Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 123–136

УДК 517.2
MSC2010 35D35, 35G16, 35R09

© Е. В. Амосова[1]

Анализ единственности и устойчивости гиперболо-параболической системы

Доказана теорема существования и единственности гиперболо-параболической системы, сопряженной с уравнениями Навье – Стокса сжимаемой среды.

Ключевые слова: *уравнение переноса, гиперболо-параболическая система.*

Введение

При исследовании задач управляемости двумерных уравнений Навье – Стокса, определенных в ограниченной области, используется метод [1], [2] построения решения с помощью экстремальной задачи. Из единственности задачи Коши для сопряженного уравнения можно вывести результаты по управляемости исходного уравнения. Для доказательства единственности задачи Коши применяются карлемановские оценки [3]. При изучении точной локальной управляемости движением вязкого газа система оптимальности состоит из дифференциальных уравнений разных типов: уравнения неразрывности, или транспортного уравнения, эллиптического уравнения и двух уравнений теплопроводности.

Система уравнений гиперболо-эллиптического типа изучена в [4], [5] при условии гладкости коэффициентов уравнений. Успех теории разрешимости уравнений динамики вязкого газа зависит от продвижения в теории разрешимости транспортного уравнения.

Рассмотрим транспортное уравнение

$$\partial_t \tau + (u \cdot \nabla \tau) = f, \quad (\tau|_{t=0} = \tau_0(x)). \tag{1}$$

Здесь $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, $(0, T)$ — интервал времени.

Для доказательства сильной сходимости приближенных решений уравнения (1) введено понятие ренормализованного решения [6] транспортного уравнения (1).

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: leb@iam.dvo.ru

Решение τ транспортного уравнения (1) называется ренормализованным, если для любой функции $\Phi \in C^1$ композиция $\Phi \circ \tau$ также является решением (1). Если τ — гладкая функция, то ренормализация следует немедленно из транспортного уравнения (1), но для ограниченного распределения τ это следствие доказывается с помощью операции усреднения и зависит от регулярности поля u.

Отметим работу [7], в которой доказано существование ренормализованного решения транспортного уравнения (1) в пространстве функций с ограниченной вариацией. Получены условия единственности и стабилизируемости ренормализованного решения транспортного уравнения (1).

Теория разрешимости в классах регулярных решений краевых задач для транспортного уравнения развита в книге [8].

В работе [6] установлено существование и единственность обобщенного решения $\tau \in L^\infty(0,T;L^p(\Omega))$ транспортного уравнения (1) при условии

$$\operatorname{div} u \in L^1(0,T;L^\infty(\Omega)), \quad f \in L^1(0,T;L^p(\Omega)), \quad \tau_0 \in L^p(\Omega), \quad 1 \le p \le \infty.$$

В работе доказана теорема существования решения гиперболо-параболической системы. Доказательство проводится методом регуляризации. Используется эллиптическая регуляризация со специально выбранными краевыми условиями.

Для формулировки основного результата введем необходимые функциональные пространства. Через $H^l(\Omega)$, l — натуральное число, обозначается пространство Соболева функций, суммируемых с квадратом вместе с производными до порядка $l > 0$. Пусть $H_0^1(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $H^1(\Omega)$. Положим

$$W^{1,2(l)}(Q) = \left\{u \in L^2\left(0,T;H^{l+2}(\Omega)\right) : \partial_t u \in L^2\left(0,T;H^l(\Omega)\right)\right\}.$$

Норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$. Пространства функций, состоящие из l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\bar{\Omega}$, обозначим $C^l(\bar{\Omega})$.

Постановка задачи. Регуляризация

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$, $T > 0$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра Q. Рассмотрим задачу для гиперболо-параболической системы с данными Коши:

$$\partial_t \tau + (u \cdot \nabla\tau) - k\tau \operatorname{div} u = f, \quad \tau|_{t=T} = \tau_T, \tag{2}$$

$$\partial_t f + \Delta f = g + \Delta\tau, \quad (\nabla f \cdot n)|_\Sigma = 0, \quad f|_{t=T} = f_T; \quad \int\limits_\Omega f\,dx = 0. \tag{3}$$

Здесь $k \ge 0 = const$, $u = (u_1, u_2)$, g, τ_T, f_T — заданные функции, $n = (n_1, n_2)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Предполагается, что известные функции обладают следующими свойствами:

$$u \in W^{1,2(1)}(Q) \cap L^\infty(0,T;W_\infty^2(\Omega)), \quad (u \cdot n)|_\Sigma = 0; \tag{4}$$

$$g \in L^2(Q); \tag{5}$$

$$\tau_T \in H^2(\Omega), \qquad f_T \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

где n — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Система (2), (3) состоит из уравнений, сопряженных уравнениям неразрывности и импульса в механике сплошной среды [9], заданных в момент времени $t = 0$. Функция τ из уравнения (2) является сопряженной с состоянием плотности, а функция f, определенная в (3), сопряжена с потенциальной составляющей скорости.

