

УДК 519.6
MSC2010 65K15, 74P10

© Э. М. Вихтенко¹, Р. В. Намм^{1;2}, М. В. Червякова¹

Метод двойственности для решения модельной задачи с трещиной

Для решения модельной задачи о деформации упругой пластины с трещиной рассматривается двойственный метод, основанный на применении модифицированного функционала Лагранжа. Приведены теоремы, позволяющие обосновать использование метода Удзавы для поиска седловой точки модифицированного функционала. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: *модельная задача с трещиной, вариационное неравенство, модифицированный функционал Лагранжа, метод Удзавы, метод конечных элементов.*

Введение

Многие задачи механики и физики формулируются в виде нелинейных краевых задач для уравнений с частными производными при дополнительных условиях, наложенных на искомое решение. Применение вариационных методов позволяет перейти от нелинейных краевых задач математической физики к вариационным задачам на условный экстремум, состоящих в минимизации некоторого выпуклого функционала на выпуклом замкнутом множестве. Исследование вариационных постановок для задач механики сплошной среды можно найти в работах [1]–[5].

Данная работа посвящена анализу модели, широкий интерес к которой проявляется в последние годы. Речь идет о модельной задаче деформации упругого тела, содержащего трещину. Проблема исследования напряженно-деформированных состояний твердых тел с трещинами является актуальной задачей для большого числа производственных процессов. В классических формулировках задачи упругости с трещиной внутри области предполагается, как правило, что напряжение на берегах трещины равно нулю [6], [7]. Это условие допускает возможность проникновения берегов трещины друг в друга, что противоречит физическому смыслу процесса. В данной статье для задачи с трещиной используется модель с нелинейными

¹Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.

²Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.

Электронная почта: vikht.el@gmail.com; rnamm@yandex.ru; m.tchervyakova@yandex.ru

краевыми условиями на берегах трещины [8], [9]. Здесь краевые условия записываются в виде неравенств, соответствующих условию взаимного непроникновения берегов трещины. С точки зрения механики такие модели более предпочтительны в сравнении с их классическими аналогами.

В основе исследования поставленной проблемы составляет двойственный подход, основанный на замене задачи условной оптимизации задачей отыскания седловой точки модифицированного функционала Лагранжа. Метод рассматривался применительно к конечномерным задачам линейного и выпуклого программирования рядом авторов: Е. Г. Гольштейном и Н. В. Третьяковым [10], А. А. Капланом и К. Гроссманом [11], Д. Бертсекасом [12] и др. В работах [13], [14] эти исследования были распространены на бесконечномерные вариационные неравенства механики сплошной среды. Применение аналогичной схемы для решения задачи упругости с трещиной осложнено тем, что регулярность решения в окрестности краев трещины может быть какой угодно плохой и двойственная задача может быть неразрешимой. Несмотря на указанную проблему, удается обосновать схему двойственности для решения поставленной задачи, а также доказать равенство двойственности для исходной и двойственной задач.

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют сделать вывод об эффективности предложенного авторами метода решения модельной задачи с трещиной.

Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . Множество $\gamma \subset \Omega$ — трещина в области Ω . Пусть γ является отрезком, $\gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega: a < x_1 < b, x_2 = c\}$, причем величины a , b и c такие, что трещина γ располагается строго внутри области Ω .

Рассмотрим задачу условной минимизации функционала

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v d\Omega \longrightarrow \min, \\ v \in K = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) : [v] \geq 0 \text{ на } \gamma, v = 0 \text{ на } \Gamma\}. \end{cases} \quad (1)$$

где $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \gamma$; $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на γ (v^+ — значение функции v на верхнем берегу трещины; v^- — значение функции v на нижнем берегу трещины); знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлению вектора нормали \bar{n} к отрезку γ ; $f \in L_2(\Omega)$ — заданная функция.

