

УДК 539.371  
MSC2010 35L50, 74B20

© В. М. Садовский<sup>1</sup>

## Термодинамически согласованные уравнения моментной теории упругости

Для описания движения микрополярной среды, в которой наряду с поступательными степенями свободы реализуются независимые вращения частиц, выбирается естественная мера кривизны, представляющая собой характеристику деформированного состояния, не зависящую от пути его достижения. Показано, что часто используемая лагранжева мера кривизны со скоростью изменения, равной тензору градиентов угловой скорости, корректна только в геометрически линейном приближении. Методом внутренних термодинамических параметров состояния строятся нелинейные определяющие уравнения моментной теории упругости. В результате линеаризации этих уравнений в изотропном случае получаются уравнения континуума Коссера, в которых сопротивление материала изменению кривизны характеризуется не тремя независимыми коэффициентами, как в классической теории, а одним. Полная система уравнений динамики моментной среды при конечных деформациях и поворотах частиц приводится к термодинамически согласованной системе законов сохранения. С помощью этой системы получены интегральные оценки решений задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями, гарантирующие единственность и непрерывную зависимость от начальных данных.

Ключевые слова: *упругость, континуум Коссера, моментные напряжения, тензор кривизны, термодинамически согласованная система.*

### Введение

В теории малых упругих деформаций широко известна математическая модель континуума Коссера [1]–[3], которая используется для описания механического поведения деформируемых материалов с микроструктурой (грунтов, горных пород, сыпучих, пористых, микроразрушенных сред, жидких кристаллов). В ней, в отличие от классической теории упругости, основанной на представлении о среде как

---

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44. Электронная почта: [sadov@icm.krasn.ru](mailto:sadov@icm.krasn.ru)

о континууме материальных точек, сплошная среда представляет собой континуум материальных частиц — абсолютно твердых тел малого объема, обладающих вращательными степенями свободы.

В [4]–[6] и в других работах предложены различные способы обобщения определяющих уравнений Коссера на случай конечных деформаций и поворотов частиц. Исчерпывающий обзор исследований, выполненных в этом направлении, приведен в [7]. В [8]–[10] теория моментных напряжений применяется к построению уравнений оболочечных элементов конструкций при больших деформациях и прогибах. В [11] уравнения динамики пространственной среды приводятся к термодинамически согласованной системе законов сохранения. Рассматривается частный случай редуцированной модели, в которой моментные напряжения считаются пренебрежимо малыми, а также вариант общей модели физически и геометрически нелинейной моментной среды с тензором кривизны, скорость изменения которого равна градиенту вектора угловой скорости.

В настоящей статье нелинейная модель усовершенствована за счет специального выбора уравнений для вычисления меры кривизны по характеристикам вращательного движения частиц и приведена к термодинамически согласованной системе законов сохранения, гарантирующей ее математическую корректность.

## 1. Плоское напряженное состояние

Основным поводом к написанию статьи послужило обсуждаемое здесь свойство классической модели упругого континуума Коссера в приближении малых деформаций. Оказывается, эта модель адекватно описывает обобщенное плоское напряженное состояние изотропной микрополярной среды только при определенном соотношении между коэффициентами упругости, характеризующими сопротивление материала изменению внутренней кривизны.

Чтобы проиллюстрировать это свойство, рассмотрим напряженно-деформированное состояние упругой пластины из материала с микроструктурой, возникающее в результате принудительного равномерного по толщине поворота частиц на боковой границе вокруг нормали к срединной плоскости (рис. 1) или в результате действия на границе моментных напряжений, которые не приводят к изгибу пластины. Естественно ожидать, что в этом состоянии реализуется нетривиальное распределение моментных напряжений в области пластины с соответствующим этому распределению полем независимых поворотов частиц.

