространств имеет вопрос об инфинитезимальных преобразованиях связностей в этих пространствах. Впервые данный вопрос был поставлен в 1927 году П. Эйзенгардтом и М. С. Кнебельманом. Начиная с 30-х годов П. А. Широковым исследовались движения симметрических проективно-евклидовых пространств аффинной связности. Глубокие результаты при исследовании групп движений пространств аффинной связности, проективной связности получил И. П. Егоров. Движениями в различных обобщенных пространствах занимались К. Яно, Г. Вранчану, А. З. Петров, А. В. Аминова и др.

Особое внимание было уделено движениям и автоморфизмам касательных расслоений. Инфинитезимальные аффинные коллинеации и изометрии рассматривали К. Сато и Ш. Танно. К. Сато [8] указал общий вид инфинитезимального аффинного преобразования в TM с метрикой Сасаки. Ш. Танно [9] получил общее выражение для инфинитезимальной изометрии в TM с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки. Инфинитезимальные аффинные коллинеации в касательных расслоениях с синектической связностью рассматривались Х. Шадыевым [10].

В настоящее время вопрос о движениях расслоенных пространств рассматривается в работах А. Я. Султанова, Н. А. Осьмининой, О.А̇. Монаховой и др.

А. Я. Султановым исследуются инфинитезимальные преобразования расслоения линейных реперов со связностью полного лифта, алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей в произвольных расслоениях Вейля [11], [12]. Работы Н. А. Осьмининой посвящены инфинитезимальным аффинным преобразованиям касательного расслоения второго порядка с синектической связностью. О. А. Монаховой исследуются инфинитезимальные аффинные преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта.

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что тема настоящей работы актуальна.

В данной статье исследуются инфинитезимальные аффинные преобразования касательных расслоениий TM, снабженных полными лифтами $\nabla^{(0)}$ линейных связностей ∇ без кручения, при условии, что база M является эквипроективным пространством, не сводящимся к евклидовому пространству. Основной результат работы состоит в установлении размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$. Доказана теорема.

Теорема. Максимальная размерность алгебр Ли $\tilde{L}(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой (M, ∇), тензор Риччи которой симметрический, равна $2n^2 + 1$.

1. Основные понятия

Пусть M — связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, A — алгебра дуальных чисел $R(\varepsilon) = \{a_0\varepsilon^0 + a_1\varepsilon^1 | a, b \in R, \varepsilon^0 = 1, (\varepsilon^1)^2 = 0\}$, A^* — пространство линейных форм, заданных на A со значениями в R, $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ — дуальный базис к базису $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$. Выберем произвольную точку $p \in M$ и координатную окрестность (U, x^i) многообразия M такую, чтобы $p \in U$. На U возникает естественный подвижной репер (∂_i), где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ и дуальный ему корепер $(dx^i)(i = 1, 2, \dots, n)$, связанные между собой соотношениями $dx^i(\partial_j) = \delta^i_j$. Возьмем касательные пространства T_pM к многообразию M в точках $p \in M$. Обозначим через TM объединение всех касательных пространств к многообразию M:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM.$$

Отображение $\pi : TM \to M$, определяемое условием $\pi(t_x) = x, t_x \in TM$, называется канонической проекцией, а тройка (TM, π, M) — касательным расслоением над многообразием M. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(\varepsilon^0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM. В дальнейшем функцию $f_{(\varepsilon^0)}$ для упрощения записи будем обозначать через $f_{(0)}$. На TM возникает естественная структура гладкого многообразия над полем действительных чисел, атлас которого состоит из координатных окрестностей вида $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$. Закон преобразования координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \bar{x}_0^i, \bar{x}_1^i)$ имеет вид [2, с. 2]

$$\begin{cases} \bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, \dots, x_0^n), \\ \bar{x}_1^i = (\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k})_{(0)} x_1^k. \end{cases} \tag{1}$$

Приведем определения лифтов некоторых объектов с многообразия M в касательное расслоение TM.

Пусть f — функция класса C^∞, заданная на M. Функция $f_{(\varepsilon^1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в касательное расслоение TM. Функцию $f_{(\varepsilon^1)}$ для упрощения записи будем обозначать через $f_{(1)}$.

