

УДК 511.21+517.965+517.547.582
MSC2010 11B37 + 33E05

© М. О. Авдеева, В. А. Быковский¹

Гиперэллиптические системы последовательностей и функций

В работе предлагается метод построения пар голоморфных на всей комплексной плоскости функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям типа теорем сложения для тэта-функций.

Ключевые слова: *функциональные уравнения, тэта-функции, сигма-функция Вейерштрасса, нелинейные последовательности.*

Введение

В работе Гаусса [1, с. 472], датированной 6 августа 1827 г. и опубликованной лишь в 1866 г. в третьем томе собрания сочинений, содержится тождество

$$\begin{aligned} &(\theta, 2\alpha) \cdot (\theta, 2\beta) = \\ &= (2\theta, \alpha + \beta) \cdot (2\theta, \alpha - \beta) + (2\theta, \alpha + \beta + 1/2) \cdot (2\theta, \alpha - \beta + 1/2), \end{aligned}$$

где

$$(\theta, \alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\theta(k+\alpha)^2}.$$

С помощью замены переменных

$$\begin{aligned} q &= e^{\pi i \tau} = e^{-\theta} \quad (\operatorname{Im} \tau > 0), \\ \alpha &= \frac{1}{2\tau}(z + w), \quad \beta = \frac{1}{2\tau}(z - w), \end{aligned}$$

оно преобразуется к виду

$$\vartheta_3(z + w; q)\vartheta_3(z - w; q) = \vartheta_3(2z; q^2)\vartheta_3(2w; q^2) + \vartheta_2(2z; q^2)\vartheta_2(2w; q^2), \quad (1)$$

¹Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: avdeeva@iam.khv.ru, vab@iam.khv.ru

где ϑ_2 и ϑ_3 — две из четырех тета-функций Якоби

$$\begin{aligned}\vartheta_1(z; q) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \\ \vartheta_2(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2}, \\ \vartheta_3(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inz} q^{n^2}, \\ \vartheta_4(z; q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2inz} q^{n^2}.\end{aligned}$$

Произведя в (1) замену

$$z \rightarrow z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau,$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned}\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau; q\right) &= iq^{-\frac{1}{4}} e^{-iz} \vartheta_1(z; q), \\ \vartheta_3(2z + \pi + \pi\tau; q^2) &= q^{-\frac{1}{2}} e^{-2iz} \vartheta_2(2z; q^2), \\ \vartheta_2(2z + \pi + \pi\tau; q^2) &= -q^{-\frac{1}{2}} e^{-2iz} \vartheta_3(2z; q^2)\end{aligned}$$

получим

$$-\vartheta_1(z+w; q)\vartheta_1(z-w; q) = \vartheta_2(2z; q^2)\vartheta_3(2w; q^2) - \vartheta_3(2z; q^2)\vartheta_2(2w; q^2). \quad (2)$$

Еще одна замена

$$z \rightarrow z + \frac{1}{4}\pi, \quad w \rightarrow w + \frac{1}{4}\pi$$

приводит к тождеству

$$\vartheta_2(z+w; q)\vartheta_1(z-w; q) = -\vartheta_1(2z; q^2)\vartheta_4(2w; q^2) + \vartheta_4(2z; q^2)\vartheta_1(2w; q^2),$$

которое в виде

$$H(x, q)\Theta(X, q) - H(x, q)\Theta(x, q) = H\left(\frac{x-X}{2}, \sqrt{q}\right) H\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+X}{2}, \sqrt{q}\right)$$

впервые было опубликовано Якоби [2, с. 257] в 1828 году.

В работе предлагается метод построения более широкого класса тождеств типа (1) и (2) с помощью гиперэллиптических систем последовательностей, введенных в работе [3].

1. Гиперэллиптические системы последовательностей

Пусть $A, B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ — две последовательности, отличные от тождественного нуля. Предположим, что найдутся $2k_0 + 2k_1$ других последовательностей

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}, \dots, C_{k_0}^{(0)}, D_1^{(0)}, \dots, D_{k_0}^{(0)} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \\ C_1^{(1)}, \dots, C_{k_1}^{(1)}, D_1^{(1)}, \dots, D_{k_1}^{(1)} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

для которых при любых целых m и n выполняются равенства

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_0} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \quad (3)$$

$$A(1+m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k_1} C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n). \quad (4)$$

В таком случае назовем пару (A, B) гиперэллиптической системой с 0-рангом $k_0 = R_0(A, B)$, 1-рангом $k_1 = R_1(A, B)$ и рангом $k = R(A, B) = \max(k_0, k_1)$, где k_0 и k_1 — минимально возможные неотрицательные целые числа. Так как A и B — не тождественные нули, то $k \geq 1$. Равенство $k_j = 0$ ($j = 0, 1$) означает, что соответствующая левая часть одного из разложений равна нулю при всех целых m и n .