Определяющие уравнения континуума Коссера в тензорной форме

$$\sigma = \lambda(I : \Lambda)I + 2\mu\Lambda^s + 2\alpha\Lambda^a, \quad m = \beta(I : M)I + 2\gamma M^s + 2\varepsilon M^a \quad (1)$$

содержат шесть независимых модулей упругости материала, для которых сохранены обозначения, принятые в статье [2]. Здесь  $\sigma$  и  $m$  — тензоры напряжений и моментных напряжений,  $\Lambda$  и  $M$  — тензоры деформации и кривизны,  $I$  — единичный тензор. Индексы  $s$  и  $a$  служат для обозначения симметричной и антисимметричной частей:  $2\Lambda^s = \Lambda + \Lambda^*$ ,  $2\Lambda^a = \Lambda - \Lambda^*$ . Используются общепринятые операции тензорного анализа, соответствующие умножению тензоров на векторы

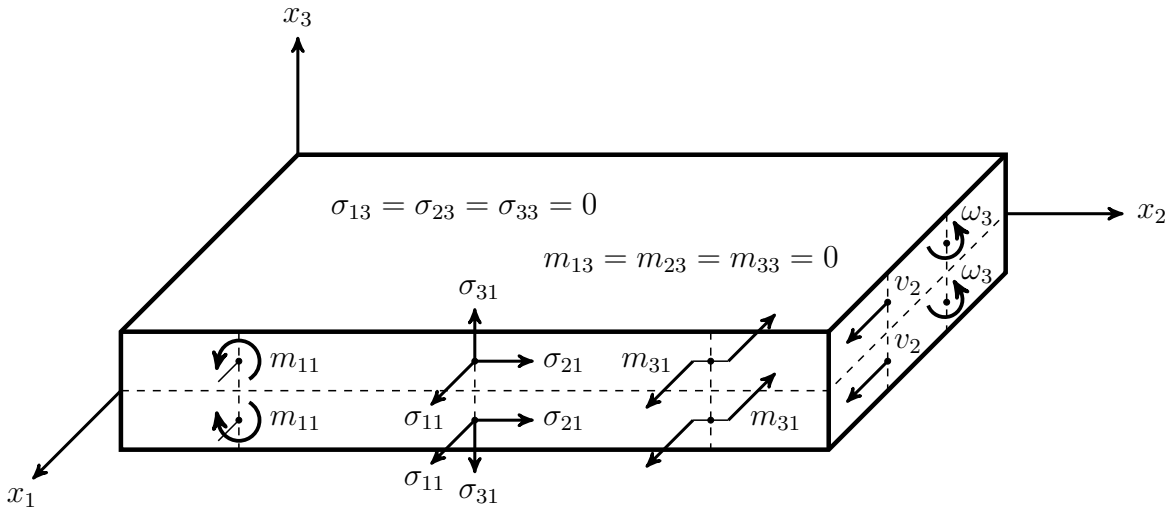


Рис. 1. Плоское напряженное состояние пластины

справа. Например, вектор напряжений на площадке с нормалью  $\nu$  определяется как  $\sigma_\nu = \sigma \cdot \nu$ , вектор моментных напряжений — как  $m_\nu = m \cdot \nu$ . Звездочка обозначает транспонирование, двоеточие — двойную свертку тензоров.

Для тензоров деформации и кривизны выполняются кинематические уравнения  $\dot{\Lambda} = v_x - \Omega$  и  $\dot{M} = \omega_x$ , в которых  $v_x$  — тензор градиентов скорости,  $\Omega$  и  $\omega$  — тензор и вектор угловой скорости, точка над символом означает производную по времени. В декартовой системе координат справедливы следующие представления (индексы после запятой служат для обозначения производных по пространственным координатам):

