Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 1. С. 96–110

УДК 517.956.27
MSC2010 35R30, 86A22

© А. В. Чернов[1]

О единственности решения обратной задачи определения параметров в старшем коэффициенте и правой части эллиптического уравнения

Для обратной задачи определения конечного набора числовых параметров в старшем коэффициенте и в правой части линейного эллиптического уравнения второго порядка получены достаточные условия единственности решения.

Ключевые слова: *обратная параметрическая задача, старший коэффициент, линейное эллиптическое уравнение второго порядка, задача Дирихле.*

Введение

Исследуется обратная задача определения конечного набора числовых параметров, входящих нелинейно в старший коэффициент и в правую часть линейного эллиптического уравнения второго порядка, известного как *уравнение диффузии–реакции*, с граничным условием Дирихле. Набор неизвестных числовых параметров требуется определить исходя из результатов наблюдения решения уравнения в окрестностях набора точек, соответствующего этим параметрам по их количеству. Задача указанного типа возникает при изучении электрических процессов, протекающих в грозовом облаке, на основе данных наблюдений, полученных с локальных датчиков. Выявлены достаточные условия единственности решения обратной задачи. Проблема единственности решения обратной задачи здесь очень важна с физической точки зрения, так как требуется однозначно установить истинные, реальные значения неизвестных параметров в то время, как существование решения естественно ожидать из физических соображений.

[1]Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23; Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24. Электронная почта: chavnn@mail.ru

Отметим, что проблема однозначного определения старшего коэффициента эллиптических уравнений по данным наблюдений того или иного типа уже достаточно давно привлекает внимание исследователей. Приведем краткий обзор тех работ, которые наиболее близки по тематике к материалу данной статьи. В [1] доказывается теорема существования и единственности решения следующей задачи: найти функции u и a в области $D \subset \mathbb{R}^n$ так, чтобы

$$-a \cdot \Delta u + c \cdot u = h \quad \text{в} \quad D,$$

$$u\Big|_{\partial D} = f, \qquad a\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\Big|_{S} = g,$$

где S — заданная поверхность в D. Таким образом, здесь неизвестный старший коэффициент входит также и в граничное наблюдение. В [2] рассматривается уравнение с равномерно эллиптическим дифференциальным оператором

$$-\nabla\big(a(x_1)\nabla u\big) + b(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + c(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_2} + d(x_1)u = -p(x)f(x_1),$$

$$x = (x_1, x_2) \in D, \quad d(x_1) \leq 0,$$

при граничных условиях

$$u(x) = \psi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \psi_2(x), \quad x \in \partial D.$$

Исследуется обратная задача, состоящая в том, чтобы найти C^2-решение $u(x)$ и один из коэффициентов a, b, c, d, f, когда остальные заданы. Доказывается, что такая обратная задача не может иметь более одного решения.

В работах [3, 4] рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение; старший коэффициент зависит только от состояния (решения краевой задачи). Одним из условий, при наличии которого доказывается единственность решения обратной задачи, является малость области по мере. Имеет смысл отметить также следующие две работы. В [5] предлагается оригинальный метод исследования большого класса обратных задач для дифференциальных уравнений. Метод основан на сведении обратной задачи к интегро-дифференциальному неравенству, к которому применяется взвешенная априорная оценка карлемановского типа. Метод не зависит от типа и порядка уравнения и предполагает лишь достижимость карлемановской оценки. В [6] дается общая теорема единственности для задачи отыскания неизвестного коэффициента и решения общего дифференциального уравнения на основе наблюдения решения и некоторых его производных на некотором многообразии.

В случае, когда единственность решения задачи определения старшего коэффициента установить не удается (задача некорректна), как правило, используется регуляризация соответствующей ей экстремальной задачи. Такой подход применяется, в частности, в работе [7], посвященной задаче определения старшего коэффициента уравнения диффузии–реакции (такого же, как и в данной статье) на основе данных наблюдения в подобласти области независимых переменных. А именно доказывается единственность решения регуляризованной обратной экстремальной задачи, связанной с уравнением

$$-\mathrm{div}\,(\lambda\nabla\varphi)+\kappa\varphi=f,\quad \varphi\Big|_{\Gamma}=\psi,$$

в области D размерности 2 или 3 с границей Г. Здесь $\lambda=\lambda(x)>0$ — коэффициент диффузии, $\kappa=\kappa(x)\geq 0$ — коэффициент, характеризующий распад загрязняющего вещества за счет химических реакций, $f(x)$ — плотность объемных источников, φ — концентрация. Наблюдение производится в подобласти $Q\subset D$. Задача определения старшего коэффициента заменяется экстремальной задачей:

$$J(\varphi,\lambda)=\frac{\mu_0}{2}\|\varphi-\varphi_d\|^2_{L_2(Q)}+\frac{\mu_1}{2}\|\lambda\|^2_{H^2(D)}\to\min,$$

при ограничениях, равносильных краевой задаче; φ_d — данные наблюдений. Доказывается, что при определенном выборе коэффициентов μ_0, $\mu_1>0$ экстремальная задача имеет единственное решение. Понятно, что это, вообще говоря, не означает единственности решения исходной обратной задачи.