Определение 1. *Пусть $a^* = a^\alpha \varepsilon_\alpha (\alpha = 0, 1)$ — произвольный элемент алгебры A^*. a^*-лифтом функции $f \in C^\infty(M)$ называется функция $f_{(a^*)}$, определяемая равенством*

$$f_{(a^*)} = a^\alpha f_{(\alpha)}.$$

Прежде чем дать определение лифтов векторного поля, зададим на A^* внешнюю операцию умножения линейных форм на дуальные числа из A. Пусть $a^* \in A^*, b \in A$. Произведение $a^* \cdot b$ определим условием $a^* \cdot b(c) = a^*(bc)$ для каждого элемента $c \in A$.

Определение 2. *[11] (a)-лифтом векторного поля $X \in \Im^1_0(M)$ называется единственное векторное поле $X^{(a)}$ на TM, удовлетворяющее условию*

$$X^{(a)} f_{(b*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)} \tag{2}$$

для любых $f \in C^\infty(M)$, $a \in A$, $b^* \in A^*$.

В случае, когда $a = \varepsilon^\alpha$, векторное поле $X^{(\varepsilon^\alpha)}$ обозначим $X^{(\alpha)}$. Тогда $X^{(\varepsilon^0)} = X^{(0)}$, $X^{(\varepsilon^1)} = X^{(1)}$. В локальных координатах векторные поля $X^{(1)}$ и $X^{(0)}$ имеют вид

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^1, \qquad X^{(0)} = (X^i)_{(0)}\partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1. \tag{3}$$

Из формул (3) следует $(\partial_i)^{(0)} = \partial_i^0$, $(\partial_i)^{(1)} = \partial_i^1$. Векторные поля $\partial_i^0, \partial_i^1$ образуют подвижной репер в трубчатой окрестности $\pi^{-1}(U)$.

Утверждение 1. *Для любого векторного поля* $X \in \Im_0^1(M)$

$$X^{(a)} = a_\alpha X^{(\alpha)},$$

где $a = a_\alpha \varepsilon^\alpha \quad (\alpha = 0, 1)$ *— произвольный элемент алгебры* A.

Это предложение следует из определения (a)-лифтов векторных полей и свойств (a^*)-лифтов функций.

Пусть на многообразии M задана линейная связность ∇, определяемая в карте (U, x^i) коэффициентами Γ_{ij}^k:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

На многообразии TM существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условию

$$\nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}, \tag{4}$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $a, b \in A$. Такая связность называется полным лифтом линейной связности ∇ [1], [13].

Пусть $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)(\alpha = 0, 1)$ — локальная карта с индуцированной системой координат на расслоении TM. Возьмем векторные поля натурального репера $\partial_i^\alpha (\alpha = 0, 1)$ и положим

$$\nabla^{(0)}_{\partial_i^\alpha} \partial_j^\beta = \Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} \partial_k^\sigma,$$

где $\alpha, \beta, \sigma = 0, 1$. Коэффициенты $\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k}$ определяются равенствами

$$\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} = \gamma_\tau^{\alpha\beta} \gamma_\sigma^{\tau\mu} (\Gamma_{ij}^k)_{(\mu)},$$

где $\gamma_\tau^{\alpha\beta}$ — структурные постоянные алгебры A.

Соответствующие компоненты связности $\nabla^{(0)}$ будут иметь вид

$$\Gamma_{ij0}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{00k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(1)}, \quad \Gamma_{ij1}^{10k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}, \quad \Gamma_{ij1}^{01k} = (\Gamma_{ij}^k)_{(0)}.$$

Все остальные коэффициенты связности равны нулю.

В TM тензорное поле $\tilde{R}$ кривизны связности $\nabla^{(0)} = \tilde{\nabla}$ определяется соотношениями

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \tilde{Z}, \tag{5}$$

где $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \Im_0^1(TM)$.

Найдем составляющие тензора кривизны $\tilde{R}$ связности $\nabla^{(0)}$ относительно естественного подвижного репера (∂_i^α).

