Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 160–168

УДК 519.111.8, 531.3
MSC2010 34E05, 74J30

© М. А. Гузев[1], И. А. Молотков[2]

Продольная волна конечной амплитуды в нелинейной однородной упругой среде. Уравнения Ландау – Мурнагана

Найдено высокочастотное асимптотическое решение уравнений движения для волн, распространяющихся в нелинейной и однородной упругой среде и имеющих преимущественно продольную поляризацию. Такое решение, кроме главной своей части, известной из рассмотрения линейной задачи, содержит две принципиально новые части, описывающие возбуждение поперечной волны и волны, распространяющейся с удвоенной частотой. Описанные эффекты приводят к искривлению волновых фронтов, а также к слабому затуханию основной продольной волны вдоль трассы. Учет этих нелинейных эффектов важен при анализе сейсмических волн.

Ключевые слова: *продольная волна, высокочастотная асимптотика, поперечная волна, волна с удвоенной частотой.*

Введение

Рассматривается волна, имеющая преимущественно продольную поляризацию, распространяющаяся в нелинейной однородной упругой среде. Как это принято в акустике [1, 2], будем именовать ее волной конечной амплитуды — в отличие от волн бесконечно малой амплитуды, описываемых обычной линейной теорией упругости. В основе нелинейной динамической теории упругости Ландау – Мурнагана (ЛМ) [3–5] лежит разложение упругой энергии в ряд по степеням тензора деформации. Впервые такой подход к нелинейной теории и учету ангармоничности был предложен Дебаем [6]. Получающиеся в результате этого разложения уравнения движения можно найти в [5], уравнения (26.1)–(26.3).

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2]Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова РАН, 142190, г. Москва, г. Троицк, Калужское шоссе, д. 4.
Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru, iamolotkov@yandex.ru`

В связи со сложностью системы ЛМ-уравнений вводим несколько упрощающих допущений. Первое: исследуем случай однородной среды при двух пространственных измерениях. Принятый выбор приводит к тому, что пятиконстантная в простейшем случае система ЛМ уравнений содержит всего три упругих параметра. Используем обозначения: $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор смещения, $\mathbf{x} = (x, y)$ — точка наблюдения, t — время.

Второе предположение: пусть рассматриваемая далее задача содержит малый безразмерный параметр ε, связанный как с высокой частотой ω изучаемых процессов, так и с небольшой амплитудой этих процессов. Предполагаем, что

$$\omega = \frac{\omega_0}{\varepsilon}, \qquad \omega \gg \omega_0, \tag{1}$$

где ω_0 — некоторая характерная частота, ограничивающая снизу частотный диапазон в конкретной задаче. Второе предположение также означает, что линейные члены вида u, u_x, u_{xx} по модулю должны быть больше нелинейных членов, что реализуется при амплитуде u, имеющей порядок ε^2 (в противном случае появляются дробные степени по ε в амплитуде). Мы ограничимся учетом членов 2-го порядка по компонентам вектора смещения.

Наконец, третье допущение предполагает возможность перехода к стационарному случаю выделением множителя $\exp(-i\omega t)$. Второе и третье предположения тесно связаны между собой. Главная трудность при переходе к стационарному случаю обусловлено нелинейностью рассматриваемой задачи. Преодоление этого препятствия для решения в старшем порядке по ε как раз и обеспечено малостью нелинейных членов.

Квадраты продольной и поперечной скоростей известны из линейной теории:

$$a^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho, \qquad b^2 = \mu/\rho,$$

где λ и μ — упругие параметры Ламе, ρ — плотность среды.

После выделения множителя $\exp(-i\omega t)$ ЛМ-нелинейные уравнения движения имеют вид

$$\rho\omega^2 u + F_1 + R_1 = 0, \tag{2}$$

$$\rho\omega^2 v + F_2 + R_2 = 0, \tag{3}$$

$$F_1 = (\lambda + 2\mu)u_{xx} + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}),$$

$$F_2 = \mu(u_{xy} + v_{xx}) + \lambda u_{xy} + (\lambda + 2\mu)v_{yy},$$

выражения F_1 и F_2 также известны из линейной теории упругости, члены R_1 и R_2 — нелинейные и громоздкие, основной из них — R_1, связанный с продольным смещением. Члены R_1 и R_2 содержат не сократившиеся множители вида $\exp(-i\omega t)$, эти члены удается далее упростить после введения малого параметра, см. также далее п. 4. Кроме того, нелинейные члены R_1 и R_2 в уравнениях (2), (3) по крайней мере в ε раз меньше членов F_1 и F_2 (соответственно) . Нижние значки везде обозначают частные дифференцирования по соответствующим координатам.