$$v_x = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} \\ v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,3} \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из гипотез плоского напряженного состояния следует равенство нулю по всей толщине пластины тех напряжений, которые равны нулю на свободных поверхностях. Если координатная система совмещена со срединной плоскостью, как это показано на рис. 1, то  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  и  $m_{13} = m_{23} = m_{33} = 0$ . В силу симметрии напряженно-деформированного состояния относительно срединной плоскости скорости поступательного движения в плоскости пластины  $v_1$  и  $v_2$ , угловая скорость  $\omega_3$ , а также напряжения  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{21}$ ,  $\sigma_{12}$  и моментные напряжения  $m_{32}$ ,  $m_{31}$  являются четными функциями поперечной координаты  $x_3$ . В то же время функции  $v_3$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\sigma_{32}$ ,  $\sigma_{31}$  и  $m_{11}$ ,  $m_{22}$ ,  $m_{21}$ ,  $m_{12}$  нечетны относительно  $x_3$ . Переходя к средним значениям скоростей и напряжений по толщине пластины

$$v'_k = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h v_k dx_3, \quad \omega'_k = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \omega_k dx_3, \quad \sigma'_{ij} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad m'_{ij} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h m_{ij} dx_3,$$

в результате усреднения уравнений (1) получим определяющие уравнения обоб-

щенного плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned}
 a_1 \dot{\sigma}'_{11} + a_2 \dot{\sigma}'_{22} &= v'_{1,1}, & a_2 \dot{\sigma}'_{11} + a_1 \dot{\sigma}'_{22} &= v'_{2,2}, \\
 a_3 \dot{\sigma}'_{21} + a_4 \dot{\sigma}'_{12} &= v'_{2,1} - \omega'_3, & a_4 \dot{\sigma}'_{21} + a_3 \dot{\sigma}'_{12} &= v'_{1,2} + \omega'_3, \\
 b_3 m'_{32} &= \omega'_{3,2}, & b_4 m'_{32} &= 0, \\
 b_4 m'_{31} &= 0, & b_3 m'_{31} &= \omega'_{3,1},
 \end{aligned} \tag{2}$$

записанные через модули упругой податливости материала

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, & a_2 &= -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}, & a_3 &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}, & a_4 &= -\frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}, \\
 b_1 &= \frac{\beta + \gamma}{\mu(3\beta + 2\gamma)}, & b_2 &= -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}, & b_3 &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, & b_4 &= -\frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}.
 \end{aligned}$$

Из общего вида уравнений (2) следует, что моментные напряжения могут быть отличными от нуля, только если  $b_4 = 0$ , то есть если  $\gamma = \varepsilon$ . Если же коэффициенты  $\gamma$  и  $\varepsilon$  различны, то формулировка граничных условий в терминах углов поворота или моментных воздействий на границе пластины математически некорректна, поскольку всюду в области пластины моментные напряжения оказываются равными нулю. Таким образом, возникает проблема выбора специальной меры кривизны, использование которой в качестве параметра состояния при построении определяющих уравнений нелинейной модели микрополярной среды с помощью принципов равновесной термодинамики привело бы к меньшему числу упругих коэффициентов в модели линейного приближения.

## 2. Кинематика моментной среды

Поступательное движение частицы среды с микроструктурой описывается обычным уравнением  $x = \xi + u$ , связывающим лагранжев  $\xi$  и эйлеров  $x$  векторы центра масс с вектором перемещений  $u(\xi, t)$ . Независимое вращение частицы задается ортогональным тензором поворота  $R(\xi, t)$ :

$$R \cdot R^* = I, \quad \det R = +1, \quad \dot{R} \cdot R^* + R \cdot \dot{R}^* = 0.$$

Антисимметричный тензор угловой скорости частицы вычисляется по формуле  $\Omega = \dot{R} \cdot R^*$ . В качестве меры деформации бесконечно малого элемента среды принимается тензор  $\Lambda = R^* \cdot x_\xi$ . При движении среды как жесткого целого, когда тензор дисторсии  $x_\xi$  совпадает с тензором поворота  $R$ , тензор  $\Lambda$  равен единичному тензору, что соответствует недеформированному состоянию элемента. Дифференцируя уравнение для  $\Lambda$  по времени, можно установить, что этот тензор удовлетворяет уравнению

$$R \cdot \dot{\Lambda} = v_\xi - \Omega \cdot x_\xi \tag{3}$$

( $v = \dot{x}$  — вектор скорости поступательного движения), линейное приближение которого в точности совпадает с кинематическим уравнением для тензора скоростей

деформации в геометрически линейной модели Коссера. Кроме того, можно показать, что  $\Lambda$  — инвариантный тензор, не изменяющийся при повороте текущей конфигурации. Это свойство неизбежно должно выполняться при лагранжевом описании движения.