Положим
$$\tilde{R}(\partial_j^{(\alpha)}, \partial_k^{(\beta)})\partial_l^{(\sigma)} = R_{ljk\tau}^{\sigma\alpha\beta i}\partial_i^{\tau}.$$

Компоненты $R_{ljk\tau}^{\sigma\alpha\beta i}$ задаются равенствами
$$R_{ljk\tau}^{\sigma\alpha\beta i} = \gamma_{\tau}^{\sigma\alpha\beta v}(R_{ljk}^{i})_{(v)}.$$

Придавая индексам $\alpha, \beta, \sigma, \tau$ значения 0, 1, получим следующие составляющие тензора кривизны:
$$R_{jkl0}^{000i} = (R_{jkl}^{i})_{(0)}, \quad R_{jkl1}^{000i} = (R_{jkl}^{i})_{(1)}, \quad R_{jkl1}^{100i} = (R_{jkl}^{i})_{(0)},$$
$$R_{jkl1}^{010i} = (R_{jkl}^{i})_{(0)}, \quad R_{jkl1}^{001i} = (R_{jkl}^{i})_{(0)}.$$

2. Условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований векторных полей касательного расслоения TM

В настоящей работе будем считать, что линейная связность ∇ не имеет кручения.

Определение 3. *[12] Векторное поле $\tilde{X} \in \Im_0^1(TM)$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности $\nabla^{(0)}$ касательного расслоения TM тогда и только тогда, когда*
$$L_{\tilde{X}}\nabla^{(0)} = 0.$$

В координатной форме это уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка
$$\partial_j^{\alpha}\partial_k^{\beta}X_{\sigma}^{i} + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i}\partial_j^{\alpha}X_{\tau}^{m} + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i}\partial_k^{\beta}X_{\tau}^{m} - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m}\partial_m^{\tau}X_{\sigma}^{i} + X_{\tau}^{m}\partial_m^{\tau}\Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \tag{6}$$

Первую серию условий интегрируемости системы (6) составляет уравнение $L_{\tilde{X}}\tilde{R} = 0$, где $\tilde{R}$ — тензорное поле кривизны связности $\nabla^{(0)}$.

В локальных координатах это уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений от координат векторного поля X и частных производных от этих координат:
$$R_{mkl\sigma}^{\tau\beta\mu i}A_{j\tau}^{\alpha m} + R_{jml\sigma}^{\alpha\tau\mu i}A_{k\tau}^{\beta m} + R_{jkm\sigma}^{\alpha\beta\tau i}A_{l\tau}^{\mu m} - R_{jkl\tau}^{\alpha\beta\mu m}A_{m\sigma}^{\tau i} + X_{\tau}^{m}\partial_m^{\tau}R_{jkl\sigma}^{\alpha\beta\mu i} = 0, \tag{7}$$
где $A_{l\tau}^{\mu m} = \partial_l^{\mu}X_{\tau}^{m}$, а индексы $\alpha, \beta, \sigma, \mu$ принимают значения 0, 1.

Эту систему мы рассмотрим, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования $\tilde{X}$.

Известно, что инфинитезимальное аффинное преобразование $\tilde{X}$ полного лифта линейной связности без кручения ∇ в касательное расслоение TM имеет вид [10]
$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma}, \tag{8}$$

где X, Y — векторные поля, F, G — тензорные поля типа (1,1) на многообразии M, удовлетворяющие равенствам

$$L_X \nabla = 0, \tag{9}$$
$$L_Y \nabla = 0, \tag{10}$$
$$\nabla G = 0, \tag{11}$$
$$\nabla F = 0, \tag{12}$$
$$R \overset{1}{\bullet} G - G \overset{1}{\bullet} R = 0, \tag{13}$$

где свертка $R \overset{1}{\bullet} G$ определяется условием $R \overset{1}{\bullet} G(X, Y, Z) = R(G(X), Y)Z$, а свертка $G \overset{1}{\bullet} R$ — условием $G \overset{1}{\bullet} R(X, Y, Z) = G(R(X, Y)Z)$.

$$R \overset{1}{\bullet} F = F \overset{1}{\bullet} R = 0. \tag{14}$$

Векторное поле γG называется вертикально-векторным поднятием аффинора G и в локальных координатах определяется условием

$$\gamma G = \left(G_i^j\right)_{(0)} x_1^i \partial_j^1.$$

Векторное поле $F^{H\gamma}$, в локальных координатах имеющее вид

$$F^{H\gamma} = (F_i^j)_{(0)} x_1^i D_j,$$

где $D_j = \partial_j^0 - (\Gamma_{js}^p)_{(0)} x_1^s \partial_p^1$, есть горизонтально-векторное поднятие аффинора F [9, с. 139].