Пример (экспоненциальная система). Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ — произвольные комплексные числа и

$$A(n) = \exp(\alpha_1 + \beta_1 n + \gamma n^2), \quad B(n) = \exp(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2).$$

Тогда

$$A(m+n)B(m-n) = C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n)$$

с

$$\begin{aligned} C_1^{(0)}(m) &= \exp(\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)m + 2\gamma m^2), \\ D_1^{(0)}(n) &= \exp(\alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2)n + 2\gamma n^2) \end{aligned}$$

и

$$A(1+m+n)B(m-n) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n)$$

с

$$\begin{aligned} C_1^{(1)}(m) &= \exp(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma + (\beta_1 + \beta_2 + 2\gamma)m + 2\gamma m^2), \\ D_1^{(1)}(n) &= \exp(\alpha_2 + (\beta_1 - \beta_2 + 2\gamma)n + 2\gamma n^2). \end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть (A_1, B_1) и (A_2, B_2) — две гиперэллиптические системы рангов k_1 и k_2 . Тогда $(A_1 A_2, B_1 B_2)$ — гиперэллиптическая система и

$$R(A_1 A_2, B_1 B_2) \leq k_1 k_2.$$

Это утверждение легко проверяется путем умножения левых и правых частей разложений (3) и (4).

Если в замечании 1 выбрать в качестве (A_2, B_2) экспоненциальную систему, то мы получим следующее утверждение.

Замечание 2. Если (A, B) — гиперэллиптическая система, то для любых комплексных $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$ пара (\tilde{A}, \tilde{B}) , определенная по формулам

$$\begin{aligned}\tilde{A}(n) &= \exp(\alpha_1 + \beta_1 n + 2\gamma n^2) A(n), \\ \tilde{B}(n) &= \exp(\alpha_2 + \beta_2 n + \gamma n^2) B(n),\end{aligned}$$

также гиперэллиптическая система, и

$$R(A, B) = R(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

Замечание 3. Произведя замену $n \rightarrow -n$ в (3) и $n \rightarrow -n - 1$ в (4) получим, что (A, B) и (B, A) являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

Замечание 4. Произведя замены $m \rightarrow -n$ и $n \rightarrow -m$ в (3), а также замены $m \rightarrow -n - 1$ и $n \rightarrow -m - 1$ в (4) получим, что пары (A, B) и (\tilde{A}, \tilde{B}) с $\tilde{A}(n) = A(-n)$ являются одновременно гиперэллиптическими системами одинакового ранга.

Предложение 1. Пусть k, l, r — целые числа с $k \neq 0$ и (A, B) — гиперэллиптическая система. Определим пару (\tilde{A}, \tilde{B}) по формулам

$$\tilde{A}(n) = A(kn + l), \quad \tilde{B}(n) = B(kn + r).$$

Тогда, если \tilde{A} и \tilde{B} — не тождественные нули, то (\tilde{A}, \tilde{B}) — гиперэллиптическая система и $R(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq R(A, B)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из равенств

$$\begin{aligned}k(m+n) + l &= \left(km + \frac{l+r}{2} \right) + \left(kn + \frac{l-r}{2} \right), \\ k(m-n) + r &= \left(km + \frac{l+r}{2} \right) - \left(kn + \frac{l-r}{2} \right)\end{aligned}$$

для $l+r \equiv 0 \pmod{2}$ и равенств

$$\begin{aligned}k(m+n) + l &= 1 + \left(km + \frac{l+r-1}{2} \right) + \left(kn + \frac{l-r-1}{2} \right), \\ k(m-n) + r &= \left(km + \frac{l+r-1}{2} \right) - \left(kn + \frac{l-r-1}{2} \right)\end{aligned}$$