Действительно, если  $O$  — ортогональное преобразование поворота текущей конфигурации, то

$$dx' = O \cdot dx = O \cdot x_\xi \cdot d\xi = O \cdot R \cdot \Lambda \cdot d\xi,$$

и, таким образом,  $x'_\xi = R' \cdot \Lambda'$ , где  $R' = O \cdot R$ ,  $\Lambda' = \Lambda$ .

Пусть  $x_\xi = R_e \cdot C$  — полярное разложение тензора дисторсии в произведение ортогонального тензора  $R_e$ , описывающего переносный поворот элемента среды, и симметричного тензора Коши–Грина  $C$ , который описывает искажение элемента. Так как поворот частицы  $R = R_e \cdot R_r$  является суперпозицией относительного  $R_r$  и переносного  $R_e$  поворотов, то по построению тензор  $\Lambda = R^* \cdot R_e \cdot C = R_r^* \cdot C$  учитывает как искажение элемента среды, так и относительный поворот частицы. Это свойство тензора  $\Lambda$  полностью соответствует общим представлениям о кинематике структурно неоднородной сплошной среды, состоящей из материальных частиц малого объема.

Если частица в естественном состоянии среды, совершая полный оборот вокруг неподвижной оси, возвращается в исходное положение, то тензор  $R$  оказывается равным единичному тензору. Следовательно, при таком описании полный оборот частицы не приводит к изменению деформированного состояния, что характерно, например, для микрополярных сред, представляющих собой большие ансамбли намагниченных частиц во внешнем магнитном поле. В [5] предложен принципиально отличающийся от рассматриваемого здесь вариант модели, в котором мерой искажения элемента служит тензор дисторсии, а мерой независимого вращательного движения частицы — интеграл по времени от вектора угловой скорости  $\omega$ . Как следствие — деформированное состояние среды отличается от первоначального состояния после полного оборота частицы.

Рассмотрим контрпример, показывающий, что интеграл по времени от вектора угловой скорости не может служить характеристикой движения, не зависящей от пути перехода из начальной конфигурации в текущую конфигурацию. Это означает, что при построении определяющих уравнений упругой среды с конечными поворотами частиц такая мера вращательного движения и мера кривизны, задаваемая уравнением  $\dot{M} = \omega_\xi$ , некорректны.

Пусть частица среды поворачивается за время  $t_1$  вокруг оси  $x_1$  декартовой системы координат на угол  $\varphi$ , а затем за время  $t_3$  вокруг оси  $x_3$  на такой же угол. В этом случае тензор поворота равен  $R = R^{(3)}|_\varphi \cdot R^{(1)}|_\varphi$ , где

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad R^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— тензоры поворота вокруг координатных осей  $x_1$  и  $x_3$ , соответственно. На первом этапе, когда  $\varphi_3 = 0$ , и на втором этапе, когда  $\varphi_1 = \varphi$ , тензор угловой скорости и

связанный с ним вектор угловой скорости вычисляются по формулам:

$$\Omega^{(1)} = \dot{\varphi}_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{(3)} = \dot{\varphi}_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega^{(1)} = \dot{\varphi}_1 (1, 0, 0), \quad \omega^{(3)} = \dot{\varphi}_3 (0, 0, 1).$$

Вышеупомянутый интеграл равен

$$\int_0^{t_1} \omega^{(1)}(t) dt + \int_0^{t_3} \omega^{(3)}(t) dt = (\varphi, 0, \varphi). \quad (4)$$