Коэффициенты $u = (u_1; u_2)$ играют роль вектора скорости, а через ρ обозначается плотность среды. Функция ρ удовлетворяет дифференциальному закону сохранения массы для сжимаемой среды

$$\partial_t\rho + (u \cdot \nabla\rho) + \rho \text{div}\, u = 0, \quad \rho|_{t=T} = \rho_T. \tag{7}$$

Здесь u определен в (4), ρ_T — задана, причем

$$\rho_T \in W^1_\infty(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad 0 < m_T \le \rho_T \le M_T < \infty, \tag{8}$$

где постоянные m и M зависят от исходных данных: T, m_T, M_T, $\|\text{div}\, u\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}$.

Покажем, что вследствие (4), (7), (8) ρ обладает свойствами гладкости:

$$\rho \in W^{1,2(0)}(Q) \cap L^\infty(0,T;W^1_\infty(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \quad 0 < m \le \rho \le M < \infty. \tag{9}$$

Для гиперболического уравнения первого порядка в (7) характеристики определяются из задачи Коши

$$\frac{d\bar{x}}{d\ell} = u(\ell,\bar{x}), \quad \bar{x}|_{\ell=t} = x \in \bar{\Omega}, \tag{10}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(\ell,x,t)$, (t,x) — начальные данные.

Дифференцируя по переменным x, t уравнение в (10), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\ell}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial u(\ell,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial x},\\
&\frac{d}{d\ell}\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(\ell,\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u(\ell,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial x^2},\\
&\frac{d}{d\ell}\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = \frac{\partial u(\ell,\bar{x})}{\partial\bar{x}}\frac{\partial\bar{x}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Используя краевое условие в (10), из равенств в (11) найдем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar{x}}{\partial x} = \exp\left\{-\int_\ell^t \frac{\partial u(\ell',\bar{x})}{\partial\bar{x}}\, d\ell'\right\},\\
&\frac{\partial^2\bar{x}}{\partial x^2} = -\int_\ell^t \exp\left\{-\int_\ell^{\ell'} \frac{\partial u(\ell'',\bar{x})}{\partial\bar{x}}\, d\ell''\right\}\frac{\partial^2 u(\ell',\bar{x})}{\partial\bar{x}^2}\left(\frac{\partial\bar{x}}{\partial x}\right)^2 d\ell',\\
&\frac{\partial\bar{x}}{\partial t} = u\exp\left\{-\int_\ell^t \frac{\partial u(\ell',\bar{x})}{\partial\bar{x}}\, d\ell'\right\}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Выведем оценки решения задачи (10), учитывая (12), (4):

$$\left\|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right\|_{L^\infty(Q)} \le e^{T\|\mathrm{div}\ u\|_{L^\infty(Q)}} \le c,$$
$$\left\|\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial x^2}\right\|_{L^\infty(Q)} \le \|u\|_{L^\infty(0,T;W^2_\infty(\Omega))} e^{3T\|\mathrm{div}\ u\|_{L^\infty(Q)}} \le c,$$
$$\left\|\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\right\|_{L^\infty(Q)} \le \|u\|_{L^\infty(Q)} e^{T\|\mathrm{div}\ u\|_{L^\infty(Q)}} \le c, \tag{13}$$

где постоянная c зависит только от T и $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^2_\infty(\Omega))}$.

В силу оценок (13) задача (10) имеет единственное решение непрерывное по (t,x). Решение ρ задачи (7) однозначно найдем методом характеристик

$$0 < \rho(t,x) = \rho_T(\bar{x}(\ell,x,t))|_{\ell=T} \exp\left\{-\int_t^T \mathrm{div}\ u(\ell,\bar{x}(\ell,x,t))\,d\ell\right\}, \tag{14}$$

где $\bar{x}$ — решение задачи (10). Из равенства (14) путем дифференцирования по переменным x, t, учитывая (8) и оценки в (13), получим

$$\|\rho\|^2_{W^{1,2(0)}(Q)} \le c, \quad \|\rho\|^2_{L^\infty(0,T;W^1_\infty(\Omega))} \le c, \quad \|\rho\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le c.$$

Определение 1. *Функции $(\tau,f) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $\partial_t\tau \in L^2(Q)$, $\partial_t f \in L^2(Q)$ называются сильным решением задачи (2), (3), если уравнения (2), (3) выполняется почти всюду, а условия при $t=T$ — почти всюду в Ω.*

Покажем, что обобщенное решение (τ,f) задачи (2), (3) единственно.

Используя (7), перепишем уравнение (2) в следующем виде: $\rho(\partial_t\tau + (u\cdot\nabla\tau)) + k\tau(\partial_t\rho + (u\cdot\nabla\rho)) = \rho f$, или

$$\partial_t(\rho^k\tau) + (u\cdot\nabla(\rho^k\tau)) = \rho^k f. \tag{15}$$

Применяя метод характеристик к уравнению (15) и учитывая условие в (2) при $t=T$, получим

$$\tau(t,x) = \tau_T(\bar{x}(T,x,t))\rho_T^k(\bar{x}(T,x,t))\rho^{-k}(t,x) - \\ - \rho^{-k}(t,x)\int_t^T \rho^k(\ell,\bar{x}(\ell,x,t)) f(\ell,\bar{x}(\ell,x,t))\,d\ell, \tag{16}$$