Вопрос разрешимости задачи (1) подробно исследован в [9]. Задача (1) имеет единственное решение $u \in K$ и равносильна вариационному неравенству [9]

$$\int_{\Omega_\gamma} \nabla u \nabla (v - u) d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f (v - u) d\Omega \geq 0 \quad \forall v \in K. \quad (2)$$

Если предположить, что функция u принадлежит пространству $H^2(\Omega_\gamma)$, то

можно показать, что задача (2) эквивалента следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{в } \Omega_\gamma, \\ u = 0 & \text{на } \Gamma, \\ [u] \geq 0, [u_{x_2}] = 0, u_{x_2} \leq 0, u_{x_2}[u] = 0 & \text{на } \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Метод двойственности для решения модельной задачи с трещиной

Для любого $m \in L_2(\gamma)$ построим множество

$$K_m = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) : v = 0 \text{ на } \Gamma, -[v] \leq m \text{ п.в. на } \gamma\}.$$

Нетрудно показать, что K_m есть выпуклое замкнутое множество в $H^1(\Omega_\gamma)$. Множество K_m может быть пустым, например, если $[v] = \text{const} \neq 0$.

В пространстве $L_2(\gamma)$ определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Функционал $\chi(m)$ является выпуклым и коэрцитивным на множестве $L_2(\gamma)$, но его эффективная область $\text{dom} \chi = \{m \in L_2(\gamma) : \chi(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\gamma)$. Заметим также, что $\text{dom} \chi$ есть выпуклое, но не замкнутое множество, причем $\overline{\text{dom} \chi} = L_2(\gamma)$.

Теорема 1. *Функционал $\chi(m)$ слабо полунепрерывен снизу на $L_2(\gamma)$.*

Так как функционал $\chi(m)$ является выпуклым функционалом, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\chi(m)$ полунепрерывен снизу в пространстве $L_2(\gamma)$. Для установления данного факта рассматривается произвольная сходящаяся последовательность $\{m_i\} \subset L_2(\gamma)$, $\bar{m} = \lim_{i \rightarrow \infty} m_i$, и показывается, что справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\bar{m} \notin \text{dom} \chi$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = +\infty$;
- 2) если $\bar{m} \in \text{dom} \chi$, то $\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m})$.

Подробное доказательство теоремы представлено в [13].

Указанное свойство функционала чувствительности лежит в основе доказательства ряда теорем, позволяющих построить и обосновать алгоритмы поиска седловых точек модифицированных функционалов Лагранжа.

На пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$ рассмотрим функционал [14]

$$K(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} ((l + r m)^2 - l^2) d\Gamma, & \text{если } -[v] \leq m \text{ п.в. на } \gamma, \\ +\infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

и модифицированный функционал Лагранжа

$$M(v, l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} K(v, l, m) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) d\Gamma,$$

где $r > 0 - const$, $(l - r[v])^+ = \max\{0, l - r[v]\}$.

Введем модифицированный двойственный функционал

$$\begin{aligned} \underline{M}(l) &= \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} M(v, l) = \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \inf_{m \in L_2(\gamma)} K(v, l, m) = \\ &= \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как

$$\inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \inf_{m \in L_2(\gamma)} K(v, l, m) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} K(v, l, m),$$

то функционал $\underline{M}(l)$ может быть представлен в виде

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left((l + r m)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}. \quad (5)$$

Для произвольного $l \in L_2(\gamma)$ определим функционал

$$F_l(m) = \chi(m) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left((l + r m)^2 - l^2 \right) d\Gamma.$$

Тогда двойственный функционал имеет вид

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} F_l(m). \quad (6)$$

Функционал $F_l(m)$ является слабо полунепрерывным и коэрцитивным функционалом на $L_2(\gamma)$. Поэтому задача (6) имеет решение $m(l)$ для любого $l \in L_2(\gamma)$. Несложно показать, что элемент $m(l)$ — единственный.