Отметим, наконец, сравнительно недавние работы [8, 9, 10], в которых доказывалась единственность решения задач об определении младших коэффициентов эллиптических уравнений. Там же см. дополнительную библиографию.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 1 приводится общая постановка прямой и обратной задачи, а также основные обозначения и соглашения. Раздел 2 содержит некоторые предварительные утверждения, относящиеся к общей постановке, описанной в разделе 1, но основанные на достаточно простых рассуждениях. Тем не менее, сами эти рассуждения представляют определенный интерес, поскольку позволяют обнаружить замечательный факт: для решения обратной задачи может не понадобиться решать прямую задачу – см. замечание 2. В разделе 3 рассматривается более конкретная ситуация (по сравнению с разделом 1) и формулируется центральный результат статьи — теорема 5. Доказательство ее гораздо менее тривиально, чем доказательства предварительных утверждений. Оно проводится в разделе 4 и основано на утверждениях раздела 2 и (в некотором смысле) на идее доказательства теоремы 1.1 из [11, глава 5], касающейся необходимых и достаточных условий управляемости сосредоточенных линейных систем.

1. Постановка задачи

Пусть $n\geq 2$ — заданное натуральное число, область $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ ограничена и строго липшицева[1]. Через $L^+_\infty(\Pi)$ будем обозначать класс всех неотрицательных функций из $L_\infty(\Pi)$; $\mathbb{R}^n_+$ — множество всех векторов из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными компонентами. Пусть заданы число $s\in\mathbb{N}$ и выпуклое множество $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^s$ неизвестных параметров v, подлежащих определению. Для числа $\gamma>0$ обозначим $\mathcal{A}(\gamma)$ класс всех матричных функций $A=A(.)=\{a_{ij}(.)\}^n_{i,j=1}\in L^{n\times n}_\infty(\Pi)$, удовлетворяющих

[1] Для этого достаточно выпуклости, см. [12, с.30-31].

условию $A(t)\xi\cdot\xi \ge \gamma\,|\xi|^2$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$, п.в. $t\in\Pi$ (здесь “ $\cdot$ ” означает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$). Определим класс $\mathbb{A}$ всех матричных функций $A(t,v):\Pi\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ таких, что: $A(.,v)\in\mathcal{A}(\gamma)$ для всех $v\in\mathcal{D}$; производная $A'_v(t,v)$ ограничена на ограниченных множествах и измерима[2]. Определим также класс $\mathbb{F}$ всех функций $f(t,v):\Pi\times\mathcal{D}\to\mathbb{R}$, вместе с производной $f'_v(t,v)$ измеримых по $t\in\Pi$, непрерывных по $v\in\mathcal{D}$ и удовлетворяющих условию $f(.,v)\in L_2(\Pi)$ для всех $v\in\mathcal{D}$.

Для $A\in\mathbb{A}$, $b\in L^+_\infty(\Pi)$, $f\in\mathbb{F}$ рассмотрим однородную задачу Дирихле для управляемого эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\operatorname{div}\big(A(t,v)\nabla x(t)\big)+b(t)x(t)=f\big(t,v\big),\ t\in\Pi,\ v\in\mathcal{D};\quad x\Big|_{\partial\Pi}=0. \tag{1}$$

Решение задачи (1) понимаем в обобщенном смысле, а именно – как функцию $x\in H^1_0(\Pi)$, удовлетворяющую для всех $\omega\in H^1_0(\Pi)$ интегральному тождеству

$$B\{v\}[x,\omega]=\mathcal{F}\{v\}[\omega], \tag{2}$$

где приняты обозначения

$$B\{v\}[x,\omega]\equiv\int\limits_\Pi\big[A(.,v)\nabla x\cdot\nabla\omega+bx\omega\big]\,dt,\ \mathcal{F}\{v\}[\omega]\equiv\int\limits_\Pi f\big(t,v\big)\,\omega(t)\,dt.$$

Основываясь на теореме Лакса–Мильграма, нетрудно доказать, что для всех $v\in\mathcal{D}$ задача (1) имеет единственное решение $x=x[v]\in H^1_0(\Pi)$.

Далее будем считать, что заданы непересекающиеся подобласти $\Pi_j\subset\Pi$, $j=\overline{1,s}$, и на каждой из них наблюдается решение $x=\overline{x}(t)$. При этом предполагается, что разность $\Pi\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{s}\Pi_j$ не пуста и имеет ненулевую меру. Более того, при фиксированном s меры множеств Π_j, $j=\overline{1,s}$, положительны, но могут быть сколь угодно малы. Решается следующая обратная задача: по данным наблюдений $x=x[v](t)=\overline{x}(t)$, $t\in\Pi_j\subset\Pi$, $j=\overline{1,s}$, восстановить значения неизвестных параметров $v\in\mathcal{D}$. Таким образом, на s неизвестных параметров приходится s результатов локальных наблюдений. Существование решения ожидается исходя из физических соображений. Требуется установить единственность решения обратной задачи.

2. Общие признаки единственности решения обратной задачи

Для $j\in\overline{1,s}$ обозначим $\mathcal{H}_j$ — множество всех функций $\omega_j\in H^1_0(\Pi)$, сужение которых на область Π_j принадлежит пространству $H^1_0(\Pi_j)$, и, более того, $\omega_j\equiv 0$ на $\Pi\setminus\Pi_j$. При заданных $\omega_j\in\mathcal{H}_j$, $j=\overline{1,s}$, определим функции

$$F_j[\omega_j](v)=\int\limits_{\Pi_j}\Big\{A(.,v)\nabla\overline{x}\cdot\nabla\omega_j-f(.,v)\omega_j\Big\}(t)\,dt,\quad j=\overline{1,s}.$$

[2]Следовательно, $A'_{v_j}(.,v)\in L^{n\times n}_\infty(\Pi)$ для всех $v\in\mathcal{D}, j=\overline{1,s}$.

Определим также вектор-функции $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^s$ формулой

$$F = F[\vec{\omega}] = \mathrm{col}\,(F_1[\omega_1], \ldots, F_s[\omega_s]), \quad \vec{\omega} = \mathrm{col}\,(\omega_1, \ldots, \omega_s) \in \mathcal{H},$$

где $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \times \ldots \times \mathcal{H}_s$.