где $\bar{x}(\ell,x,t) = x + \int\limits_t^\ell u(\ell',\bar{x})\,d\ell'$ для всех $(t,x)\in Q$. Из (16), учитывая регулярность функции ρ в (9), $f \in W^{1,2(0)}(Q)$, $\tau_T \in H^2(\Omega)$, (13) и неравенство из теоремы вложения [10] для элементов $w \in H^2(\Omega)$, оценивающее значение $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}|w|$ через норму $\|w\|_{H^2(\Omega)}$, нетрудно вывести оценку

$$\|\tau\|^2_{H^2(\Omega)} \le c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\int_t^T \|\Delta f\|^2\,d\ell \quad \text{для п.в. }, \quad t\in(0,T). \tag{17}$$

Умножим уравнение (3) на Δf скалярно в $L^2(\Omega)$. Учитывая краевое условие (3) и неравенство в (17), получим

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla f\|^2 + \|\Delta f\|^2 = \int\limits_{\Omega} g\Delta f\, dx + \int\limits_{\Omega} \Delta\tau\Delta f\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\Delta f\|^2 + c\|g\|^2 + c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\int\limits_t^T \|\Delta f\|^2\, d\ell. \tag{18}$$

Проинтегрируем неравенство (18) от t до T, найдем

$$\|\nabla f\|^2 + \int\limits_t^T \|\Delta f\|^2\, d\ell \leq c\|g\|^2_{L^2(Q)} + c\|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\int\limits_t^T\int\limits_{\ell}^T \|\Delta f\|^2\, d\ell'\, d\ell. \tag{19}$$

Применяя лемму Гронуолла к выражению (19) и учитывая (17), запишем оценку

$$\|\tau\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \int\limits_0^T \|f\|^2_{H^2(\Omega)}\, d\ell \leq c\|g\|^2_{L^2(Q)} + c\|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)}, \tag{20}$$

где постоянная c не зависит от τ, f.

Из неравенства (20), вследствие линейности системы уравнений (2), (3), вытекает единственность обобщенного решения (τ, f) задачи (2), (3).

Для доказательства разрешимости будем аппроксимировать задачу (2), (3) некоторой задачей параболического типа. Пусть ε — данное положительное число. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (4)–(6). Тогда существуют единственные функции* $(\tau_\varepsilon, f_\varepsilon) \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \times L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $\partial_t\tau_\varepsilon \in L^2(Q)$, $\partial_t f_\varepsilon \in L^2(Q)$, *для которых*

$$\partial_t\tau_\varepsilon + \varepsilon\Delta\tau_\varepsilon + (u\cdot\nabla\tau_\varepsilon) - k\tau_\varepsilon div\ u = f_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon|_{t=T} = \tau_T; \tag{21}$$

$$\partial_t f_\varepsilon + \Delta f_\varepsilon = g + \Delta\tau_\varepsilon, \quad f_\varepsilon|_{t=T} = f_T, \quad \int\limits_{\Omega} f_\varepsilon\, dx = 0; \tag{22}$$

$$\tau_\varepsilon|_\Sigma = \mathcal{P}(T,t,\bar{x})\tau_T(x) - \int\limits_t^T \mathcal{P}(\ell,t,\bar{x}) f_\varepsilon(\ell,\bar{x})\, d\ell, \quad \ell \in (0,T), \quad (t,x) \in \Sigma; \tag{23}$$

$$(\nabla f_\varepsilon \cdot n)|_\Sigma = 0, \tag{24}$$

где

$$\mathcal{P}(\ell,t,\bar{x}) = \rho^k(\ell,\bar{x})/\rho^k(t,x), \quad \bar{x} = \bar{x}(\ell,x,t) = x + \int\limits_t^{\ell} u(\ell',\bar{x})\, d\ell', \quad \ell \in (0,T).$$

Если $\varepsilon \to 0$, то

$$\begin{aligned}&\tau_\varepsilon \to \tau \quad \text{в} \quad L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \quad f_\varepsilon \to f \quad \text{в} \quad L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\ &\partial_t\tau_\varepsilon \to \partial_t\tau, \quad \partial_t f_\varepsilon \to \partial_t f \quad \text{в} \quad L^2(Q),\end{aligned} \tag{25}$$

где (τ, f) — обобщенное решение задачи (2), (3). И справедлива оценка

$$\begin{aligned}\|\partial_t\tau\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\partial_t f\|^2_{L^2(Q)} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}+\\ +\|\tau\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|f\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\,dt \le\\ \le c(\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2),\end{aligned} \tag{26}$$

где постоянная c не зависит от ε.

Доказательство. Нашей целью в дальнейшем будет, во-первых, доказательство разрешимости задачи (21)–(24) при фиксированном значении параметра ε, а во-вторых, обоснование сходимости обобщенных решений при $\varepsilon \to 0$.

Прежде всего установим однозначную разрешимость следующей задачи:

$$\begin{aligned}\partial_t\tau_\varepsilon + \varepsilon\Delta\tau_\varepsilon + (u\cdot\nabla\tau_\varepsilon) - k\tau_\varepsilon \operatorname{div} u = f_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon|_{t=T} = \tau_T,\\ \tau_\varepsilon|_\Sigma = r_\varepsilon|_\Sigma,\end{aligned} \tag{27}$$

причем f_ε, τ_T, r_ε, удовлетворяют соотношениям

$$\partial_t r_\varepsilon + (u\cdot\nabla r_\varepsilon) - k r_\varepsilon \operatorname{div} u = f_\varepsilon, \qquad r_\varepsilon|_{t=T} = \tau_T, \tag{28}$$

где $f_\varepsilon \in W^{1,2}(Q)$, $\tau_T \in H^2(\Omega)$, постоянная $k \ge 0$, вектор-функция u определена в (4).