Теорема 2. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его градиент удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, то есть для любых $l_1, l_2 \in L_2(\gamma)$ справедливо неравенство*

$$\|\nabla \underline{M}(l_1) - \nabla \underline{M}(l_2)\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l_1 - l_2\|_{L_2(\gamma)}.$$

При доказательстве данной теоремы показывается, что субдифференциал функционала $\underline{M}(l)$ состоит из единственного элемента $\partial(\underline{M}(l)) = \{m(l)\}$ [13]. Тогда $\nabla \underline{M}(l) = m(l)$.

Из представления (4) двойственного функционала $\underline{M}(l)$, получим

$$\nabla \underline{M}(l) = m(l) = \max \left\{ -\frac{l}{r}, -[v] \right\}.$$

Рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) \rightarrow \max, \\ l \in L_2(\gamma). \end{cases} \quad (7)$$

Так как градиент функционала $\underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/r$, то для решения двойственной задачи (7) можно использовать градиентный метод поиска максимума функционала

$$l_{k+1} = l_k + r \nabla \underline{M}(l_k) = l_k + r m(l_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8)$$

с произвольным начальным значением $l_0 \in L_2(\gamma)$.

Теорема 3. *Для последовательности $\{l_k\}$, построенной по методу (8), выполняется предельное равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l_k)\|_{L_2(\gamma)} = 0$.*

Используя градиентный метод (8), можно построить следующий алгоритм метода Удзавы для решения задачи (1):

$$\begin{aligned} (i) \quad u_{k+1} &= \arg \min_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} M(v, l_k), \\ (ii) \quad l_{k+1} &= l_k + r \max \left\{ -\frac{l_k}{r}, -[u_{k+1}] \right\}. \end{aligned}$$

Обоснование сходимости представленного метода осложняется тем, что двойственная задача (7) может оказаться неразрешимой. Вопрос существования решения задачи (8) тесно связан с регулярностью функции u — решения задачи (1). Можно доказать, что если $u \in H^2(\Omega_\gamma)$, то функция $u_{x_2} \in H^{1/2}(\gamma)$ является решением задачи (7) [9]. Однако для задачи (1) с внутренней трещиной предположение о большей регулярности решения, чем $u \in H^1(\Omega_\gamma)$, является неестественным. Несмотря на указанную проблему, можно доказать равенство двойственности для исходной и двойственной задач [13].

Теорема 4. *Для задачи (1) справедливо соотношение двойственности*

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Отметим, что при условии разрешимости двойственной задачи (7) можно доказать, что последовательность $\{l_k\}$, построенная с помощью градиентного метода (8), ограничена в $L_2(\gamma)$. Вместе с теоремой 3 это дает сходимость метода (i) — (ii) по функционалу задачи (1), то есть

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \inf_{v \in K} J(v).$$

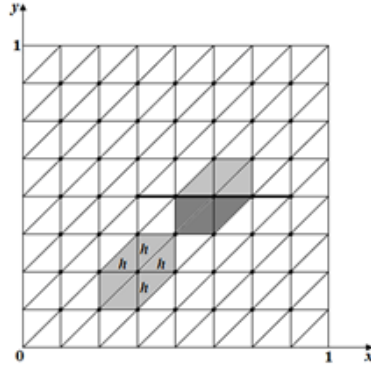


Рис. 1. Триангуляция расчетной области

Численная реализация метода

Пусть

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \text{ и } \gamma = \{(x, y) \in \Omega : a < x < b, y = c\}.$$

Аппроксимацию задачи проведем с помощью метода конечных элементов. Для этого осуществим триангуляцию области с шагом h , как показано на рисунке 1.

Каждый узел, не лежащий на трещине, является центром шестиугольного конечного элемента. С учетом требования взаимного непроникновения берегов трещины каждому узлу на трещине соответствуют два конечных элемента, представляющие собой усеченные шестиугольники.

Введем обозначения:

I_γ — множество индексов внутренних узлов трещины;

I_Ω — множество индексов всех остальных узлов триангуляции.

