Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 181–185

УДК 517.965+517.547.582
MSC2010 33E05

© М. Д. Монина[1]

О ранге конечного набора тэта-функций

В работе для тэта-функции

$$\theta(z) = \theta(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2izn} q^{n^2}$$

доказано тождество

$$\theta(z_1 + w) \dots \theta(z_{k-1} + w)\theta(z_1 + \dots + z_{k-1} - w) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(z_1, \dots, z_{k-1})\psi_i(w)$$
$$(\forall z_1, \dots, z_{k-1}, w \in \mathbb{C})$$

с некоторыми явно указываемыми тэта-функциями ψ_i от одной переменной и φ_i от $k-1$ переменной.

Ключевые слова: *тэта-функция, эллиптическая функция, сигма-функция Вейерштрасса.*

Введение

В работах [1], [2] и [3] была предложена конструкция для построения решений k-линейных дифференциальных уравнений с помощью функций, удовлетворяющих функциональному уравнению

$$f_1(z_1 + w) \dots f_{k-1}(z_{k-1} + w)g(z_1 + \dots + z_{k-1} - w) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(z_1, \dots, z_{k-1})\psi_i(w), \quad (1)$$

где $f_1, \dots, f_{k-1}, g, \psi_1, \dots, \psi_s$ — голоморфные функции на всей плоскости комплексного переменного (целые функции) и $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ — также голоморфные функции на $\mathbb{C}$ по каждой переменной. При $k = 2$ уравнение (1) имеет вид

$$f_1(z_1 + w)g(z_1 - w) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(z_1)\psi_i(w),$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: monina@iam.khv.ru

а при $k = 3$

$$f_1(z_1 + w)f_2(z_2 + w)g(z_1 + z_2 - w) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(z_1, z_2)\psi_i(w). \qquad (2)$$

В работах [1] и [2] было отмечено, что из классического тождества для сигма-функции Вейерштрасса (см. [4])

$$\sigma(x + y + z)\sigma(x - y)\sigma(y - z)\sigma(z - x) = \frac{1}{2}\sigma^3(x)\sigma^3(y)\sigma^3(z) \det \begin{pmatrix} 1 & \wp(z) & \wp'(z) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{pmatrix}$$

с эллиптической функцией Вейерштрасса

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2}\sigma(z)$$

следует, что для набора $(f_1, f_2, g) = (\sigma, \sigma, \sigma)$ выполняется разложение (2) с $s = 3$. В настоящей работе этот результат обобщается на натуральные $k > 3$.

Автор благодарит В.А. Быковского за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. Тэта-функции и сигма-функция Вейерштрасса

Согласно традиционным обозначениям (см. [4])

$$\vartheta_1(z; q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2},$$

$$\vartheta_2(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2i(n+\frac{1}{2})z} q^{(n+\frac{1}{2})^2},$$

$$\vartheta_3(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inz} q^{n^2},$$

$$\vartheta_4(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2inz} (-1)^n q^{n^2}$$

— классические функции Якоби с комплексными z и q, где

$$q = e^{\pi i \tau} \qquad (\mathrm{Im}\tau > 0).$$

При этом

$$\vartheta_1(z; q) = -ie^{iz} q^{\frac{1}{4}} \vartheta_3 \left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau; q\right). \qquad (3)$$

Пусть Γ — произвольная дискретная аддитивная подгруппа (решётка) в поле комплексных чисел. Сигма-функция Вейерштрасса решётки Γ определяется по формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

В вырожденных случаях

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\quad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw | m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right) e^{\frac{z}{nw} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{nw}\right)^2} = \frac{w}{\pi} \sin \frac{\pi z}{w} e^{\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

Сигма-функция является нечётной функцией с простыми нулями в узлах решётки Γ. Для невырожденной решётки $\Gamma = \{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = \frac{1}{\pi \vartheta_1'} \exp\left(-\frac{1}{24} \frac{(\pi z)^2 \vartheta_1''}{\vartheta_1'}\right) \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi z; q\right). \tag{4}$$

2. О ранге набора тэта-функций

Пусть $f_1, \ldots, f_{k-1}, g$ — набор целочисленных функций, для которых справедливо разложение (1). Назовём рангом этого набора минимальное натуральное

$$n = R(f_1, \ldots, f_{k-1}, g),$$

для которого выполняется разложение (1).

Замечание. *Нетрудно показать (см., например, [5]), что при любых комплексных* α_i, β_i $(i = 1, \ldots, k-1), u_i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ *и* γ *для функций, определяемых по формулам*

$$\widetilde{f}_i(z) = \exp(\alpha_i + \beta_i z + \gamma z^2) f_i(z + u_i) \quad (1 \leq i < k),$$

$$\widetilde{g}(z) = \exp(\alpha_0 + \beta_0 z + \gamma z^2) g(z + u_0),$$

выполняется равенство

$$R(\widetilde{f}_1, \ldots, \widetilde{f}_{k-1}, \widetilde{g}) = R(f_1, \ldots, f_{k-1}, g).$$