Точно так же, как в (17), из равенства в (28) получим оценку

$$\|r_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}. \tag{29}$$

Отсюда и из уравнения (27) найдем

$$\|\partial_t r_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}. \tag{30}$$

Таким образом, установлено, что $r_\varepsilon \in W^{1,2}(Q)$. Следовательно, определен след [11] на границе $r_\varepsilon|_\Sigma \in H^{3/4,3/2}(\Sigma)$ и выполняется оценка

$$\|r_\varepsilon\|^2_{H^{3/4,3/2}(\Sigma))} \le \|r_\varepsilon\|^2_{W^{1,2}(Q)} \le c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}. \tag{31}$$

Отметим, что из (29) справедливо неравенство

$$\|r_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \le \|r_\varepsilon\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \le c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\|f_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}. \tag{32}$$

Заметим, что в оценках (30)–(33) постоянная c не зависит от ε, f_ε, τ_ε.

Однозначная разрешимость задачи (27) в пространстве $W^{1,2}(Q)$ следует из классических результатов, говорящих о разрешимости параболических краевых задач с регулярными коэффициентами [10].

Мы показали, что разрешающий оператор R_1 задачи (21), (23), сопоставляющий правой части f_ε и финальному значению τ_T решение $\tau_\varepsilon = R_1(f_\varepsilon, \tau_T)$, действует непрерывно из $W^{1,2}(Q) \times H^2(\Omega)$ в $W^{1,2}(Q)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\partial_t f + \Delta f = h, \quad f|_{t=T} = f_T, \quad \int\limits_\Omega f\, dx = 0, \quad (\nabla f \cdot n)|_\Sigma = 0. \tag{33}$$

Хорошо известно [10], что задача (33) корректна. Запишем решение задачи (33) через разрешающий оператор этой задачи $f = R_2(h, f_T)$, который непрерывно действует из $W^{1,2}(Q) \times H^1(\Omega)$ в $W^{1,2}(Q)$.

Будем искать решение задачи (22), (24) в виде $f_\varepsilon = R_2(h_\varepsilon, f_T)$. Тогда из уравнения (22) получим

$$h_\varepsilon = g + \Delta R_1(R_2(h_\varepsilon, f_T), \tau_T).$$

Так как вложение $W^{1,2}(Q) \subset L^2(Q)$ компактно, оператор $\Delta \circ R_1 \circ R_2 \colon L^2(Q) \to L^2(Q)$ вполне непрерывен. Применяя альтернативу Фредгольма, учитывая, что индекс оператора $I + \Delta \circ R_1 \circ R_2 \colon L^2(Q) \to L^2(Q)$ равен нулю и что уравнения (21), (22) линейны, получаем однозначную разрешимость задачи (21)–(24).

Покажем, что из уравнения (21) вытекает следующее свойство обобщенного решения задачи (21)–(24):

$$\Delta \tau_\varepsilon|_\Sigma = 0. \tag{34}$$

Действительно, вычитая из уравнения (21) уравнение (28), в котором r, f заменены на r_ε, f_ε соответственно, получим равенства для разности $(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)$ в области, на границе и в точке $t = T$:

$$\partial_t(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon) + \varepsilon\Delta\tau_\varepsilon + (u \cdot \nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)) - k(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)\mathrm{div}\, u = 0, \quad (\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)|_{t=T} = 0,$$
$$(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)|_\Sigma = 0. \tag{35}$$

Пусть произвольная вектор-функция $v \in H^1(\Omega)$. Умножим уравнение (35) на $\mathrm{div}\ v$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и применим формулу Грина, учитывая, что левая часть равенства в (35) является обобщенной функцией, найдем

$$\frac{d}{dt} \left\langle (\tau_\varepsilon - r_\varepsilon), (v \cdot n) \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} + \varepsilon \left\langle \Delta\tau_\varepsilon, (v \cdot n) \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} +$$
$$+ \left\langle (u \cdot \nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)), (v \cdot n) \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} -$$
$$-k \left\langle (\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)\mathrm{div}\ u, (v \cdot n) \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ — соотношение двойственности между пространством X и сопряженным с ним X'.

Так как $(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)|_\Sigma = 0$, то в любой точке границы $\partial\Omega$ вектор внешней нормали коллинеарен градиенту функции $\nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon)$. Следовательно, $(\nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon))|_\Sigma = ((\nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon) \cdot n)n)|_\Sigma$. Отсюда и из условия (4) следует $(u \cdot \nabla(\tau_\varepsilon - r_\varepsilon))|_\Sigma = 0$. Поэтому, учитывая краевые условия (35), получим

$$\int\limits_t^T \left\langle \Delta\tau_\varepsilon, (v \cdot n) \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)}\ dt = 0 \qquad \forall t \in (0, T). \tag{36}$$

Из равенства (36) в силу того, что $t \in (0,T)$ произвольно, следует (34).