Над каждым шестиугольником, в центре которого находится узел с номером $k \in I_\Omega$, задаем кусочно-линейную базисную функцию Куранта $\varphi_k(x, y)$. График каждой функции $\varphi_k(x, y)$, $k \in I_\Omega$ имеет форму пирамиды единичной высоты. Любому узлу с номером $k \in I_\gamma$ соответствуют две функции $\varphi_k^+(x, y)$ и $\varphi_k^-(x, y)$, определенные на конечных элементах верхнего и нижнего берегов трещины. Графики данных функций представляют собой усеченные пирамиды единичной высоты.

Будем искать приближенное решение в виде линейной комбинации базисных функций

$$v_h(x, y) = \sum_{k \in I_\Omega} v_k \cdot \varphi_k(x, y) + \sum_{k \in I_\gamma} v_k^+ \cdot \varphi_k^+(x, y) + \sum_{k \in I_\gamma} v_k^- \cdot \varphi_k^-(x, y).$$

Подставим функцию $v_h(x, y)$ в модифицированный функционал Лагранжа $M(v, l)$, выполнив при этом замену переменных

$$v_i^+ = v_i^- + t_i, \quad t_i = [v_i] \geq 0, \quad i \in I_\gamma.$$

В результате получим конечномерный функционал следующего вида:

$$\begin{aligned}
M(v_h, v_h^-, t_h, l_h) = & \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\Omega} a_{ij} v_i v_j + \sum_{i \in I_\gamma} \sum_{j \in I_\gamma} a_{ij}^+ (v_i^- + t_i) (v_j^- + t_j) + \right. \\
& + \sum_{i \in I_\gamma} \sum_{j \in I_\gamma} a_{ij}^- v_i^- v_j^- + 2 \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\gamma} b_{ij}^+ v_i (v_j^- + t_j) + 2 \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{j \in I_\gamma} b_{ij}^- v_i v_j^- \left. \right\} - \\
& - \sum_{i \in I_\Omega} f_i v_i - \sum_{i \in I_\gamma} f_i^+ (v_i^- + t_i) - \sum_{i \in I_\gamma} f_i^- v_i^- + \frac{h}{2r} \sum_{i \in I_\gamma} \left\{ ((l_i - r t_i)^+)^2 - l_i^2 \right\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\Omega, \quad i, j \in I_\Omega, \\
a_{ij}^+ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i^+ \nabla \varphi_j^+ d\Omega, \quad a_{ij}^- = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i^- \nabla \varphi_j^- d\Omega, \quad i, j \in I_\gamma, \\
b_{ij}^+ &= \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j^+ d\Omega, \quad b_{ij}^- = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j^- d\Omega, \quad i \in I_\Omega, j \in I_\gamma, \\
f_i &= \int_{\Omega_\gamma} f \varphi_i d\Omega, \quad i \in I_\Omega, \\
f_i^+ &= \int_{\Omega_\gamma} f \varphi_i^+ d\Omega, \quad f_i^- = \int_{\Omega_\gamma} f \varphi_i^- d\Omega, \quad i \in I_\gamma.
\end{aligned}$$

Согласно методу Удзавы на k -й итерации необходимо решить вспомогательную задачу

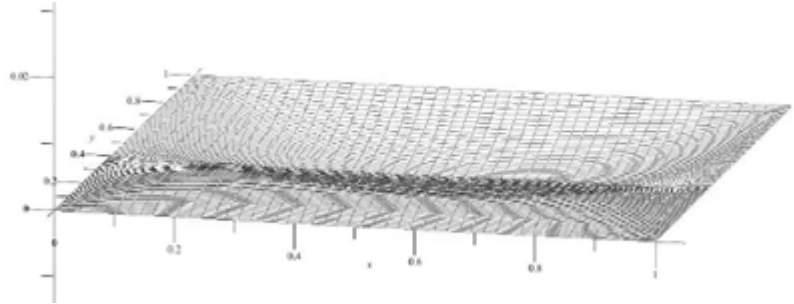
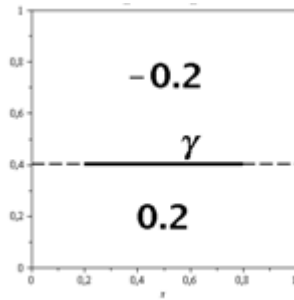
$$\begin{cases} M(v_h, v_h^-, t_h, l_h^k) \longrightarrow \min, \\ -t_i \leq 0, \quad i \in I_\gamma. \end{cases}$$

Для решения данной задачи применим метод поточечной релаксации.