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Обозначим через $\tilde{L}$ алгебру Ли векторных полей вида (8), а через $L^\alpha (\alpha = 0, 1)$ — множество векторных полей вида $X^{(\alpha)}$, L^2 — совокупность векторных полей вида γG, L^3 — множество векторных полей вида $F^{H\gamma}$, входящих в разложение (8).

Из равенств (10)–(14) следует, что каждое из множеств $L^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ замкнуто относительно операции сложения и умножения на скаляр из R, то есть является векторным пространством. Причем, векторное пространство $\tilde{L}$ представляет собой прямую сумму подпространств L^0, L^1, L^2, L^3. Поэтому

$$\dim_R \tilde{L} = \dim_R L^0 + \dim_R L^1 + \dim_R L^2 + \dim_R L^3.$$

Утверждение 2. *[14] Подпространства L^0, L^1, L^2, L^3 являются подалгебрами алгебры Ли $\tilde{L}$, причем размерности алгебр Ли L^0 и L^1 равны и равны размерности группы аффинных преобразований базового пространства (M, ∇).*

Рассмотрим первую серию условий интегрируемости (7) системы (6) с учетом разложения (8). Подставив (8) в (7) и исключая следствия из этой системы, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
R^i_{mkl}\partial_j X^m + R^i_{jml}\partial_k X^m + R^i_{jkm}\partial_l X^m - R^m_{jkl}\partial_m X^i + X^m\partial_m R^i_{jkl} = 0,\\
R^i_{mkl}\partial_j Y^m + R^i_{jml}\partial_k Y^m + R^i_{jkm}\partial_l Y^m - R^m_{jkl}\partial_m Y^i + Y^m\partial_m R^i_{jkl} = 0,\\
R^m_{jkl}F^i_m = 0,\\
R^i_{mkl}F^m_j = 0,\\
R^i_{jml}F^m_k = 0,\\
R^i_{jkm}F^m_l = 0,\\
R^i_{mkl}G^m_j - R^m_{jkl}G^i_m = 0,\\
R^i_{mkl}G^m_j - R^i_{jml}G^m_k = 0,\\
R^i_{mkl}G^m_j - R^i_{jkm}G^m_l = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Систему (15) можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
L_X R = 0,\\
L_Y R = 0,\\
R \overset{1}{\bullet} F = R \overset{2}{\bullet} F = R \overset{3}{\bullet} F = F \overset{1}{\bullet} R = 0,\\
R \overset{1}{\bullet} G = R \overset{2}{\bullet} G = R \overset{3}{\bullet} G = G \overset{1}{\bullet} R.
\end{gathered} \tag{16}$$

Первые два уравнения системы (16) являются условиями интегрируемости для уравнений (9), (10), а последние равенства совпадают с условиями (13), (14) разложения (8) соответственно.

3. Оценка размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований с проективно-евклидовой базой

В этом пункте оценим размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM в том случае, когда база M является эквипроективным пространством.

Приведем определение проективно-евклидового пространства. Пусть M — связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n.

Определение 4. *[15] Пространство аффинной связности (M, ∇) называется проективно-евклидовым, если в некоторой окрестности каждой точки $x_0 \in M$ можно перейти в такую координатную систему x^i, в которой геодезические линии задаются линейными параметрическими уравнениями*

$$x^i = a^i t + b^i \; (a^i, b^i = const).$$

Утверждение 3. *[16] Пространство аффинной связности (M, ∇) $(n > 2)$ является проективно-евклидовым тогда и только тогда, когда тензорное поле Вейля, определяемое равенством*

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \frac{1}{n+1}\delta^h_i R_{[jk]} - \frac{1}{n^2-1}[(nR_{ij} + R_{ji})\delta^h_k - (nR_{ik} + R_{ki})\delta^h_j], \tag{17}$$

равно нулю, где $R_{[jk]} = R_{jk} - R_{kj}$, а $R_{ij} = R^k_{ijk}$ — тензорное поле Риччи.