Теорема 1. *Пусть при некотором $\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ оказалось, что скалярное произведение*

$$\big(F[\vec{\omega}](\xi) - F[\vec{\omega}](\eta)\big) \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}, \quad \xi \neq \eta. \tag{3}$$

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

Доказательство. Рассуждая от противного, предположим, что нашлось два решения обратной задачи: $\upsilon = \xi$ и $\upsilon = \eta$, $\xi \neq \eta$. Соответствующие им решения прямой задачи обозначим как $x[\xi] = x$ и $x[\eta] = y$. Последнее означает, что выполняются интегральные тождества:

$$\int\limits_{\Pi} \big[A(.,\xi)\nabla x \cdot \nabla\omega + bx\omega\big]\,dt = \int\limits_{\Pi} f\big(t,\xi\big)\,\omega(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\Pi} \big[A(.,\eta)\nabla y \cdot \nabla\omega + by\omega\big]\,dt = \int\limits_{\Pi} f\big(t,\eta\big)\,\omega(t)\,dt$$

для всех $\omega \in H_0^1(\Pi)$. Зафиксируем произвольно индекс $j \in \overline{1,s}$. Подставляя $\omega = \omega_j$ и учитывая, что $x(t) = y(t) = \overline{x}(t)$ на Π_j, получаем

$$F_j[\omega_j](\xi) = F_j[\omega_j](\eta) = \alpha_j[\omega_j], \quad \alpha_j[\omega_j] \equiv -\int\limits_{\Pi_j} b(t)\overline{x}(t)\omega_j(t)\,dt.$$

Таким образом, $F[\vec{\omega}](\xi) - F[\vec{\omega}](\eta) = 0$. Но это противоречит условию (3). Теорема доказана. □

Замечание 1. *Положим $\vec{\alpha}[\vec{\omega}] = \mathrm{col}\,(\alpha_1[\omega_1], \ldots, \alpha_s[\omega_s])$. Условие (3) означает, что оператор $F[\vec{\omega}](.)$ является строго монотонным. Это естественное условие для обеспечения единственности решения уравнения $F[\vec{\omega}](\upsilon) = \vec{\alpha}[\vec{\omega}]$, $\upsilon \in \mathcal{D}$.*

Замечание 2. *Как уже было сказано выше, мы предполагаем, что решение обратной задачи $\overline{\upsilon}$ существует. Тем не менее, оно, как правило, неизвестно. Как видно из доказательства теоремы 1, при выполнении ее предположений обратная задача эквивалентна системе нелинейных уравнений*

$$F_j[\omega_j](\upsilon) = \alpha_j[\omega_j], \quad j = \overline{1,s}; \quad \upsilon \in \mathcal{D}. \tag{4}$$

Решение системы (4) существует согласно предположению о разрешимости исследуемой обратной задачи. Кроме того, из условия (3) теоремы 1 следует единственность этого решения. Таким образом, обратная задача преобразуется в систему (4), а для ее решения требуется знать лишь данные наблюдений $\overline{x}$, которые известны.

Замечание 3. *Для решения системы нелинейных уравнений вида* (4) *на практике, как правило, используется метод наименьших квадратов, суть которого состоит в том, чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений левых частей от правых. Иначе говоря, система* (4) *сводится к задаче оптимизации*

$$\mathcal{J}[\upsilon] = \sum_{j=1}^{s} \Big\{ F_j[\omega_j](\upsilon) - \alpha_j[\omega_j] \Big\}^2 \to \min_{\upsilon \in \mathcal{D}} . \tag{5}$$

В случае $\mathcal{D} = \mathbb{R}^s$ *задачу* (5) *можно, в частности, решать методом Гаусса – Ньютона или методом Левенберга – Марквардта, которые считаются наиболее эффективными методами для решения такого класса задач — в литературе по методам конечномерной оптимизации их называют нелинейными задачами наименьших квадратов.*

Теорема 2. *Пусть дополнительно выполняются предположения:*

A) *производная* $A'_{\upsilon_j}(.,\upsilon)$ *существует, непрерывна по* $\upsilon \in \mathcal{D}$ *и принадлежит классу* $L_\infty^{n\times n}(\Pi)$ *для всех* $\upsilon \in \mathcal{D}$, $j = \overline{1,s}$;

F) *производная* $f'_{\upsilon_j}(t,\upsilon)$ *существует, непрерывна по* $\upsilon \in \mathcal{D}$ *и принадлежит классу* $L_2(\Pi)$ *для всех* $\upsilon \in \mathcal{D}$, $j = \overline{1,s}$.

Пусть, кроме того, при некотором $\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ *оказалось, что матрица*

$$F'_\xi[\vec{\omega}](\xi) = \left(\frac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \xi_j} \right)_{i,j=\overline{1,s}},$$

$$\frac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \xi_j} = \int\limits_{\Pi} \big[A'_{\xi_j}(.,\xi) \nabla \overline{x} \cdot \nabla \omega_i - f'_{\xi_j}\big(.,\xi\big)\, \omega_i \big](t)\, dt, \quad i,j = \overline{1,s},$$

строго положительно определена для всех $\xi \in \mathcal{D}$. *Тогда условие* (3) *выполняется.*

Доказательство. Действительно, согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, а также согласно теореме Фубини для любых $\xi, \eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$, и $\Delta\upsilon = \xi - \eta$ получаем

$$F[\vec{\omega}](\xi) - F[\vec{\omega}](\eta) = \int\limits_0^1 F'_\upsilon[\vec{\omega}](\eta + \theta\Delta\upsilon)\, \Delta\upsilon\, d\theta.$$