Для изучаемой волны ее продольное смещение является преобладающим по амплитуде по сравнению с поперечным смещением. Амплитуда поперечного смещения предполагается пропорциональной ε^β. При распространении волн в нелинейных средах, как известно [7, 8], возбуждаются колебания с кратными (двойными, тройными и т. д.) частотами. Кроме того, волны с разными частотами, независимо распространяющиеся в линейном приближении, в нелинейной среде воздействуют друг на друга [3, 9]. Для краткости выберем важнейший из перечисленных нелинейных эффектов и рассмотрим волны, имеющие двойную частоту. Будем предполагать, что амплитуда продольных колебаний с удвоенной частотой пропорциональна ε^γ и что

$$\beta > 2, \quad \gamma > 2,$$

показатели β и γ подлежат в дальнейшем определению.

Различным вопросам, связанным с нелинейными упругими средами, посвящено значительное число публикаций, например, [10, 11]. Однако они, как правило, не связаны с изучением волновых процессов, важных в связи с такими средами. Некоторые параллели с нелинейной теорией упругости возникают при исследовании движения квазичастиц-фононов [12]. В [12] рассмотрены процессы, происходящие в анизотропных кристаллах и связанные как с поперечной, так и с продольной поляризацией, потребовавшие учета нелинейных модулей упругости. В отличие от нашей работы, здесь изучено движение ультразвуковых фононов, а не упругих волн. В качестве метода анализа в [12] используется совершенно другая, длинноволновая асимптотика. Цель настоящей работы состоит в том, чтобы в сравнительно простой задаче для двумерной и однородной среды продемонстрировать те новые физические волновые явления, которые возникают при учете нелинейности упругой среды.

1. Выбор вида решения

В соответствии с высказанными предположениями о продольных и поперечных амплитудах волны ищем решение в виде

$$\begin{gathered} u = \varepsilon^2 U \exp(i\Psi) + \varepsilon^\gamma W \exp(2i\Psi), \\ v = \varepsilon^\beta V \exp(i\Psi), \end{gathered} \tag{4}$$

Ψ — общая вещественная фаза (эйконал). Предполагаем, что волна распространяется — вдоль оси x. Поэтому считаем, что эйконал в старшем порядке зависит от x и лишь слабо зависит от y:

$$\Psi = \omega x/a + \theta(x, y) + \varepsilon\theta_1(x, y) + \dots . \tag{5}$$

Здесь a и b — скорости, постоянные из-за однородности среды.

Искомые функции U, V, W и Φ представляем разложениями по степеням малого параметра:

$$\begin{gathered} U = U_0(x) + \varepsilon U_1(x, y) + \dots, \qquad W = W_0(x, y) + \varepsilon W_1(x, y) + \dots, \\ V = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + \dots . \end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку возбуждение колебаний с удвоенной частотой должно уменьшать основную продольную амплитуду, то

$$W_0(x, y) < 0. \tag{7}$$

Для определенности далее будем искать лишь первые три члена в разложении для Ψ, первые два члена в разложении для U, а также лишь по одному первому члену для V и W. Условия применимости разложений (5), (6) обсуждаются далее в п. 6. Вид эйконала (5) и высказанные предположения приводят к тому, что слагаемые в F_1, F_2, R_1 и R_2 имеют разный порядок величины по ε. Используя формулы, полученные в [3–5], отбрасывая в них малые слагаемые и учитывая несократившиеся экспоненциальные множители, выпишем R_1, R_2:

$$\begin{gathered} R_1 = c_1 u_x u_{xx} \exp(-i\omega t), \\ R_2 = [\mu(u_{xx}u_y + u_x u_{xy}) + (\lambda + 6C)u_x u_{xy}] \exp(-i\omega t), \end{gathered} \tag{8}$$

$c_1 = 6[(\lambda + 2\mu)/2 + C]$, C — упругий модуль Ландау (третий из упомянутых выше упругих параметров). Следует отметить, что существуют способы независимого определения величины нелинейных упругих параметров [13].