Пусть $k \geq 2$ и

$$Q(m_1, \ldots, m_{k-1}) = \left(m_1 - \frac{1}{k}(m_1 + \cdots + m_{k-1})\right)^2 + \cdots + \left(m_{k-1} - \frac{1}{k}(m_1 + \cdots + m_{k-1})\right)^2.$$

Теорема 1. *Для любых комплексных* $z_1, \ldots, z_{k-1}, w$ *и* q *с* $|q| < 1$

$$\vartheta_3(z_1 + w; q) \ldots \vartheta_3(z_{k-1} + w; q) \vartheta_3(z_1 + \cdots + z_{k-1} - w; q) =$$
$$= \sum_{l=0}^{k-1} \left(\sum_{m_1 + \cdots + m_{k-1} \equiv l \pmod{k}} e^{2i(z_1 m_1 + \cdots + z_{k-1} m_{k-1})} q^{Q(m_1, \ldots, m_{k-1})} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{m_k \equiv l \pmod{k}} e^{2iwm_k} q^{\frac{1}{k} m_k^2} \right).$$

Доказательство. В соответствии с определением ϑ_3

$$\vartheta_3(z_1+w;q)\dots\vartheta_3(z_{k-1}+w;q)\vartheta_3(z_1+\dots+z_{k-1}-w;q)=$$
$$=\sum_{n_1,\dots,n_k=-\infty}^{\infty} e^{2i((z_1+w)n_1+\dots+(z_{k-1}+w)n_{k-1})}\times e^{2i(z_1+\dots+z_{k-1}-w)n_k}q^{n_1^2+\dots+n_k^2}. \qquad (5)$$

Положим

$$n_1+n_k=m_1,\dots,n_{k-1}+n_k=m_{k-1},$$
$$n_1+\dots+n_{k-1}-n_k=m_k.$$

Складывая первые $k-1$ равенств и учитывая последнее, получим, что

$$kn_k=m_1+\dots+m_{k-1}-m_k$$

и для $1\le i<k$

$$n_i=m_i-\frac{1}{k}(m_1+\dots+m_{k-1}-m_k)=m_i-\frac{1}{k}(m_1+\dots+m_{k-1})+\frac{1}{k}m_k.$$

Так как

$$n_1^2+\dots++n_{k-1}^2+n_k^2=$$
$$\left(m_1-\frac{1}{k}(m_1+\dots+m_{k-1})+\frac{1}{k}m_k\right)^2+\dots+\left(m_{k-1}-\frac{1}{k}(m_1+\dots+m_{k-1})+\frac{1}{k}m_k\right)^2+$$
$$+\frac{1}{k^2}(m_1+\dots+m_{k-1}-m_k)^2=Q(m_1,\dots,m_{k-1})+\frac{1}{k}m_k^2,$$

то правую часть равенства (5) можно записать в виде правой части доказываемого тождества теоремы 1.

Теорема 2. *Для любого* $k\ge 2$

$$R(\sigma_\Gamma,\dots,\sigma_\Gamma)\le k,$$

где $(\sigma_\Gamma,\dots,\sigma_\Gamma)$ *— набор из* k *сигма-функций Вейерштрасса.*

Доказательство. Если Γ — невырожденная решётка, то утверждение теоремы 2 непосредственно следует из равенств (3) и (4), замечания и теоремы 1. В вырожденных случаях утверждение теоремы 2 следует из разложения

$$(z_1+w)\dots(z_{k-1}+w)(z_1+\dots+z_{k-1}-w)$$

по степеням w с нулевым постоянным членом для первого случая с $\Gamma=\{0\}$ и предельного перехода с $\Gamma=\{wm+n\tau|m,n\in\mathbb{Z}\}$ при $|\tau|\to\infty$ во втором случае.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Трилинейные функциональные уравнения”, *УМН*, **60**:2 (2005), 151–152.

[2] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Законы сложения на якобианах плоских алгебраических кривых”, *Нелинейная динамика*, Сборник статей, Тр. МИАН, **251**, 2005, 54–126.

[3] В. М. Бухштабер, И. М. Кричевер, “Интегрируемые уравнения, теоремы сложения и проблема Римана–Шоттки”, *УМН*, **61**:1 (2006), 25–84.

[4] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа.* Т. 2, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1963.

[5] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:3 (2016), 34–46.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 октября 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 15-I-4-047), финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00203 а), финансовой поддержке Правительства Хабаровского края (распоряжение Правительства Хабаровского края от 29 июня 2016 г. № 479-РП).

Monina M. D. On the rank of a finite set of theta functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 181–185.

ABSTRACT

In the work for the theta function

$$\theta(z) = \theta(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2izn} q^{n^2}$$

identity

$$\theta(z_1 + w) \dots \theta(z_{k-1} + w)\theta(z_1 + \dots + z_{k-1} - w) = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(z_1, \dots, z_{k-1})\psi_i(w)$$
$$(\forall z_1, \dots, z_{k-1}, w \in \mathbb{C})$$

with some clearly indicates theta functions ψ_i of one variable and functions φ_i of $k-1$ variables is proved.

Key words: *theta function, elliptic function, Weierstrass sigma-function.*