Получим априорные оценки, не зависящие от ε, обобщенного решения задачи (21)–(24), учитывая (34). Пусть $\xi \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$ — произвольная функция. Умножим уравнение (21) на $\Delta\xi$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и применим вторую формулу Грина, учитывая краевые условия (23), (34), получим равенство

$$\int\limits_\Omega \Delta\left(\partial_t \tau_\varepsilon + (u\cdot\nabla\tau_\varepsilon) - k\tau_\varepsilon \mathrm{div}\, u\right)\xi\, dx - \varepsilon \int\limits_\Omega (\nabla\Delta\tau_\varepsilon\cdot\nabla\xi)\, dx = \int\limits_\Omega \Delta f_\varepsilon \xi\, dx \qquad (37)$$

для почти всех $t \in (0,T)$. Положим в (37) $\xi = \Delta\tau_\varepsilon$, найдем

$$\int\limits_\Omega \left(\partial_t\Delta(\tau_\varepsilon) + (u\cdot\nabla\Delta\tau_\varepsilon) - k\Delta\tau_\varepsilon \mathrm{div}\, u\right)\Delta\tau_\varepsilon\, dx - \varepsilon\int\limits_\Omega (\nabla\Delta\tau_\varepsilon\cdot\nabla\Delta\tau_\varepsilon)\, dx +$$
$$+\int\limits_\Omega S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon\, dx = \int\limits_\Omega \Delta f_\varepsilon\Delta\tau_\varepsilon\, dx \quad \text{для почти всех} \quad t\in(0,T), \qquad (38)$$

где

$$S(a) = (\Delta u\cdot\nabla a) + 2\partial_{x_j}u_i\partial^2_{x_ix_j}a - ka\Delta\mathrm{div}\, u - 2k(\nabla\mathrm{div}\, u\cdot\nabla a), \quad i,j=1,2. \qquad (39)$$

Используя неравенство Коши и вложение пространств $H^2 \subset C(\bar\Omega)$, найдем оценку следующего выражения:

$$\int\limits_\Omega S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon\, dx =$$
$$= (1-2k)\int\limits_\Omega (\Delta u\cdot\nabla\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon\, dx + 2\int\limits_\Omega (\partial_{x_j}u_i\partial^2_{x_ix_j}\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon\, dx - k\int\limits_\Omega \tau_\varepsilon\Delta\tau_\varepsilon\Delta\mathrm{div}\, u\, dx \le$$
$$\le c\|\Delta\tau_\varepsilon\|\left(\|\Delta u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\nabla\tau_\varepsilon\|^2_{L^4(\Omega)} + \|u\|_{W^1_\infty(\Omega)}\|\tau_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^3(\Omega)}\|\tau_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\right) \le$$
$$\le c\|u\|^2_{H^3(\Omega)}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + \delta_1\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)}. \qquad (40)$$

Из (38), учитывая (40), выводим оценку

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + \varepsilon\|\nabla\Delta\tau_\varepsilon\|^2 =$$
$$= \frac{2k+1}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{div}\, u(\Delta\tau_\varepsilon)^2\, dx + \int\limits_\Omega \Delta f_\varepsilon\Delta\tau_\varepsilon\, dx - \int\limits_\Omega S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon\, dx \le$$
$$\le c\|u\|^2_{H^3(\Omega)}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + \delta_1\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)} + \delta_2\|\Delta f_\varepsilon\|^2, \qquad (41)$$

где постоянные c, δ_1, δ_2 не зависят от ε, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Для оценки выражения $\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)}$ используем теорему о разрешимости краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области [11], согласно которой

$$\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)} \le c\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + c\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^{3/2}(\partial\Omega)} = c\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + c\|r_\varepsilon\|^2_{H^{3/2}(\partial\Omega)} \le$$
$$\le c\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + c\|r_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)} \le c\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + c\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + c\int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, d\ell \quad \forall t\in(0,T). \qquad (42)$$

Последнее неравенство в (42) верно в силу аналогичной оценки (32), выведенной для r_ε, удовлетворяющей (28) с правой частью f_ε.

Пусть $\delta = 2T(c\delta_1 + \delta_2)$. Подставим оценку (42) в правую часть (41), получим

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + \varepsilon\|\nabla\Delta\tau_\varepsilon\|^2 \le \frac{\delta}{2T}\int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, d\ell + c\|u\|^2_{H^3(\Omega)}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + \|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)}. \quad (43)$$

Проинтегрируем (43) от произвольной точки t до T

$$\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + 2\varepsilon\int\limits_t^T \|\nabla\Delta\tau_\varepsilon\|^2\, d\ell \le c\int\limits_t^T \|u\|^2_{H^3(\Omega)}\|\Delta\tau_\varepsilon\|^2\, d\ell + \delta\int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, d\ell + \|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)}. \quad (44)$$

Используя лемму Гронуолла, из (42), (44), получим оценку

$$\max_{0\le t\le T}\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)} \le c\int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, d\ell + \|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)}. \quad (45)$$

Умножим скалярно в $L^2(\Omega)$ уравнение в (22) на Δf_ε и применим формулу Грина, учитывая второе условие в (23), получим

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla f_\varepsilon\|^2 + \frac{1}{2}\|\Delta f_\varepsilon\|^2 \le \|\Delta\tau_\varepsilon\|^2 + c\|g\|^2. \quad (46)$$

Проинтегрируем (46) от t до T. Используя лемму Гронуолла, найдем оценку

$$\|\nabla f_\varepsilon\|^2 + \int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, ds \le c\|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + c_1\|g\|^2 + c\int\limits_t^T \|\Delta\tau_\varepsilon\|^2\, ds, \quad (47)$$

где постоянная c не зависит от ε.