Если $W^h_{ijk} = 0$, то компоненты тензора кривизны R связности ∇ удовлетворяют соотношениям

$$R^h_{ijk} = -\frac{1}{n+1}\delta^h_i R_{[jk]} + \frac{1}{n^2-1}[(nR_{ij} + R_{ji})\delta^h_k - (nR_{ik} + R_{ki})\delta^h_j]. \tag{18}$$

Тензорное поле Риччи можно представить в виде суммы симметрической и антисимметрической частей, т.е.

$$R_{ij} = c_{ij} + a_{ij},$$

где $c_{ij} = R_{(ij)},\ a_{ij} = R_{[ij]}$.

И. П. Егоров в работе [17] доказал, что не существует проективно-евклидовых пространств с антисимметрическим тензорным полем Риччи. Следовательно, проективно-евклидово пространство линейной связности может быть либо с симметричным, либо с несимметричным тензорным полем Риччи, не сводящимся к антисимметрическому тензору.

Если пространство эквипроективно, то есть проективно-евклидово, и тензор Риччи R_{ij} симметрический, то из (18) следует, что

$$R^h_{ijk} = \frac{1}{n-1}(R_{ij}\delta^h_k - R_{ik}\delta^h_j). \tag{19}$$

Подставляя R^h_{ijk} в $L_X R^h_{ijk} = 0$, получим

$$R_{sj}X^s_i + R_{is}X^s_j + X^s\partial_s R_{ij} = 0. \tag{20}$$

Будем считать, что выбрана такая система координат на M, что тензор Риччи приведен к каноническому виду. При этом, если ранг R_{ij} равен m, то $R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{mm}$ отличны от нуля, а остальные компоненты равны нулю.

Оценим размерность пространств L^0 и L^1. Известно [17], что максимально подвижные пространства линейной связности с симметрическим тензором Риччи ранга m обладают транзитивными группами движений порядка $r = n^2 + n - mn + m(m-1)/2$.

Рассмотрим эквипроективное пространство (R^n, ∇), определенное коэффициентами связности

$$\Gamma^1_{1n} = \Gamma^2_{2n} = \cdots = \Gamma^{n-1}_{n-1n} = \frac{1}{2}\Gamma^n_{nn} = a,$$

где a — постоянная, отличная от нуля, другие $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0$, тензор Риччи которого $R_{nn} = -a^2,\ R_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Первая серия условий интегрируемости $L_X R = 0$ уравнений движений

$$\partial_k \partial_s X^r + X^j \partial_j \Gamma^r_{ks} - \partial_j X^r \Gamma^j_{ks} + \partial_s X^j \Gamma^r_{kj} + \partial_k X^j \Gamma^r_{js} = 0$$

представляется в виде следующих соотношений:

$$X^n_1 = 0\ ,\ X^n_2 = 0\ ,\ ..., X^n_{n-1} = 0\ , X^n_n = 0\ .$$

Эквипроективное пространство (R^n, ∇), определенное данными коэффициентами связности, допускает полную группу движений точно порядка n^2.

Инфинитезимальные аффинные преобразования этого пространства имеют вид

$$x^\alpha \partial_i, \partial_\alpha, (\alpha = 1, ..., n, i = 1, ..., n-1). \tag{21}$$

Отсюда следует

Теорема 1. *[17] Максимально подвижные пространства (R^n, ∇) линейной связности ненулевой кривизны обладают транзитивными группами движений, порядок которых точно равен n^2.*

Тогда $\dim L^0 + \dim L^1 = 2n^2$.