Таким образом,

$$\big(F[\vec{\omega}](\xi) - F[\vec{\omega}](\eta) \big) \cdot (\xi - \eta) = \int\limits_0^1 \Big(F'_\upsilon[\vec{\omega}](\eta + \theta\Delta\upsilon)\, \Delta\upsilon \cdot \Delta\upsilon \Big)\, d\theta > 0,$$

в силу строгой положительности матрицы $F'_\upsilon[\vec{\omega}](\upsilon)$ при $\upsilon = \eta + \theta\Delta\upsilon \in \mathcal{D}$, с учетом выпуклости множества $\mathcal{D}$. Теорема доказана. □

Совершенно аналогично теореме 1 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для всякой пары $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\ne\eta$, существует $\vec{\omega}\in\mathcal{H}$ такое, что скалярное произведение*

$$\big(F[\vec{\omega}](\xi)-F[\vec{\omega}](\eta)\big)\cdot(\xi-\eta)>0. \tag{6}$$

Тогда обратная задача не может иметь более одного решения.

3. Формулировка основных результатов

Рассмотрим следующую более конкретную ситуацию:

$$A(t,\upsilon)=A(t,\upsilon_1),\quad f(t,\upsilon)=f(t,\upsilon_2,\upsilon_3),\quad s=3,$$

при выполнении предположений **A**), **F**). Заметим, что в данном случае

$$\frac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \upsilon_1}=\int\limits_{\Pi_i}\big[A'_{\upsilon_1}(.,\xi_1)\nabla\overline{x}\cdot\nabla\omega_i\big](t)\,dt,\quad i=\overline{1,3}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \upsilon_j}=-\int\limits_{\Pi_i}\big[f'_{\upsilon_j}\big(.,\xi_2,\xi_3\big)\,\omega_i\big](t)\,dt,\quad i=\overline{1,3},\quad j=\overline{2,3}.$$

Предположим дополнительно выполнение следующего условия.

H$_1$) Для каждого $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathcal{D}$ и каждого из множеств Π_i каждая компонента сужения $A'_{\upsilon_1}(.,\xi_1)\nabla\overline{x}\,\Big|_{\Pi_i}$ принадлежит пространству $H^1(\Pi_i)$, $i=\overline{1,3}$.

Как известно (см., например, [12, § II.2, формула (2.8), с.70]), для любых $u\in H^1(\Omega)$, $v\in H^1_0(\Omega)$ справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial t_i}u\,dt=-\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u}{\partial t_i}v\,dt,\quad i=\overline{1,n},\quad n=\dim\Omega.$$

Тогда для любого вектора $\vec{w}$, каждая компонента которого принадлежит пространству $H^1(\Omega)$, и для любого $v\in H^1_0(\Omega)$ получаем формулу

$$\int\limits_{\Omega}\vec{w}\cdot\nabla v\,dt=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}w_i\,\frac{\partial v}{\partial t_i}\,dt=-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial w_i}{\partial t_i}\,v\,dt=-\int\limits_{\Omega}v\,\mathrm{div}\,\vec{w}\,dt.$$

С помощью этой формулы (при $\Omega=\Pi_i$, $\vec{w}=A'_{\upsilon_1}(.,\xi_1)\nabla\overline{x}\,\Big|_{\Pi_i}$, $v=\omega_i$) и условия **H**$_1$) формулу (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \upsilon_1}=-\int\limits_{\Pi_i}\mathrm{div}\,\big[A'_{\upsilon_1}(.,\xi_1)\nabla\overline{x}\big](t)\omega_i(t)\,dt,\quad i=\overline{1,3}. \tag{8}$$

Матрицу, которая отличается от матрицы $F'_\upsilon[\vec{\omega}](\xi)$ тем только, что для производной $\dfrac{\partial F_i[\omega_i](\xi)}{\partial \upsilon_1}$, $i=\overline{1,3}$, используется представление (8), будем обозначать $\Psi[\vec{\omega}](\xi)$. Ясно, что матрица $\Psi[\vec{\omega}](\xi)$ определена для всех функций $\omega_i \in L_2(\Pi_i)$, $i=\overline{1,3}$, и образованного из них вектора $\vec{\omega}$. Множество всех таких векторов будем обозначать $\mathcal{L}$. Положим также

$$\overline{\Psi}[\vec{\omega}](\xi) = \frac{1}{2}\Big\{\Psi[\vec{\omega}](\xi) + \big(\Psi[\vec{\omega}](\xi)\big)^*\Big\}.$$

Здесь * означает операцию транспонирования. Иными словами, $\overline{\Psi}[\vec{\omega}](\xi)$ – это *симметризация* матрицы $\Psi[\vec{\omega}](\xi)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены предположения* **A**), **F**), **H**$_1$). *Пусть, кроме того, при некотором $\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ для всех $\xi \in \mathcal{D}$ матрица $\Psi = \Psi[\vec{\omega}](\xi)$ строго положительно определена. Тогда условие* (3) *выполняется.*

Доказательство теоремы 4 следует непосредственно из теоремы 2.

Замечание 4. *В соответствии с критерием Сильвестра* [13, глава 10, § 4] *для строгой положительной определенности матрицы Ψ (размера $s=3$) необходимо и достаточно, чтобы все главные угловые миноры ее симметризации $\overline{\Psi}$ были строго положительны:* $\overline{\Psi}_{11} > 0$, $\det \overline{\Psi} > 0$, $\overline{\Psi}_{11}\overline{\Psi}_{22} - \overline{\Psi}_{12}^2 > 0$.