Пусть $\delta = 1/2$. Складывая неравенства (47), (44) и применяя лемму Гронуолла к получившемуся выражению, получим равномерную по ε оценку

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\|\nabla f_\varepsilon\|^2 + \|\Delta\tau_\varepsilon\|^2\right) + \int\limits_0^T \|\Delta f_\varepsilon\|^2\, dt + \varepsilon\int\limits_0^T \|\nabla\Delta\tau_\varepsilon\|^2\, dt \le$$
$$\le c\left(\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(Q)}\right). \quad (48)$$

Учитывая (48), из (42) найдем

$$\max_{t\in[0,T]}\|\tau_\varepsilon\|^2_{H^2(\Omega)} \le c\left(\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(Q)}\right). \quad (49)$$

Отсюда и из уравнений (21), (22), получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|\partial_t\tau_\varepsilon\|^2 + \int\limits_0^T \|\partial_t f_\varepsilon\|^2\, dt \le c\left(\|\tau_T\|^2_{H^2(\Omega)} + \|f_T\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right), \quad (50)$$

где постоянная c не зависит от ε.

Осуществим предельный переход по $\varepsilon \to 0$. Из оценок (48)–(50) следует, что при $\varepsilon \to 0$ из последовательности $(\{\tau_\varepsilon\}, \{f_\varepsilon\})$ можно выделить подпоследовательность – обозначим ее также через $(\{\tau_\varepsilon\}, \{f_\varepsilon\})$, – что

$$\begin{aligned}
&\tau_\varepsilon \to y \quad \star-\text{слабо в} \quad L^\infty(0,T;H^2(\Omega)), \quad f_\varepsilon \to z \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;H^2(\Omega)),\\
&f_\varepsilon \to z \quad \star-\text{слабо в} \quad L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\\
&\partial_t\tau_\varepsilon \to \partial_t y, \quad \partial_t f_\varepsilon \to \partial_t z \quad \text{слабо в} \quad L^2(Q),
\end{aligned} \tag{51}$$

кроме того,

$$\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\Delta\tau_\varepsilon\|_{L^2(Q)} < c. \tag{52}$$

На основе сходимостей в (51) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в уравнениях и в условиях (21)–(24). Тогда $\tau_\varepsilon|_{t=T} \to y|_{t=T}$, $f_\varepsilon|_{t=T} \to z|_{t=T}$ слабо в $L^2(\Omega)$, поэтому $y|_{t=T} = \tau_T$, $z|_{t=T} = f_T(x)$. Как сказано в [10, с. 85], пространство $H^2(\Omega)$ вкладывается в $C(\bar\Omega)$ так, что для его элементов определены значения во всех точках $\bar\Omega$. Так как $f \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$, то из уравнения (2) получим $\partial_t\tau + (u\cdot\nabla\tau) - k\tau\text{div } u = f \in L^2(0,T;C(\bar\Omega))$. Из (4) и [10, с. 85] следует $\int\limits_0^T \|u\|^2_{C^1(\bar\Omega)}\,dt < c$. Отсюда заключаем, что обобщенное решение τ задачи (2) можно однозначно найти методом характеристик

$$\tau(t,x) = \mathcal{P}(T,t,\bar x)\tau_T(x) - \int\limits_t^T \mathcal{P}(\ell,t,\bar x)f(\ell,\bar x)\,d\ell, \tag{53}$$

где $\mathcal{P}(\ell,t,\bar x) = \rho^k(\ell,\bar x)/\rho^k(t,x)$, $\bar x = \bar x(\ell,x,t)$.

Перейдем к пределу по $\varepsilon \to 0$ в (23). Учитывая (53), найдем

$$\tau_\varepsilon|_\Sigma = \mathcal{P}(T,t,\bar x)\tau_T(x) - \int\limits_t^T \mathcal{P}(\ell,t,\bar x)f_\varepsilon(\ell,\bar x)|_\Sigma\,d\ell \to$$
$$\to \left(\mathcal{P}(\ell,t,\bar x)|_{\ell=T}\tau_T(x) - \int\limits_t^T \mathcal{P}(\ell,t,\bar x)f(\ell,\bar x)|_\Sigma\,d\ell\right) = \tau|_\Sigma$$

слабо в $L^\infty(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$. И вследствие единственности решения задачи (2), (3) $y = \tau$, $z = f$.