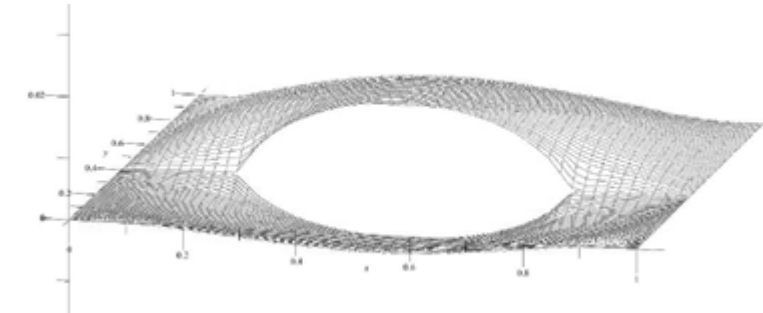
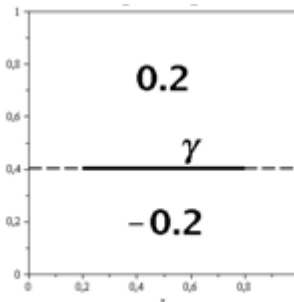
Вычислительные эксперименты проведем при фиксированных параметрах, представленных в таблице 1.

Таблица 1. Фиксированные параметры вычислительных экспериментов

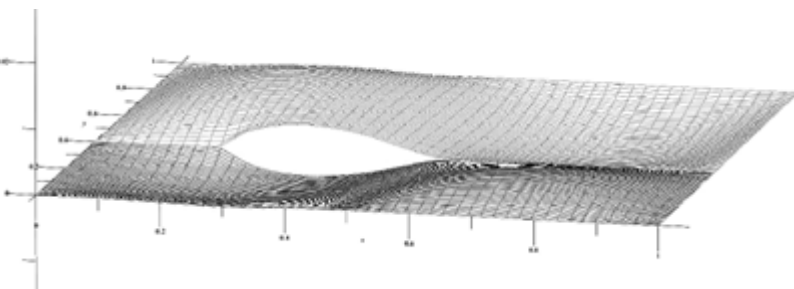
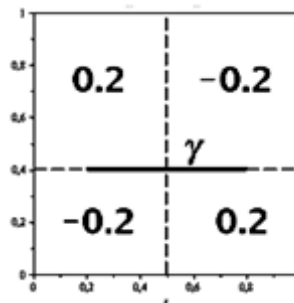
Параметр	Значение параметра
Расчетная область	$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
Положение трещины в области	$\gamma = \{(x, y) \in \Omega : 0.2 < x < 0.8, y = 0.4\}$
Шаг триангуляции	$h = 2^{-6}$
Точность вычислений	$\varepsilon = 10^{-8}$



а. Пример 1



б. Пример 2



с. Пример 3

Рис. 2. Результаты вычислений

Рассмотрим три примера, различающиеся способом задания функции f в расчетной области Ω . На рисунке 2 показаны значения функции f и соответствующие им решения задачи (1).

В примере 1 предпримем попытку поднять участок, расположенный ниже трещины. Для этого на нижнем берегу трещины зададим положительное значение функции f , а на верхнем — отрицательное. График решения представлен на рисунке 2(а). Условие $[v] = v^+ - v^- \geq 0$ на γ выполнено, размыкания берегов трещины не происходит, мы получаем решение задачи Дирихле.

В примере 2 изменим значение функции f на противоположное. В этом случае происходит размыкание берегов по всей длине трещины. График решения представлен на рисунке 2(б).