Оценим размерность подалгебры L^2. Для этого рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla G = 0$, где $G \in \Im^1_1(M)$, равносильного системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_j G^i_k - G^i_p \Gamma^p_{kj} + G^p_k \Gamma^i_{pj} = 0. \tag{22}$$

Утверждение 4. *[14] Первая серия условий интегрируемости системы дифференциальных уравнений (22) имеет вид*

$$G^s_k R^i_{sjl} - G^i_s R^s_{kjl} = 0.$$

Учитывая строение тензора кривизны проективно-евклидовых пространств, приходим к соотношениям

$$G^s_k (\delta^i_l R_{sj} - \delta^i_j R_{sl}) - G^i_s (\delta^s_l R_{kj} - \delta^s_j R_{kl}) = 0$$

или, раскрыв скобки, к соотношениям

$$(G^s_k \delta^i_l R_{sj} - G^i_l R_{kj}) - (G^s_k \delta^i_j R_{sl} - G^i_j R_{kl}) = 0.$$

Из системы (16) возьмем равенство

$$G^s_j R^i_{ksl} - G^i_s R^s_{kjl} = 0.$$

Учитывая равенство (19), получаем следующее соотношение:

$$\delta^i_l G^s_j R_{ks} - G^i_l R_{kj} = 0. \tag{23}$$

Свернув данное равенство по индексам i и l и приняв во внимание, что $g = G^s_s$, приходим к равенству

$$nG^s_j R_{ks} - gR_{kj} = 0,$$

откуда

$$G^s_j R_{ks} = \frac{1}{n} g R_{kj}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23), получим

$$\left(\frac{1}{n}\delta^i_l g - G^i_l\right) R_{kj} = 0. \tag{25}$$

Так как для тензорного поля Риччи найдется компонента $R_{kj} \neq 0$, то будем иметь

$$G^i_l = \frac{1}{n} g \delta^i_l.$$

Подставив найденные компоненты G^i_l в систему (22), получим, что $\partial_k g = 0$, следовательно, g — произвольная постоянная.

Таким образом, размерность алгебры Ли решений уравнения $\nabla G = 0$ равна 1, то есть

$$\dim L^2 = 1.$$

Оценим размерность подалгебры L^3. Рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla F = 0$, равносильного в локальных координатах системе дифференциальных уравнений первого порядка $\partial_j F^i_k - F^i_p \Gamma^p_{kj} + F^p_k \Gamma^i_{pj} = 0$. Условия интегрируемости данной системы имеют вид

$$F^s_k R^i_{sjl} = 0, \quad F^s_j R^i_{ksl} = 0, \quad F^s_l R^i_{kjs} = 0, \quad F^i_s R^s_{kjl} = 0. \tag{26}$$

Свернув первые два равенства системы (26) по индексам i, l, получим

$$F^s_k R_{sj} = 0, F^s_j R_{ks} = 0. \tag{27}$$

С учетом соотношения (19) равенство $F^s_l R^i_{kjs} = 0$ примет вид

$$F^s_l (R_{kj}\delta^i_s - R_{ks}\delta^i_j) = 0.$$

На основании (27) получим, что $F^i_l R_{kj} = 0$.

В данном равенстве для тензорного поля Риччи найдется компонента $R_{kj} \neq 0$, поэтому $F^i_l = 0$. Следовательно, размерность алгебры Ли решений уравнения $\nabla F = 0$ равна нулю, то есть

$$\dim L^3 = 0.$$

Таким образом, разложение инфинитезимального аффинного преобразования в касательном расслоении со связностью полного лифта в том случае, когда база проективно-евклидова, будет иметь вид

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G,$$

где $X, Y \in \Im^1_0(M),\ G \in \Im^1_1(M)$.

Для получения базисных векторных полей алгебр L^0 и L^1 найдем полные и вертикальные лифты векторных полей (21). Полные лифты инфинитезимальных аффинных преобразований (21) представляются следующим образом:

$$x_0^\alpha \partial_i^0 + x_1^\alpha \partial_i^1\ ,\ \partial_i^0\ (\alpha = 1, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, n-1).$$

Вертикальные лифты инфинитезимальных аффинных преобразований (21) будут иметь вид

$$x_0^\alpha \partial_i^1\ ,\ \partial_i^1\ (\alpha = 1 \ldots, n,\ i = 1 \ldots, n-1).$$

Базис алгебры $L^2(R^n)$ составляют векторные поля вида

$$x_1^k \partial_k^1, \quad (k = 1 \ldots, n).$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Максимальная размерность алгебр Ли $\tilde{L}(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $(TM, \nabla^{(0)})$ со связностью полного лифта над проективно-евклидовой базой (M, ∇), тензор Риччи которой симметрический, равна $2n^2 + 1$.*

4. Анализ размерностей алгебр Ли автоморфизмов пространств TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$

В пункте 2 было показано, что размерность группы движений пространства аффинной связности зависит от строения тензора кривизны этого пространства. Все аффинные связности, заданные на M, можно разбить на два непересекающихся класса: непроективно-евклидовы связности и класс проективно-евклидовых связностей.