Укажем другой путь перехода из начальной конфигурации в конечную конфигурацию, определяемую тензором  $R$ , на котором интеграл от вектора угловой скорости принимает другое значение. Для ортогональных тензоров справедливо представление:

$$R = I + \sin \psi P + (1 - \cos \psi) P^2, \quad (5)$$

где  $\psi$  – угол поворота, который может быть вычислен через след тензора  $R$ :  $\cos \psi = (\text{tr } R - 1)/2$ , а  $P$  – антисимметричный тензор, связанный с направлением мгновенной оси вращения  $p = (p_1, p_2, p_3)$ . В развернутой форме

$$R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin 2\varphi/2 & \sin^2 \varphi \\ \sin \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin 2\varphi/2 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проекции вектора  $p$  являются решением системы нелинейных алгебраических уравнений (5):

$$p_1 = p_3 = \frac{(1 + \cos \varphi) \sin \varphi}{2 \sin \psi}, \quad p_2 = \frac{\sin^2 \varphi}{2 \sin \psi}, \quad \cos \psi = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)^2 - 1.$$

Предположим, что частица, выделенная в начальной конфигурации, совершает поворот за время  $t_p$  на угол  $\psi$  вокруг неподвижной оси  $p$ . В этом случае зависимость тензора поворота  $R^{(p)}$  от текущего угла поворота  $\psi_p$  задается формулой (5) с заменой  $\psi$  на  $\psi_p$ , а тензор и вектор угловой скорости вычисляются по формулам:  $\Omega^{(p)} = \dot{\psi}_p P$ ,  $\omega^{(p)} = \dot{\psi}_p p$ . Таким образом,

$$\int_0^{t_p} \omega^{(p)}(t) dt = \psi p \equiv \frac{\psi \sin \varphi}{2 \sin \psi} (1 + \cos \varphi, \sin \varphi, 1 + \cos \varphi),$$

что не совпадает с (4), если  $\varphi \neq 0$ . Следовательно, интеграл по времени от вектора угловой скорости не может служить естественной кинематической характеристикой.

### 3. Основные уравнения

Для описания деформированного состояния моментной среды, кроме тензора  $\Lambda$ , будем использовать специальный тензор кривизны  $M$ , зависящий лишь от тензора поворота  $R$  и от его производных по лагранжевым координатам  $R_{,k} = \partial R / \partial \xi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Пусть  $M^{(k)} = R_{,k} \cdot R^*$  – антисимметричные тензоры кривизны среды вдоль координатных линий. В качестве столбцов  $M$  возьмем векторы Дарбу, отвечающие этим тензорам:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}, \quad M^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -M_{3k} & M_{2k} \\ M_{3k} & 0 & -M_{1k} \\ -M_{2k} & M_{1k} & 0 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя  $M^{(k)}$  по времени, а  $\Omega$  – по переменным  $\xi_k$ , можно получить кинематические уравнения  $\dot{M}^{(k)} = \Omega_{,k} + \Omega \cdot M^{(k)} - M^{(k)} \cdot \Omega$ , которые в совокупности допускают тензорное представление

$$\dot{M} = \omega_\xi + \Omega \cdot M. \quad (6)$$

Справедливость этого представления легко проверить, переходя к покомпонентной записи тензоров в декартовой системе координат. Из (6) следует, что  $M$  не является ни инвариантным, ни индифферентным тензором, то есть что он изменяется как при повороте текущей конфигурации, так и при повороте начальной конфигурации.

Можно показать, что при повороте текущей конфигурации  $dx' = O \cdot dx$  этот тензор преобразуется по закону  $M' = O \cdot M$ . Действительно, так как тензор поворота  $O$  не зависит от времени, то

$$R' = O \cdot R, \quad \Omega' = \dot{R}' \cdot R'^* = O \cdot \dot{R} \cdot R^* \cdot O^* = O \cdot \Omega \cdot O^*, \quad \omega' = O \cdot \omega.$$

Следовательно, уравнение (6) приводится к уравнению  $\dot{M}' = O \cdot \omega_\xi + O \cdot \Omega \cdot O^* \cdot M'$ , решение которого имеет вид:  $M' = O \cdot M$ .