Покажем теперь сильную сходимость. Учитывая компактность вложения пространств $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ из сходимостей (51), заключаем, что $\tau_\varepsilon \to \tau$ в $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, $f_\varepsilon \to f$ в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, а из оценки (52) следует, что при $\varepsilon \to 0$ $\sqrt{\varepsilon}\Delta\tau_\varepsilon \to 0$ в $L^2(Q)$. Тогда из уравнения (21)

$$\partial_t\tau_\varepsilon = f_\varepsilon - (u\cdot\nabla\tau_\varepsilon) - \varepsilon\Delta\tau_\varepsilon + k\text{div } u\tau_\varepsilon \to f - (u\cdot\nabla\tau) + k\text{div } u\tau = \partial_t\tau \quad \text{в} \quad L^2(Q).$$

Перепишем уравнения (2), (21) в следующем виде:

$$\partial_t(\Delta\tau) + (u\cdot\nabla\Delta\tau) - k\text{div } u\Delta\tau + S(\tau) = \Delta f, \tag{54}$$
$$\partial_t(\Delta\tau_\varepsilon) + \varepsilon\Delta^2\tau_\varepsilon + (u\cdot\nabla\Delta\tau_\varepsilon) - k\text{div } u\Delta\tau_\varepsilon + S(\tau_\varepsilon) = \Delta f_\varepsilon, \tag{55}$$

где $S(a)$ определено в (39). На основании сходимостей (25) нетрудно установить оценку

$$\|S(\tau_\varepsilon) - S(\tau)\| \le c\|u\|_{H^3(\Omega)}\|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\| + \|\Delta f_\varepsilon - \Delta f\|, \quad \text{для п.в.} \quad t \in (0,T). \tag{56}$$

Из уравнений (3), (22), найдем

$$\int\limits_t^T \|\Delta f_\varepsilon - \Delta f\|\, ds \le c \int\limits_t^T \|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|\, ds. \tag{57}$$

Рассмотрим выражение

$$X_\varepsilon(t) = \|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|^2 + 2\varepsilon \int\limits_t^T \int\limits_\Omega |\nabla\Delta\tau_\varepsilon|^2\, dxds \quad \forall t \in [0,T]. \tag{58}$$

Учитывая (54), (55), легко проверить, что

$$\begin{gathered} X_\varepsilon(t) = 2\int\limits_\Omega |\Delta\tau_T|^2\, dx - 2\int\limits_t^T\int\limits_\Omega (\Delta f_\varepsilon\Delta\tau_\varepsilon + \Delta f\Delta\tau)\ dxds - 2\int\limits_t^T\int\limits_\Omega \Delta\tau_\varepsilon\Delta\tau\ dxds - \\ -(1+2k)\int\limits_t^T\int\limits_\Omega \operatorname{div} u\left(|\Delta\tau_\varepsilon|^2 + |\Delta\tau|^2\right)\ dxds + 2\int\limits_t^T\int\limits_\Omega (S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau_\varepsilon + S(\tau)\Delta\tau)\, dxds. \end{gathered} \tag{59}$$

С другой стороны, из тех же равенств следует, что

$$\int\limits_\Omega (\partial_t\Delta\tau_\varepsilon)\Delta\tau\ dx + \varepsilon\int\limits_\Omega (\nabla\Delta\tau_\varepsilon\cdot\nabla\Delta\tau)\ dx + \int\limits_\Omega (u\cdot\nabla\Delta\tau_\varepsilon)\Delta\tau\ dx - k\int\limits_\Omega \operatorname{div} u\Delta\tau_\varepsilon\Delta\tau\ dx +$$

$$+\int\limits_\Omega S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau\ dx = \int\limits_\Omega \Delta f_\varepsilon\Delta\tau\ dx,$$

$$\int\limits_\Omega (\partial_t\Delta\tau)\Delta\tau_\varepsilon\ dx + \int\limits_\Omega (u\cdot\nabla\Delta\tau)\Delta\tau_\varepsilon\ dx - k\int\limits_\Omega \operatorname{div} u\Delta\tau\Delta\tau_\varepsilon\ dx +$$

$$+\int\limits_\Omega S(\tau)\Delta\tau_\varepsilon\ dx = \int\limits_\Omega \Delta f\Delta\tau_\varepsilon\ dx,$$

и поэтому

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \Delta\tau_\varepsilon\Delta\tau\ dx = \varepsilon\int\limits_t^T\int\limits_\Omega (\nabla\Delta\tau_\varepsilon\cdot\nabla\Delta\tau)\ dx + \int\limits_\Omega |\Delta\tau_T|^2\ dx - \\ -\int\limits_t^T\int\limits_\Omega (\Delta f_\varepsilon\Delta\tau + \Delta f\Delta\tau_\varepsilon)\ dxds - (1+2k)\int\limits_t^T\int\limits_\Omega \operatorname{div} u\Delta\tau_\varepsilon\Delta\tau\ dxds + \\ +\int\limits_t^T\int\limits_\Omega (S(\tau_\varepsilon)\Delta\tau + S(\tau)\Delta\tau_\varepsilon)\ dxds. \end{gathered} \tag{60}$$