Условия теоремы 4 имеют один недостаток: остается неясным, как находить вектор-функцию $\vec{\omega}$. Вероятно, в каких-то частных случаях ее можно найти сразу. На тот случай, когда это затруднительно сделать, мы далее укажем достаточные условия, обеспечивающие выполнение предположений теоремы 3, а затем и теоремы 4. Прежде всего предположим дополнительно выполнение следующего условия.

H$_2$) Функции $h_1(t,\xi) = \operatorname{div} A'_{\upsilon_1}(t,\xi_1)\nabla\overline{x}(t)$ и $h_j(t,\xi) = f'_{\upsilon_j}(t,\xi_2,\xi_3)$ при $j=2,3$, таковы, что для любых $\xi,\eta \in \mathcal{D}$, $\xi \neq \eta$, функции

$$H_j(t;\xi,\eta) = \int\limits_0^1 h_j\big(t,\eta+\theta(\xi-\eta)\big)\,d\theta, \quad j=\overline{1,3},$$

линейно независимы на каждом из множеств Π_i, $i=\overline{1,3}$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_2$). *Тогда предположения теоремы* 3 *выполняются и, следовательно, обратная задача не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 5 проводится в разделе 4. При этом фактически организуется некоторый алгоритм, позволяющий для любых фиксированных $\xi,\eta \in \mathcal{D}$ построить вектор-функцию $\vec{\omega}$, обеспечивающую выполнение предположений теоремы 3.

Приведем простейший пример, когда условия **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_2$) выполняются.

Пример. Пусть $n=2$,

$$\mathcal{D} = \Big\{\upsilon \in \mathbb{R}^3 :\ \upsilon_i \geq 0,\ i=\overline{1,3}\Big\}, \quad \Pi = \Big\{t \in \mathbb{R}^2 :\ t_1^2 + t_2^2 \leq 1\Big\},$$

$$A(t,\upsilon_1)=\begin{pmatrix}\exp\upsilon_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad b\equiv 0,\quad f(t,\upsilon_2,\upsilon_3)=\exp(\upsilon_2 t_1)+\exp(\upsilon_3 t_2).$$

Заметим, что при $\upsilon=0$ задача (1) принимает вид

$$-x''_{t_1t_1}-x''_{t_2t_2}=2,\quad t\in\Pi;\quad x\Big|_{\partial\Pi}=0,$$

и имеет очевидное решение $\overline{x}(t)=\big(1-t_1^2-t_2^2\big)/2$. Непосредственным вычислением получаем выражения

$$h_1(t,\xi)=\operatorname{div}A'_{\upsilon_1}(t,\xi_1)\nabla\overline{x}(t)=-\exp\xi_1-1,$$

$$h_2(t,\xi)=f'_{\upsilon_2}(t,\xi_2,\xi_3)=t_1\exp(\xi_2t_1),\quad h_3(t,\xi)=f'_{\upsilon_3}(t,\xi_2,\xi_3)=t_2\exp(\xi_3t_2).$$

Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме можем записать:

$$H_1(t;\xi,\eta)=\begin{cases}-\exp\xi_1-1, & \text{если } \xi_1=\eta_1,\\ (\xi_1-\eta_1)^{-1}\big(\exp\eta_1-\exp\xi_1\big)-1, & \text{если } \xi_1\neq\eta_1,\end{cases}$$

$$H_2(t;\xi,\eta)=\begin{cases}t_1\exp(\xi_2t_1), & \text{если } \xi_2=\eta_2,\\ (\xi_2-\eta_2)^{-1}\big(\exp(\xi_2t_1)-\exp(\eta_2t_1)\big), & \text{если } \xi_2\neq\eta_2,\end{cases}$$

$$H_3(t;\xi,\eta)=\begin{cases}t_2\exp(\xi_3t_2), & \text{если } \xi_3=\eta_3,\\ (\xi_3-\eta_3)^{-1}\big(\exp(\xi_3t_2)-\exp(\eta_3t_2)\big), & \text{если } \xi_3\neq\eta_3.\end{cases}$$

Ясно, что ни одна из этих трех функций не выражается в виде линейной комбинации двух других, поскольку они зависят от разных переменных. Таким образом, данные три функции линейно независимы на любой области, следовательно, условие $\mathbf{H}_2$) выполняется. Выполнение условий **A**), **F**), $\mathbf{H}_1$) очевидно.

В случае, когда множество $\mathcal{D}$ — компакт, утверждение теоремы 4 может быть усилено следующим образом.

Теорема 6. *Пусть множество $\mathcal{D}$ — компакт и выполнены условия* **A**), **F**), $\mathbf{H}_1$), *а также предположение*

$\mathbf{H}_3$) *функции $h_i(.,\xi)$ непрерывны по $\xi\in\mathcal{D}$ в метрике каждого из пространств $L_2(\Pi_j)$, $i,j=\overline{1,3}$.*

Пусть, кроме того, при некотором $\vec{\psi}\in\mathcal{L}$ для всех $\xi\in\mathcal{D}$ матрица $\Psi=\Psi[\vec{\psi}](\xi)$ строго положительно определена. Тогда условие (3) *выполняется.*

Доказательство теоремы 6 см. в разделе 4.

4. Доказательство основных результатов

Для $\omega_i\in L_2(\Pi_i)$, $i=\overline{1,3}$, определим функции

$$\Phi_{ij}[\omega_i](\xi,\eta)=-\int\limits_{\Pi_i}H_j(t;\xi,\eta)\,\omega_i(t)\,dt,\quad i,j=\overline{1,3},$$

а также составленную из них как из компонент матричную функцию $\Phi[\vec{\omega}](\xi,\eta) = \big(\Phi_{ij}[\omega_i](\xi,\eta)\big)_{i,j=\overline{1,3}}$.