В работе [14] установлена максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств $(TM, \nabla^{(0)})$ над непроективно-евклидовой базой. Доказано, что если связность ∇ непроективно-евклидова и тензорное поле кривизны R имеет в некоторой координатной окрестности отличную от нуля составляющую вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$, где индексы i_1, i_2, i_3 попарно различны, то максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ равна точно $4n^2 - 9n + 14$.

Сравним максимальные размерности групп движений касательных расслоений TM со связностью полного лифта $\nabla^{(0)}$ для тех случаев, когда связность ∇ не является проективно-евклидовой, и расслоений TM со связностями полного лифта над проективно-евклидовой базой (M, ∇):

$$(4n^2 - 9n + 14) - (2n^2 + 1) = 2n^2 - 9n + 13 = 2(n-3)^2 + 3n - 5 > 0$$

при $n > 2$. Таким образом, при $n > 2$ справедливо неравенство

$$4n^2 - 9n + 14 > 2n^2 + 1.$$

Если тензор Риччи не является симметрическим, то максимальная размерность алгебр Ли равна $2n^2 - 2n + 3 < 2n^2 + 1$ при $n \geq 2$.

На основании полученных результатов мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *В пространствах* $(TM, \nabla^{(0)})$ *максимальная размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований над непроективно-евклидовой базой* M *больше максимальной размерности алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований в том случае, когда* M *является проективно-евклидовым пространством.*

Список литературы

[1] A. Morimoto, "Prolongation of connections to bundles of infinitely near points", *Diff. Geom.*, **11** (1976), 479–498.

[2] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[3] А. П. Широков, "Замечание о структурах в касательных расслоениях", *Тр. Геом. семин.*, **5** (1974), 311–318.

[4] В. В. Шурыгин, "Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **73** (2002), 162–236.

[5] В. В. Вишневский, "Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **73** (2002), 5–64.

[6] Б. Н. Шапуков, "Лифт связности на тензорных расслоениях", *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 12, 70–72.

[7] Ф. И. Каган, "Римановы метрики в касательном расслоении над римановым многообразием, I", *Изв. вузов. Матем.*, 1973, № 6, 42–51.

[8] K. Sato, "Infinitesimal affine transformations of the tangent bundles with Sasaki metric", *Tohoku Math*, **26**:3 (1974), 353–361.

[9] S. Tanno, "Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric", *Tensor, N.S.*, **28** (1974), 139–144.

[10] Х. Шадыев, "Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении", Тр. геом. сем., **16**, Изд-во Казанского ун-та, Казань, 1984, 117—127.

[11] А. Я. Султанов, "Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля", *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 9, 64–72.

[12] А. Я. Султанов, "Дифференцирование линейных алгебр и линейные связности", *Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Соврем. мат. и ее прил. Тематические обзоры*, 2009, № 123, 142–210.

[13] A. Morimoto, "Prolongation of connections to tangent bundles of higher order", *Nagoya Math.*, **40** (1970), 99–120.

[14] А. Я. Султанов, Г. А. Султанова, "Оценка размерностей алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта", *Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, **156**:2 (2014), 43–54.

[15] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1967.

[16] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1979.

[17] И. П. Егоров, *Движения в пространствах аффинной связности*, Либроком, Москва, 2009.

[18] А. П. Широков, "Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами", *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **12** (1981), 61–95.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 16 февраля 2015 г.

Sultanova G. A. The dimensions of the Lie algebra of automorphisms in tangent bundles with a complete lift connection with projective-Euclidean base. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 83–95.

ABSTRACT

In this paper we obtained exact estimates of dimension of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations in tangent bundles with projective-Euclidean base with a complete lift connection.

Key words: *differentiable manifold, tangent bundle, complete lift of linear connection, projective-Euclidean space with linear connection, infinitesimal affine transformation, Lie algebra of infinitesimal affine transformation.*