Подставляя (60) в (59) и учитывая (56), (57), (58), получим

$$\|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|^2 + 2\varepsilon \int\limits_t^T \int\limits_\Omega |\nabla\Delta\tau_\varepsilon|^2\, dxds = 2\varepsilon \int\limits_t^T \int\limits_\Omega (\nabla\Delta\tau_\varepsilon \cdot \nabla\Delta\tau)\, dxds -$$

$$-2\int\limits_t^T \int\limits_\Omega (\Delta f_\varepsilon - \Delta f)(\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau)\, dxdt - (1+2k)\int\limits_t^T \int\limits_\Omega \operatorname{div} u\, (\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau)^2\, dxds +$$

$$+2\int\limits_t^T \int\limits_\Omega (S(\tau_\varepsilon) - S(\tau))(\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau)\, dxds \le$$

$$\le 2\varepsilon \int\limits_t^T \int\limits_\Omega |(\nabla\Delta\tau_\varepsilon \cdot \nabla\Delta\tau)|\, dxds + c\int\limits_t^T (\|u\|^2_{H^3(\Omega)} + 1)\|\Delta\tau - \Delta\tau_\varepsilon\|^2\, ds. \tag{61}$$

Применяя лемму Гроноулла к (61), найдем

$$\|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|^2 \le c\varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |(\nabla\Delta\tau_\varepsilon \cdot \nabla\Delta\tau)|\, dxdt, \tag{62}$$

где постоянная $c = c(\|u\|_{L^2(0,T;H^3(\Omega))})$ не зависит от ε. Из (62), учитывая (52), заключаем, что $\|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|^2 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\Delta\tau_\varepsilon \to \Delta\tau$ сильно в $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Отсюда, из (57) и второго условия (23), получаем $f_\varepsilon \to f$ в $L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Установим сильную сходимость $\tau_\varepsilon \to \tau$ при $\varepsilon \to 0$ в пространстве $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Рассмотрим равенство (53) при $(t,x) \in \Sigma$, учитывая краевое условие (23), получим выражение для разности:

$$(\tau_\varepsilon - \tau) = \int\limits_t^T \mathcal{P}(\ell,t,\bar{x})(f_\varepsilon(\ell,\bar{x}) - f(\ell,\bar{x}))\, d\ell, \tag{63}$$

где $\bar{x} = \bar{x}(\ell,x,t) = x + \int\limits_t^\ell u(\ell',\bar{x})\, d\ell'$, $(t,x) \in \Sigma$.

Для функции $(f_\varepsilon - f) \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ действует непрерывный оператор следа [11] $(f_\varepsilon - f)|_\Sigma \in L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$ на границу Σ и выполняется оценка

$$\|(f_\varepsilon - f)|_\Sigma\|^2_{L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \le c\|f_\varepsilon - f\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \tag{64}$$

Используя неравенство (64) и регулярность функции $\mathcal{P}(\ell,t,\bar{x}) = \rho^k(\ell,\bar{x})/\rho^k(t,x)$, где ρ определена в (9), из (63), найдем

$$\|(\tau_\varepsilon - \tau)|_\Sigma\|^2_{L^\infty(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \le c\Big\|\mathcal{P}(\ell,t,\bar{x})(f_\varepsilon(\ell,\bar{x}) - f(\ell,\bar{x}))\Big\|^2_{L^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \le$$

$$\le c\|f_\varepsilon - f\|^2_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \to 0, \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{65}$$

Применяя теорему о разрешимости задачи Дирихле для оператора Лапласа в ограниченной области [11] к $(\tau_\varepsilon - \tau)$, получим оценку

$$\|\tau_\varepsilon - \tau\|^2_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} \leq c\|\Delta\tau_\varepsilon - \Delta\tau\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)} + c\|(\tau_\varepsilon - \tau)|_\Sigma\|^2_{L^\infty(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$, из которой следует $\tau_\varepsilon \to \tau$ сильно в $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$. Теорема доказана.

Теорема существования исходной задачи доказывается при помощи эллиптической регуляризации уравнения переноса. Данный способ регуляризации оказывается полезным при анализе других краевых задач, а также в теории управляемости.

Список литературы

[1] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "On controllability of certain systems simulating a fluid flow", *IMA Vol.Math.Appl.*, **68** (1995), 149–184.

[2] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations", *Acta Appl. Math.*, **37** (1994), 67–76.

[3] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределительными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Н., 1999.

[4] G. Fichera, "Sulle equazioni differenziali lineari elliptico-paraboliche del secondo ordine", *Atti Accad. naz. Lincey, Mem. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, **5(1)** (1956), P.30..

[5] O. A. Oleinik, E. V. Radkevich, *Second order equation with non-negative characteristic form*, New York-London, American Math. Soc., Providence, Rhode Island Plenum Press, 1973.

[6] R. J. DiPerna, P. L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces", *Invent. Math.*, **98** (1989), 511–547.

[7] L. Ambrosio, "Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields", *Invent. Math.*, **158(2)** (2004), 227–260.

[8] P. Plotnikov, J. Sokolowski, *Compressible Navier-Stokes equations. Theory and shape optimization*, Birkhauser, 2012.

[9] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1968.

[10] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

[11] Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 28 марта 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00079)

Amosova E. V. Analysis of the uniqueness and stability of hyperbolic-parabolic system. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 123–136.

ABSTRACT

A theorem of existence and uniqueness for hyperbolic-parabolic system of equations conjugate to compressible Navier-Stokes equations is proved.
Key words: *transport equation, hyperbolic-parabolic system.*