Наконец, в примере 3 зададим функцию f так, чтобы к верхнему берегу трещины прилегали участки как с положительным, так и с отрицательным значением

функции. Как видно на рисунке 2(с), в этом случае наблюдается лишь частичное размыкание берегов трещины — в той части области Ω , где значение функции f на верхнем берегу отрицательно. При этом условие $[v] = v^+ - v^- \geq 0$ на γ по-прежнему выполнено.

Выясним вопрос о зависимости числа итераций метода Удзавы от параметра r — величины шага сдвига по двойственной переменной. Будем различать два вида итераций: внешние итерации — количество выполнений шага (ii) метода Удзавы до достижения заданной точности; внутренние итерации — количество выполнений шага (i) метода Удзавы до достижения заданной точности. В таблице 2 представ-

Таблица 2. Число итераций метода Удзавы для примера 3

Значение параметра r	Число внутренних итераций	Число внешних итераций
10	6029	51
10^2	3208	11
10^3	2519	5
10^4	2321	3

лены результаты проведения расчетов для примера 3 при различных значениях параметра r , где в качестве начальных приближений выбирались нулевые векторы.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что сходимость метода к седловой точке функционала Лагранжа достаточно хорошая. На сетке с шагом $h = 2^{-6}$, при погрешности $\varepsilon = 10^{-8}$, как для рассмотренного примера, необходимо менее шестидесяти внешних итераций. При этом чем больше значение параметра r , тем быстрее сходится метод.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать вывод об эффективности выбранного подхода для решения модельной задачи с трещиной, одна из формулировок которой есть задача минимизации (1). Основное преимущество использования модифицированного функционала Лагранжа состоит в том, что параметр сдвига по двойственной переменной есть неограниченная (в отличие от классической схемы двойственности) положительная величина, что позволяет значительно увеличить скорость сходимости данного метода.

Список литературы

- [1] В. Л. Бердичевский, *Вариационные принципы механики сплошной среды*, Наука, М, 1983.
- [2] А. С. Кравчук, *Вариационные и квазивариационные неравенства в механике*, МГА-ПИ, М, 1997.

- [3] Г. Дюво, Ж. Л. Лионс, *Неравенства в физике и механике*, Наука, М, 1980.
- [4] И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М, 1986.
- [5] N. Kikuchi, J. T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Method*, SIAM Philadelphia, 1988.
- [6] Л. А. Галин, *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости*, Наука, М, 1980.
- [7] Н. Ф. Морозов, *Математические вопросы теории трещин*, Наука, М, 1984.
- [8] А. М. Khludnev, V. A. Kovtunenکو, *Analysis of cracks in solids*, WIT Press, Southampton; Boston, 2000.
- [9] А. М. Хлуднев, *Задачи теории упругости в негладких областях*, Физматлит, М, 2010.
- [10] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации*, Наука, М, 1989.
- [11] К. Гроссман, А. А. Каплан, *Нелинейное программирование на основе безусловной оптимизации*, Наука. Сиб. отд., Новосибирск, 1981.
- [12] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, Радио и связь, М, 1987.
- [13] Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм, “О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной”, *Труды института математики и механики УрО РАН*, **22**:1 (2016), 36–43.
- [14] E. M. Vikhtenko, G. Woo, R. V. Namm, “Sensitivity functionals in contact problems of elasticity theory”, *Comp. Math. and Math. Phys.*, **54**:7 (2014), 1190–1200.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 июня 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Тихоокеанского государственного университета (грант 3.16 - НГ ТОГУ).

Chervyakova M. V., Namm R. V., Vikhtenko E. M. Duality method for solving model crack problem. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2016. V. 16. № 2. P. 137–146.

ABSTRACT

We consider the duality method based on the use of modified Lagrangian functional for solving a model of elastic problem with a crack. An article presents the theorems, allowing to use Uzawa method for search a saddle point of the modified Lagrangian functional. The results of numerical experiments are given.

Key words: *model problem with a crack, variational inequality, modified Lagrangian functional, Uzawa method, finite element method.*