По такому же закону преобразуется, например, тензор дисторсии  $x_\xi$ , через который определяется инвариантная мера деформации  $x_\xi^* \cdot x_\xi$ , используемая при лагранжевом описании движения классической упругой среды, и индифферентная мера  $x_\xi \cdot x_\xi^*$ , используемая при эйлеровом описании, [12]. Обе эти меры не зависят от вращения элемента среды как жесткого целого. Аналогичным свойством инвариантности обладает произведение  $M^* \cdot M$ , которое может служить в качестве независимого параметра состояния при построении определяющих уравнений, учитывающих моментные свойства среды, в лагранжевых переменных и, как будет установлено далее, приводит к термодинамически согласованной системе законов сохранения.

Заметим, что выбранная мера кривизны отличается от традиционно используемых мер [7], определяемых несимметричными инвариантными тензорами. Проводя аналогию с мерой деформации, можно сказать, что симметризованная мера  $M^* \cdot M$  исключает из рассмотрения “лишние” степени свободы частиц микроструктуры материала, не влияющие на потенциальную энергию деформированного состояния.

Система уравнений динамики моментной среды строится на основе интегральных законов сохранения импульса, момента импульса и энергии в лагранжевой форме:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_0 v dV &= \int_{\Gamma} \sigma \cdot \nu d\Gamma + \int_V f dV, \\
\frac{\partial}{\partial t} \int_V (J \cdot \omega + \rho_0 x \times v) dV &= \int_{\Gamma} (x \times \sigma + m) \cdot \nu d\Gamma + \int_V (x \times f + g) dV, \\
\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \rho_0 \frac{v \cdot v}{2} + \frac{1}{2} \omega \cdot J \cdot \omega + \Phi \right) dV &= \int_{\Gamma} (v \cdot \sigma + \omega \cdot m - q) \cdot \nu d\Gamma + \\
&+ \int_V (v \cdot f + \omega \cdot g + Q) dV.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь  $V$  — произвольная область с кусочно-гладкой границей  $\Gamma$ , выделенная в начальном (недеформированном) состоянии среды,  $\nu$  — вектор внешней нормали к границе,  $\rho_0$  — начальная плотность,  $J$  — симметричный и положительно определенный тензор инерции,  $\sigma$  — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа,  $m$  — тензор моментных напряжений,  $\Phi$  — внутренняя энергия среды в единице объема,  $q$  — вектор теплового потока,  $f$  и  $g$  — объемные плотности массовых сил и моментов,  $Q$  — интенсивность внутренних источников тепла.

В процессе движения среды область  $V$ , состоящая из материальных частиц, переходит в деформированное состояние  $V_t$ , масса вещества сохраняется  $\rho_0 dV = \rho dV_t$ , плотность меняется по закону  $\rho = \rho_0 / \det x_\xi$ , а тензор инерции частиц, содержащихся в единице объема, преобразуется по формуле  $J_t = (\rho / \rho_0) J$ . Тензор  $J$ , отнесенный к начальному состоянию, меняется в зависимости от времени в соответствии с уравнением  $\dot{J} = R \cdot J^0 \cdot R^*$ , которое можно обосновать, переходя к сопутствующей системе координат, связанной с вращающейся частицей. Дифференцирование по времени дает следующее уравнение для тензора инерции:

$$\dot{J} = \Omega \cdot J - J \cdot \Omega. \tag{8}$$

Для непрерывных движений интегральные законы сохранения эквивалентны дифференциальным уравнениям, которые могут быть получены из (7) с помощью формулы Грина:

$$\begin{aligned}
\rho_0 \dot{v} &= \operatorname{div}_\xi \sigma + f, & \frac{\partial}{\partial t} (J \cdot \omega) &= \operatorname{div}_\xi m + 2(\sigma \cdot x_\xi^*)^a + g, \\
\dot{\Phi} &= \sigma^* : (v_\xi - \Omega \cdot x_\xi) + m^* : \omega_\xi - \operatorname{div}_\xi q + Q.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь и всюду ниже  $\operatorname{div}_\xi$  — оператор дивергенции по лагранжевым переменным, верхний индекс “ $a$ ” служит для обозначения вектора, соответствующего антисимметричной части тензора. При выводе (9) используется равенство  $\omega \cdot \dot{J} \cdot \omega = 0$ , представляющее собой прямое следствие уравнения (8).