Равенства (4)–(6) определяют высокочастотный анзатц—вид строящегося решения. Анзатц (4)–(6) представляет собой обобщение анзатца лучевого метода [14,15], который также связан с высокочастотным приближением.

2. Основная продольная волна

Уравнение (2) с учетом (8) имеет вид

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \frac{\lambda + 2\mu}{a^2}\omega^2 u + \lambda v_{xy} + \mu(u_{yy} + v_{xy}) + c_1 u_x u_{xx} \exp(-i\omega t) = 0. \tag{9}$$

В соответствии с выражением эйконала (5) первые два члена в уравнении (9), хорошо известные из линейной теории, являются главными. Члены с $\exp(i\Psi)$ и с $\exp(2i\Psi)$ не могут компенсировать друг друга и должны обращаться в нуль по отдельности. Подставляем (4)–(6) в (9), группируем члены с $\exp(i\Psi)$, сокращаем на эту экспоненту, выделяем слагаемые, содержащие различные степени ε. Самые главные слагаемые из первых двух членов (9) сокращаются. Среди оставшихся в старшем порядке по ε находим, что

$$\theta_x(x, y) = -i\frac{U_{0x}}{U_0}. \tag{10}$$

Вещественность величин θ и U_0 приводит к тому, что левая и правая части (10) должны обращаться в нуль по отдельности. Отсюда получаем, что

$$U_0 = \mathrm{const} \qquad \text{и} \qquad \theta = \theta(y),$$

т.е. второе слагаемое $\theta(y)$ эйконала (5) зависит лишь от координаты y.

Уравнение следующего порядка по ε содержит амплитуду V_0 и будет использовано в следующем пункте.

3. Возбуждение поперечной волны и волны с удвоенной частотой

Возбуждение поперечного смещения волны описывается в старшем порядке по ε вытекающим из уравнения (3) уравнением

$$\frac{\mu}{b^2}\omega^2 v + \mu u_{xy} + \mu v_{xx} + \lambda u_{xy} + (\lambda + 2\mu) v_{yy} = 0. \tag{11}$$

Здесь главными являются первые четыре слагаемых. Равенство суммы этих слагаемых нулю позволяет установить, что $\beta = 3$. Старшее следствие отсюда дает связь амплитуд U_0 и V_0:

$$V_0 = \frac{a}{\omega_0}\theta'(y) U_0.$$

Привлекаем еще не использованные следующие по порядку величины члены из уравнения (9). В результате преобразований получаем соотношение

$$-\frac{a}{2\omega_0}\theta_{1x} - [\theta'(y)]^2 + 2i\frac{\omega}{a}\frac{U_{1x}}{U_0} + i\frac{a^2 - b^2}{a^2}\theta''(y) = 0. \tag{12}$$

В соотношении (12) приравниваем нулю отдельно вещественную и мнимую части. После интегрирования по x находим

$$\frac{U_1}{U_0} = -\frac{a^2 - b^2}{2\omega_0 a}\theta''(y) x, \qquad \theta_1 = -\frac{a}{2\omega_0}\left[\theta'(y)\right]^2 x.$$

Поправка $\theta(y)$ в выражении для эйконала, отсутствующая в линейной задаче, пока остается произвольной. Её величина определяется начальными условиями.

Чтобы оценить возбуждение продольной волны с удвоенной частотой, необходимо собрать в уравнении (2) члены с $\exp(2i\Psi)$. После сокращения на указанную экспоненту находим, что $\gamma = 3$ и что

$$W_0 = -i\frac{\omega_0}{c}U_0^2 \exp(-i\omega t). \tag{13}$$

Здесь коэффициент

$$c = 3\rho a^3 / c_1 = \frac{a}{1 + \frac{2C}{\lambda + 2\mu}}$$

имеет размерность скорости. Это — специфическая скорость, зависящая от модуля C и связанная с нелинейностью среды и возбуждением колебаний удвоенной частоты. Очевидно, $c < a$. Отметим, что при малом модуле C скорость c близка к скорости c, a. Отделим в (13) вещественную и мнимую части. При любом t (или, что то же, на периоде изменения ωt) имеем $\cos(\omega t) = 0$ и

$$W_0 = -\frac{\omega_0}{c}U_0^2 \sin(\omega t) = -\frac{\omega_0}{c}U_0^2. \tag{14}$$

Формула (14) соответствует условию (7).