Для доказательства теорем 5 и 6 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть X, Y — компакты метрических пространств и функция $\Phi(x,y)$ непрерывна на $X\times Y$. Тогда функция $W(x) = \min\limits_{y\in Y}\Phi(x,y)$ непрерывна на множестве X.*

Доказательство леммы 1 см., например, в [14, глава I, §1, теорема 1.2, с.13].

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — некоторый компакт метрического пространства, $Q[p]$ — строго положительно определенная (не обязательно симметричная) квадратная вещественная матрица порядка s, непрерывно зависящая от параметра $p\in\mathcal{P}$ (либо $\mathcal{P}$ состоит лишь из одного элемента, то есть матрица Q постоянна). Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для всех чисел $\delta_{ij}\in\mathbb{R}$, $|\delta_{ij}|\le\varepsilon$, $i,j=\overline{1,s}$, и образованной из них матрицы D, а также для всех $p\in\mathcal{P}$ матрица $Q[p]+D$ является строго положительно определенной.*

Доказательство. Обозначим

$$X_\varepsilon = \Big\{D = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,s}}\in\mathbb{R}^{s\times s}:\ |\delta_{ij}|\le\varepsilon,\ i,j=\overline{1,s}\Big\},\quad \varepsilon>0;$$

$$X = X_1,\quad Y = \Big\{\xi\in\mathbb{R}^s:\ |\xi|=1\Big\}.$$

Определим функцию

$$\Phi(D,\xi,p) = (Q[p]+D)\xi\cdot\xi,\quad D\in X,\quad \xi\in Y,\quad p\in\mathcal{P}.$$

Ясно, что эта функция непрерывна по совокупности переменных. Следовательно, согласно лемме 1 непрерывна также функция минимума

$$W(D) = \min_{\xi\in Y, p\in\mathcal{P}}\Phi(D,\xi,p),\quad D\in X.$$

Кроме того, в силу строгой положительной определенности матрицы $Q[p]$ и теоремы Вейерштрасса имеем $W(0)>0$. Тогда, согласно теореме об устойчивости знака непрерывной функции, существует число $\varepsilon>0$ такое, что $W(D)>0$ для всех $D\in X_\varepsilon$. Остается заметить, что

$$\Phi(D,\xi,p) = |\xi|^2\Phi(D,\xi/|\xi|,p)\ge|\xi|^2W(D)>0$$

для всех $D\in X_\varepsilon$, $\xi\in\mathbb{R}^s$, $\xi\ne0$, $p\in\mathcal{P}$. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Для любых ограниченных областей $\Pi,\Pi_0\subset\mathbb{R}^n$ таких, что $\overline{\Pi}_0\subset\Pi$, существует основная функция $\varphi\in\mathbf{D}(\Pi)$ (то есть бесконечно непрерывно дифференцируемая с компактным носителем в Π) такая, что $\varphi(t)\in[0;1]$ при $t\in\Pi$; $\varphi(t)=1$ при $t\in\Pi_0$.*

Доказательство леммы 3 см. в [15, пункт 2.1.2, с.70].

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_2$). *Тогда для любых наборов* $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, *найдутся функции* $\psi_i=\psi_i[\xi,\eta]\in L_2(\Pi_i)$, $i=\overline{1,3}$, *такие, что матрица* $\Phi[\vec{\psi}](\xi,\eta)$ *строго положительно определена.*

Доказательство. Используем идею доказательства теоремы 1.1 из [11, глава 5]. Выберем произвольную симметричную вещественную строго положительно определенную матрицу Q порядка $s=3$. Зафиксируем индекс $i\in\overline{1,3}$. Будем рассматривать всевозможные линейные комбинации

$$\psi_i(t)=-\sum_{j=1}^{3}\lambda_j H_j(t;\xi,\eta),\quad t\in\Pi_i.$$

Попробуем найти коэффициенты $\lambda_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы выполнялись соотношения:

$$\Big\{\ \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\big\langle H_k(.;\xi,\eta),H_j(.;\xi,\eta)\big\rangle_i=Q_{ik},\qquad k=\overline{1,3},\tag{9}$$

$$\big\langle H_k(.;\xi,\eta),H_j(.;\xi,\eta)\big\rangle_i=g_{kj}[i]\equiv\int\limits_{\Pi_i}H_k(t;\xi,\eta)\,H_j(t;\xi,\eta)\,dt.$$

Заметим, что определитель линейной системы (9) совпадает с определителем Грама $G=\det\left(g_{kj}[i]\right)_{k,j=\overline{1,3}}$. По условию **H**$_2$), определитель $G\neq 0$. Поэтому система (9) имеет единственное решение. Иными словами, существуют функции $\psi_i\in L_2(\Pi_i)$ такие, что

$$-\int\limits_{\Pi_i}H_k(t;\xi,\eta)\,\psi_i(t)\,dt=Q_{ik},\quad i,k=\overline{1,3}.$$

Это означает, что $\Phi[\vec{\psi}](\xi,\eta)=Q$. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_2$). *Тогда для любых наборов* $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, *найдутся функции* $\omega_i=\omega_i[\xi,\eta]\in\mathcal{H}_i$, $i=\overline{1,3}$, *такие, что матрица* $\Phi[\vec{\omega}](\xi,\eta)$ *строго положительно определена.*