для $l+r \equiv 1 \pmod{2}$. □

Теорема 1. Пусть (A, B) – гиперэллиптическая система последовательностей. Тогда для некоторого вещественного $\Delta = \Delta(A, B)$ выполняется оценка

$$|A(m)| + |B(m)| \ll_{A,B} \exp(\Delta m^2).$$

Доказательство. Для любых целых m_i и n_j из (3) и (4) следуют равенства

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_0} \\ n_0, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} A(m_0 + n_0)B(m_0 - n_0) & \dots & A(m_0 + n_{k_0})B(m_0 - n_{k_0}) \\ \dots & A(m_i + n_j)B(m_i - n_j) & \dots \\ A(m_{k_0} + n_0)B(m_{k_0} - n_0) & \dots & A(m_{k_0} + n_{k_0})B(m_{k_0} - n_{k_0}) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{A,B}^{(1)} \begin{pmatrix} m_0, \dots, m_{k_1} \\ n_0, \dots, n_{k_1} \end{pmatrix} = \\ & = \det \begin{pmatrix} A(1 + m_0 + n_0)B(m_0 - n_0) & \dots & A(1 + m_0 + n_{k_1})B(m_0 - n_{k_1}) \\ \dots & A(1 + m_i + n_j)B(m_i - n_j) & \dots \\ A(1 + m_{k_1} + n_0)B(m_{k_1} - n_0) & \dots & A(1 + m_{k_1} + n_{k_1})B(m_{k_1} - n_{k_1}) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Переходя, в случае необходимости, от последовательности $A(n)$ к $A(n + 1)$ и производя замены $m \rightarrow m + 1$ и $n \rightarrow n + 1$, мы поменяем местами (3) и (4). Поэтому найдутся такие целые $m_1, \dots, m_{k_0}, n_1, \dots, n_{k_0}$, для которых

$$\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_{k_0} \\ n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Принимая во внимание предложение 1, мы можем считать, что $A(0) \neq 0$ и $B(0) \neq 0$.

В соответствии с (5), раскладывая определитель по первой строке, получим равенство

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m, m_1, \dots, m_{k_0} \\ m, n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} = A(2m)B(0)\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, \dots, m_{k_0} \\ n_1, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} - \\ & - A(m + n_1)B(m - n_1)\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, m_2, \dots, m_{k_0} \\ n_1, n_2, \dots, n_{k_0} \end{pmatrix} + \dots + \\ & + (-1)^{k_0} A(m + n_{k_0})B(m - n_{k_0})\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_1, m_2, \dots, m_{k_0} \\ m, n_1, \dots, n_{k_0-1} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$|A(2m)| \ll_{A,B} \max_{|l| \leq T} |A(m + l)|^2 \max_{|l| \leq T} |B(m + l)|^2, \quad (7)$$

где $T = \max\{|m_1|, \dots, |m_{k_0}|, |n_1|, \dots, |n_{k_0}|\}$.

Если $k_1 = 0$, то для любых целых m и n выполняется равенство $A(1 + m + n) \times B(m - n) = 0$, а при $m = n$ $A(2m + 1)B(0) = 0$. Поскольку $B(0) \neq 0$, то $A(m) = 0$ для всех нечетных номеров, и мы можем написать, что

$$|A(2m + 1)| \ll \max_{|l| \leq T+1} |A(m + l)|^2 \max_{|l| \leq T+1} |B(m + l)|^2. \quad (8)$$

Пусть теперь $k_1 > 0$. Действуя точно так же, как при доказательстве неравенства (7), с помощью равенства (4) получим оценку (8). По причине симметрии (см. замечание 3) оценки (7) и (8) справедливы при замене A на B .

Положим для $M > 0$

$$G(M) = \max_{|m| \leq M} \max\{|A(m)|, |B(m)|\}. \quad (9)$$

Из (7) и (8) следует неравенство

$$G(2M) \leq QG^4(M + F)$$

с $F = T + 4$ и положительной константой $Q = Q(A, B)$. Итерируя это неравенство для $M \geq 2$, получим

$$\begin{aligned} G(M) &\leq QG^4\left(\frac{M}{2} + F\right) \leq Q^{1+4}G^{4^2}\left(\frac{M}{2^2} + \frac{F}{2} + F\right) \leq \\ &\leq Q^{1+4+\dots+4^{l-1}}G^{4^l}\left(\frac{M}{2^l} + \frac{F}{2^{l-1}} + \dots + \frac{F}{2} + F\right). \end{aligned}$$

Выберем натуральное l из условия

$$\frac{1}{2}F < \frac{M}{2^l} \leq F.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 4^l < 4\left(\frac{M}{F}\right)^2, \quad 1 + 4 + \dots + 4^{l-1} = \frac{4^l - 1}{3} < 2\left(\frac{M}{F}\right)^2, \\ G(M) &\leq Q^{2\left(\frac{M}{F}\right)^2}G^{\left(\frac{M}{F}\right)^2}(2F) \leq \exp(\Delta \cdot M^2) \end{aligned}$$

с некоторым $\Delta = \Delta(A, B)$. Поэтому

$$|A(m)| + |B(m)| \leq 2G(|m|) \leq 2 \exp(\Delta m^2).$$

Теорема 1 доказана. □

2. Гиперэллиптические системы функций

Пусть (A, B) — гиперэллиптическая система последовательностей с разложениями (3) и (4). Из теоремы 1 следует, что существует

$$\lim_{|m| \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \log(1 + \max\{|A(m)|, |B(m)|\}) = \Delta(A, B) = \Delta,$$

который мы назовем показателем сходимости пары (A, B) .