Собираем выведенные формулы. Для U и Ψ получаем:

$$U = U_0 \left[1 - \varepsilon \frac{a^2 - b^2}{2\omega_0 a} \theta''(y) x\right],$$
$$\Psi = \frac{\omega x}{a} + \theta(y) - \varepsilon \frac{a}{2\omega_0} \left[\theta'(y)\right]^2 x. \qquad (15)$$

Важно отметить, что изменение амплитуды и фазы продольной волны с координатой x происходит тогда, когда в цепочке уравнений появляется поперечная амплитуда V_0. Это означает, что изменение характеристик продольной волны возникает за счет оттока энергии в форме поперечной волны. Для получения окончательных явных формул для смещений u, v необходимо добавить к уравнениям (2), (3) начальные данные при $x = 0$.

4. Учет начальных условий

Переходим к учету начальных условий при $x = 0$ к уравнениям (2), (3) для смещений u, v. В данном случае задание начальных условий состоит в указании константы U_0 и функции $\theta(y)$. Поскольку рассматриваемый процесс распространения происходит вдоль оси x, то из соображений симметрии функцию $\theta(y)$ следует считать четной. Рассмотрим простейший вариант

$$\theta(y) = Ay^2, \qquad A = \text{const} > 0. \qquad (16)$$

В случае (16) получаем:

$$\Psi = \frac{\omega x}{a} + Ay^2 - \varepsilon \frac{2aA^2}{\omega_0} y^2 x, \qquad (17)$$
$$U = U_0 \left[1 - \varepsilon \frac{a^2 - b^2}{2\omega_0 a} A x\right], \qquad (18)$$
$$V_0 = \frac{2aAU_0}{\omega_0} y,$$

возбуждение продольной волны с удвоенной частотой уже определено формулой (14).

Приравнивание эйконала $\Psi(x, y)$ его значению $\Psi(x_0, y)$ при $x_0 \geq 0$ дает однопараметрическое семейство уравнений фронтов продольных волн в рассматриваемой нелинейной ЛМ-среде, x_0 — параметр:

$$\frac{\omega}{a}(x - x_0) + Ay^2 - \varepsilon \frac{2aA^2}{\omega_0} y^2 (x - x_0) = 0. \qquad (19)$$

При выборе функции $\theta(y)$ в соответствии с (16) эти фронты имеют вид парабол, слегка искаженных за счет поправочного (третьего) члена левой части (19). Отметим, что для линейной среды эти фронты представляли бы собой прямые, параллельные оси y. Из формулы (18) следует, что амплитуда продольной части волны слабо затухает вдоль трассы. Это объясняется потерей энергии на возбуждение поперечной волны и волн с кратными частотами.

5. Условие применимости асимптотических разложений

Асимптотические разложения (5), (6) или (17), (18) пригодны при условии малости по модулю последующих членов в решении для волнового поля по сравнению с предыдущими. Соотношения (17), (18) включают расстояние x вдоль трассы распространения волн. Условие ограниченности второго слагаемого требует, чтобы упругие волны рассматривались лишь при конечных значениях x, т.е. существует постоянная L, для которой $x < L$. Требование малости второго слагаемого по сравнению с первым в (18) приводит к следующему условию применимости асимптотических разложений

$$\varepsilon AL(a^2 - b^2)(a\omega_0)^{-1} \ll 1. \tag{20}$$

Используя (1), запишем формулу (20) в виде

$$\omega \gg AL(a^2 - b^2)a^{-1}. \tag{21}$$

С самого начала в статье используемая асимптотика именовалась высокочастотной и неравенство (21) подтверждает такое название. С другой стороны, из (21) видно, что можно ввести временной масштаб $T = a\left[AL(a^2 - b^2)\right]^{-1}$. Это приводит к следующему ограничению на время t, для которого справедливы построенные в работе асимптотические разложения: $t < T$.