Доказательство. Пусть Q – матрица, выбранная в ходе доказательства леммы 4, $\psi_i=\psi_i[\xi,\eta]\in L_2(\Pi_i)$, $i=\overline{1,3}$, – функции из ее формулировки. Согласно лемме 2, найдется число $\varepsilon>0$ такое, что для любых чисел $\delta_{ij}\in\mathbb{R}$, $|\delta_{ij}|\leq\varepsilon$, $i,j=\overline{1,3}$, и образованной из них матрицы Δ, матрица $Q+\Delta$ является строго положительно определенной. Поскольку пространство $\mathbf{C}^\infty(\Pi_i)$ всюду плотно в $L_2(\Pi_i)$, найдутся функции $\pi_i\in\mathbf{C}^\infty(\Pi_i)$ такие, что

$$\kappa_i\,\|\pi_i-\psi_i\|_{L_2(\Pi_i)}\leq\varepsilon,\quad \kappa_i=\max_{k=\overline{1,3}}\|H_k(.;\xi,\eta)\|_{L_2(\Pi_i)},\quad i=\overline{1,3}.$$

Рассмотрим

$$r_{ij}=-\int\limits_{\Pi_i}H_j(t;\xi,\eta)\,\pi_i(t)\,dt=-\int\limits_{\Pi_i}H_j(t;\xi,\eta)\,\psi_i(t)\,dt+\delta_{ij}=Q_{ij}+\delta_{ij},$$

$$\delta_{ij} = \int\limits_{\Pi_i} H_j(t;\xi,\eta)\left\{\psi_i(t) - \pi_i(t)\right\}dt, \quad i,j=\overline{1,3}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|\delta_{ij}| \le \kappa_i\,\|\pi_i - \psi_i\|_{L_2(\Pi_i)} \le \varepsilon, \quad i,j=\overline{1,3}.$$

Таким образом, матрица $R = (r_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ строго положительно определена. Тогда опять же по лемме 2, найдется число $\sigma > 0$ такое, что для любых чисел $d_{ij} \in \mathbb{R}$, $|d_{ij}| \le \sigma$, $i,j=\overline{1,3}$, и образованной из них матрицы D, матрица $R + D$ является строго положительно определенной.

Пусть $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, замыкание которой $\overline{\Omega}_i$ содержится в области Π_i, причем

$$\kappa_i\,\rho_i \le \sigma, \quad \rho_i = 2\,\|\pi_i\|_{L_2(\Pi_i\setminus\Omega_i)}, \quad i=\overline{1,3}.$$

Согласно лемме 3, найдется функция $\varphi_i \in \mathbf{C}^\infty(\Pi_i)$ с компактным носителем в Π_i такая, что

$$\varphi_i(t) \in [0;1] \quad \text{при} \quad t \in \Pi_i; \quad \varphi(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in \Omega_i, \quad i=\overline{1,3}.$$

Очевидно, что $\omega_i \equiv \varphi_i\,\pi_i \in \mathbf{C}^\infty(\Pi_i)$ имеет компактный носитель в Π_i и такова, что

$$|\omega_i(t)| \le |\pi_i(t)| \quad \text{при} \quad t \in \Pi_i; \quad \omega_i(t) = \pi_i(t) \quad \text{при} \quad t \in \Omega_i, \quad i=\overline{1,3}.$$

Продолжая функцию $\omega_i(t)$ нулем на все множество Π, получаем, что $\omega_i \in \mathcal{H}_i$, $i=\overline{1,3}$. Рассмотрим

$$p_{ij} = -\int\limits_{\Pi_i} H_j(t;\xi,\eta)\,\omega_i(t)\,dt = -\int\limits_{\Pi_i} H_j(t;\xi,\eta)\,\pi_i(t)\,dt + d_{ij} = r_{ij} + d_{ij},$$

$$d_{ij} = \int\limits_{\Pi_i} H_j(t;\xi,\eta)\left\{\pi_i(t) - \omega_i(t)\right\}dt, \quad i,j=\overline{1,3}.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$|d_{ij}| \le \kappa_i\,\|\pi_i - \omega_i\|_{L_2(\Pi_i\setminus\Omega_i)} \le 2\kappa_i\,\|\pi_i\|_{L_2(\Pi_i\setminus\Omega_i)} = \kappa_i\,\rho_i \le \sigma, \quad i,j=\overline{1,3}.$$

Таким образом, матрица $P = (p_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ строго положительно определена. Остается заметить, что матрица $\Phi[\vec{\omega}](\xi,\eta) = P$. Лемма доказана. $\square$

Для произвольных $\xi,\eta \in \mathcal{D}$, $\vec{\omega} \in \mathcal{H}$ обозначим

$$\partial_{i1}[\omega_i](\xi,\eta) = \int\limits_{\Pi_i} dt\left[\int\limits_0^1 A'_{v_1}\big(.,\eta_1 + \theta(\xi_1 - \eta_1)\big)\,d\theta\,\nabla\overline{x}\cdot\nabla\omega_i\right](t), \quad i=\overline{1,3},$$

$$\partial_{ij}[\omega_i](\xi,\eta) = -\int\limits_{\Pi_i} dt\left[\int\limits_0^1 f'_{v_j}\big(.,\eta_2 + \theta(\xi_2 - \eta_2),\eta_3 + \theta(\xi_3 - \eta_3)\big)\,d\theta\,\omega_i\right](t)\,dt,$$

$i=\overline{1,3}$, $j=\overline{2,3}$. Используя теорему Фубини, интегрирование по частям и снова теорему Фубини, получаем равенство

$$\partial_{i1}[\omega_i](\xi,\eta)=-\int\limits_{\Pi_i} H_1(t;\xi,\eta)\,\omega_i(t)\,dt.$$

И очевидно, что

$$\partial_{ij}[\omega_i](\xi,\eta)=-\int\limits_{\Pi_i} H_j(t;\xi,\eta)\,\omega_i(t)\,dt,\quad j=2,3.$$