Из равенств (5) и (6) при $m_0 = m$ и $n_0 = n$ следует, что каждая из последовательностей $C_j^{(0)}$ и $D_j^{(0)}$, $C_j^{(1)}$ и $D_j^{(1)}$ может быть представлена как линейная комбинация последовательностей

$$A(m + m_i)B(m + m'_i) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

с некоторыми целыми m_i и m'_i . Поэтому мы можем считать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого m

$$\max \left\{ \left| C_{j_1}^{(0)}(m) \right|, \left| D_{j_2}^{(0)}(m) \right|, \left| C_{j_3}^{(1)}(m) \right|, \left| D_{j_4}^{(1)}(m) \right| \right\}_{A,B} \ll \exp((\Delta + \varepsilon)|m|^2).$$

Пусть $q = \exp(\pi i \tau)$ с $\text{Im } \tau > 0$. Определим две функции

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A(m)e^{2imz}q^{m^2},$$

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B(n)e^{2inz}q^{n^2}.$$

Теорема 2. *Пара (f, g) является гиперэллиптической системой функций с $R(f, g) \leq k_0 + k_1$.*

Доказательство. Заметим, что соответствие

$$(m, n) \rightarrow \left(\frac{1}{2}(m + n), \frac{1}{2}(m - n) \right)$$

переводит \mathbb{Z}^2 в $\mathbb{Z}^2 \cup (\mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2))$. Принимая во внимание разложения (3) и (4) получим

$$\begin{aligned} f(z + w)g(z - w) &= \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} A(m)B(n)e^{2i(m(z+w)+n(z-w))}q^{m^2+n^2} = \\ &= \sum_{m_1, n_1=-\infty}^{\infty} A(m_1 + n_1)B(m_1 - n_1)e^{2i2zm_1}e^{2i2zn_1}q^{2m_1^2+2n_1^2} + \\ &+ \sum_{m_1, n_1=-\infty}^{\infty} A(1 + m_1 + n_1)B(m_1 - n_1)e^{2i2z(m_1+\frac{1}{2})}e^{2i2w(n_1+\frac{1}{2})}q^{2(m_1+\frac{1}{2})^2}q^{2(n_1+\frac{1}{2})^2} = \\ &= \sum_{j=1}^{k_0} \left(\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_j^{(0)}(m_1)e^{2\pi i 2zm_1}q^{2m_1^2} \right) \left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} D_j^{(0)}(n_1)e^{2i2wn_1}q^{2n_1^2} \right) + \\ &+ \sum_{j=1}^{k_1} \left(\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_j^{(1)}(m_1)e^{2i2z(m_1+\frac{1}{2})}q^{2(m_1+\frac{1}{2})^2} \right) \left(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} D_j^{(1)}(n_1)e^{2i2w(n_1+\frac{1}{2})}q^{2(n_1+\frac{1}{2})^2} \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана. □

Пример. Если (A, B) — экспоненциальная система последовательностей, то с помощью теоремы 2 получим все возможные пары гиперэллиптических систем функций ранга 2 (эллиптические системы). Это утверждение следует из результатов работы [4]. В частности, для A и B тождественно равных 1, получим тождество Гаусса (1).

Список литературы

- [1] K. F. Gauss, “Zur Theorie der neuen Transscendenten”, *Werke: Dritter Band [III]*, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866.
- [2] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*. V. 1, Berlin, 1881.
- [3] V. Bykovskii, “Elliptic systems of sequences and functions”, 2015, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.
- [4] R. Rochberg, L. A. Rubel, *Indiana Univ. Math. J.*, **41** (1992), 363–376.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 12 сентября 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00203 а) и ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047).

Avdeeva M. O., Bykovskii V. A. Hyperelliptic system of sequences and functions. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2016. V. 16. № 2. P. 115–122.

ABSTRACT

The article offers a new method for constructing the pairs of functions which are holomorphic on the whole complex plane and satisfy functional equations such as the addition theorem for theta functions.

Key words: *functional equations, theta functions, Weierstrass sigma-function, nonlinear sequences.*