Заключение

В работе аналитически описана преимущественно продольная волна конечной амплитуды в нелинейной упругой среде. Для этой волны получены формулы (4), в которых $\beta = \gamma = 3$, а коэффициенты определены формулами (10), (11), (12) и (14). Итоговые формулы зависят не только от выбора модели нелинейной среды, но и от вида начальных условий. Построенные решения констатируют ряд принципиально новых фактов, отсутствующих в линейной теории распространения волн в упругой среде.

1) Возбуждение поперечного смещения v осуществляется за счет распространения продольного смещения, см. (4), (11) и (15).

2) Распространение полей (u, v) происходит в слабо выраженном виде также и в поперечном (по y) направлении.

3) Появление волны, распространяющейся с удвоенной частотой является главным следствием наличия нелинейного члена R_1 (формула (8)). Амплитуда этой волны определена формулой (14).

4) Происходит и обратное воздействие поперечной волны на продольную. Описание этого воздействия содержится в уравнении (9) и отражено в третьем слагаемом правой части выражения (15) для эйконала.

5) Волновые фронты, плоские в линейном случае, для нелинейной среды, описываемой ЛМ-уравнениями, оказываются искривленными.

6) Амплитуда продольной части волны слабо затухает по координате x, амплитуда поперечной части волны возрастает по координате y.

Список литературы

[1] J. W. Strutt (Rayleigh), “Aerial plane waves of finite amplitude”, *Proc. Roy. Soc.*, **A-84** (1910), 247–284.

[2] R. D. Fay, “Plane sound waves of finite amplitude”, *J. Acoust. Soc. Amer.*, **3**:2 part 1 (1996), 222–241.

[3] L. Landau, G. Rumer, “Ueberschall absorption in festern koerpern”, *Zs. Sov. Phys.*, **3** (1937), 18–27.

[4] E. D. Murnaghan, *Finite deformation of an elastic solid*, John Wiley, NY, 1951.

[5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, М., 1987.

[6] P. Debye, *Vortraege ueber die kinetische theorie der materie und der electrizitaet*, Teubner, Berlin, 1914.

[7] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.*, Наука, М., 1977.

[8] И. А. Молотков, *Аналитические методы в теории нелинейных волн*, Физматлит, М., 2003.

[9] И. Я. Померанчук, “О теплопроводности диэлектриков при температурах больше дебаевской”, *ЖЭТФ*, **11** (1941), 246.

[10] С. К. Годунов, И. М. Пешков, “Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*, **48**:6 (2008), 1034–1055.

[11] А. А. Шеина, А. И. Александрович, “Решение пространственных задач нелинейной теории упругости методами многомерного комплексного анализа”, *Вестник Нижегор. унив.*, **4** (2011).

[12] И. Г. Кулеев, И. И. Кулеев, “Релаксация квазипоперечных фононов в механизме Херринга и поглощение ультразвука в кубических кристаллах с положительной и отрицательной анизотропией упругих модулей второго порядка”, *Физика твердого тела*, **51**:11 (2009), 2211–2223.

[13] C. Payan, V. Garnier, J. Mogsan, P. A. Johnson, “Determination on third order elastic constants in a complex solid applying coda wave interferometry”, *Appl. Phys. Lett.*, **98** (2009), 011904.

[14] В. М. Бабич, А. С. Алексеев, “Лучевой метод расчета интенсивности волновых фронтов”, *Изв. АН СССР, сер. геоф.*, **1** (1958), 17–31.

[15] V. Cerveny, I. A. Molotkov, I. Psencik, *Ray method in seismology*, Prague, 1977.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 октября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00079).

Guzev M. A., Molotkov I. V. Longitudinal finite-amplitude wave in nonlinear homogeneous elastic medium. The equations of Landau-Murnaghan. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 160–168.

ABSTRACT

High-frequency asymptotic solution of the equations of motion for waves in nonlinear and homogeneous elastic mediumis is obtained, with predominantly longitudinal polarization. The main part of the solution is known from the consideration of the linear problem. The general solution except the main part contains two completely new part describing the excitation of the transverse wave and wave with the double frequency. These effects result in distortion of wave fronts, as well as to the weak attenuation of the primary longitudinal wave along the way. The inclusion of these nonlinear effects are important in the analysis of seismic waves.
Key words: *longitudinal wave, high frequency asymptotics, transverse wave, a wave with the double frequency.*