Таким образом, $\partial[\vec{\omega}](\xi,\eta)=\Phi[\vec{\omega}](\xi,\eta)$. Поэтому непосредственно из леммы 5 получаем, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_2$). *Тогда для любых наборов $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, найдутся функции $\omega_i=\omega_i[\xi,\eta]\in\mathcal{H}_i$, $i=\overline{1,3}$, такие, что матрица $\partial[\vec{\omega}](\xi,\eta)$ строго положительно определена.*

Доказательство теоремы 5. Согласно лемме 6, найдутся функции

$$\omega_i=\omega_i[\xi,\eta]\in\mathcal{H}_i,\quad i=\overline{1,3},$$

такие, что матрица $\partial[\vec{\omega}](\xi,\eta)$ строго положительно определена. Пользуясь теоремой Лагранжа о конечных приращениях в интегральной форме, для любых $\xi,\eta\in\mathcal{D}$, $\xi\neq\eta$, и $\Delta\upsilon=\xi-\eta$ получаем

$$F[\vec{\omega}](\xi)-F[\vec{\omega}](\eta)=\partial[\vec{\omega}](\xi,\eta)\,\Delta\upsilon.$$

Таким образом,

$$\big(F[\vec{\omega}](\xi)-F[\vec{\omega}](\eta)\big)\cdot(\xi-\eta)=\partial[\vec{\omega}](\xi,\eta)\,\Delta\upsilon\cdot\Delta\upsilon>0.$$

Теорема 5 доказана.

Лемма 7. *Пусть множество $\mathcal{D}$ — компакт в $\mathbb{R}^s$ и выполнены предположения* **A**), **F**), **H**$_1$), **H**$_3$). *Пусть, кроме того, при некотором $\vec{\psi}\in\mathcal{L}$ для каждого набора $\xi\in\mathcal{D}$ матрица $\Psi=\Psi[\vec{\psi}](\xi)$ строго положительно определена. Тогда существует вектор $\vec{\omega}\in\mathcal{H}$ такой, что матрица $\Psi=\Psi[\vec{\omega}](\xi)$ строго положительно определена для всех наборов $\xi\in\mathcal{D}$.*

Доказательство леммы 7 почти дословно повторяет доказательство леммы 5, за исключением следующих отличий:

1) вместо матрицы Q выступает матрица $Q[\xi]=\Psi[\vec{\psi}](\xi)$, $\xi\in\mathcal{D}$;

2) функции ψ_i, $i=\overline{1,3}$, не зависят ни от ξ, ни от η;

3) при ссылке на лемму 2 предполагается, что $p=\xi\in\mathcal{P}=\mathcal{D}$;

4) предполагается равенство $\eta=\xi$, то есть $H_i(t;\xi,\eta)=h_i(t;\xi)$;

5) величины $\kappa_i=\max\limits_{k=\overline{1,3}}\max\limits_{\xi\in\mathcal{D}}\|h_k(.;\xi)\|_{L_2(\Pi_i)}$, $i=\overline{1,3}$;

6) вместо $\Phi[\vec{\omega}](\xi)$ выступает $\Psi[\vec{\omega}](\xi)$.

Доказательство теоремы 6 следует непосредственно из теоремы 4 и леммы 7.

Список литературы

[1] А. Д. Искендеров, “Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **15**:11 (1979), 858–867.

[2] П. Н. Вабищевич, “О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **24**:12 (1988), 2125–2129.

[3] Р. А. Алиев, “Об определении неизвестных коэффициентов в квазилинейном эллиптическом уравнении”, *Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика.*, **32**:5 (2011), 4–11.

[4] Р. А. Алиев, “Об одной обратной задаче для квазилинейного уравнения эллиптического типа”, *Известия Саратовского ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.*, **11**:1 (2011), 3–9.

[5] М. В. Клибанов, “Обратные задачи в целом и Карлемановские оценки”, *Дифференц. уравнения*, **20**:6 (1984), 1035–1041.

[6] М. В. Клибанов, “Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **20**:11 (1984), 1947–1953.

[7] И. С. Вахитов, “Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии-реакции”, *Дальневосточный матем. журнал*, **10**:2 (2010), 93–105.

[8] В. В. Соловьев, “Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике”, *Журнал вычислит. матем. и матем. физ.*, **47**:8 (2007), 1365–1377.

[9] В. В. Соловьев, “Обратная задача определения коэффициентов в уравнении Пуассона в цилиндре”, *Журнал вычислит. матем. и матем. физ.*, **51**:10 (2011), 1849–1856.

[10] Я. Т. Мегралиев, “Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральными условиями”, *Владикавказский матем. журнал*, **15**:4 (2013), 30–43.

[11] А. И. Егоров, *Основы теории управления*, Физматлит, М, 2004.

[12] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М, 1973.

[13] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М, 1966.

[14] А. А. Васин, В. В. Морозов, *Теория игр и модели математической экономики*, МАКС Пресс, М, 2005.

[15] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М, 2004.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 12 июля 2014 г.

Работа поддержана финансово МОН РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014–2016 гг. (проект № 1727) и грантом (соглашение от 27.08.13 № 02.B.49.21.0003 между МОН РФ и ННГУ).

Chernov A. V. On the uniqueness of solution to the inverse problem of determination parameters in the senior coefficient and the righthand side of an elliptic equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 1. P. 96–110.

ABSTRACT

For the inverse problem of determination a finite set of numerical parameters in the senior coefficient and the righthand side of a linear elliptic equation of the second order we obtain sufficient conditions for the uniqueness of solution.

Key words: *inverse parametric problem, senior coefficient, linear elliptic equation of the second order, Dirichlet problem.*