Для обратимых процессов, термодинамическими параметрами состояния которых служат мера деформации  $\Lambda$ , мера кривизны  $M$  и энтропия  $s$ , последнее уравнение системы (9), переписанное с учетом (3) и (6) в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda^*} : \dot{\Lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial M^*} : \dot{M} + T\dot{s} = \sigma^* : (R \cdot \dot{\Lambda}) + m^* : (\dot{M} - \Omega \cdot M) - \operatorname{div}_\xi q + Q,$$

где  $T = \partial \Phi / \partial s$  – абсолютная температура, распадается в силу линейной независимости величин  $\dot{\Lambda}$ ,  $\dot{M}$  (вариаций деформированного состояния) на определяющие уравнения

$$R^* \cdot \sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda}, \quad m = \frac{\partial \Phi}{\partial M}, \quad (10)$$

уравнение притока тепла

$$T\dot{s} = -\operatorname{div}_\xi q + Q \quad (11)$$

и дополнительное уравнение  $m^* : (\Omega \cdot M) = 0$ .

В силу линейной независимости проекций вектора угловой скорости дополнительное уравнение сводится к условию симметрии тензора  $m \cdot M^*$ , ограничивающему общий вид зависимости упругого потенциала  $\Phi$  от тензора кривизны  $M$ . Переходя от тензорной к координатной форме, можно показать, что условие симметрии выполняется только в том случае, когда  $\Phi$  является функцией от симметричного тензора  $N = M^* \cdot M$ . Действительно, это условие в развернутой форме приводит к переопределенной системе уравнений в частных производных первого порядка относительно функции  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} M_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{21}} + M_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{22}} + M_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{23}} &= M_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{31}} + M_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{32}} + M_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{33}}, \\ M_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{31}} + M_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{32}} + M_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{33}} &= M_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{11}} + M_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{12}} + M_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{13}}, \\ M_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{11}} + M_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{12}} + M_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{13}} &= M_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{21}} + M_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{22}} + M_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial M_{23}}. \end{aligned}$$

Каждое уравнение решается методом характеристик. Для первого из них система характеристических уравнений

$$\frac{dM_{21}}{M_{31}} = \frac{dM_{22}}{M_{32}} = \frac{dM_{23}}{M_{33}} = -\frac{dM_{31}}{M_{21}} = -\frac{dM_{32}}{M_{22}} = -\frac{dM_{33}}{M_{23}} = \frac{d\Phi}{0}$$

имеет шесть функционально независимых интегралов

$$M_{21}^2 + M_{31}^2 = C_1, \quad M_{22}^2 + M_{32}^2 = C_2, \quad M_{23}^2 + M_{33}^2 = C_3,$$

$$M_{21}M_{22} + M_{31}M_{32} = C_4, \quad M_{21}M_{23} + M_{31}M_{33} = C_5, \quad \Phi = C_6.$$

Общее решение уравнения  $\Phi = \Phi(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5)$  зависит от величин  $M_{jk}$  с индексом  $j = 1$  как от параметров. Анализ общих решений двух оставшихся уравнений с выбором универсальной зависимости  $\Phi(M)$ , удовлетворяющей всем трем уравнениям системы, дает  $\Phi = \Phi(N)$ . При этом определяющее уравнение (10) для

моментных напряжений принимает вид  $m = 2M \cdot \partial\Phi/\partial N$ , а условие симметрии  $m \cdot M^* = M \cdot m^*$  выполняется автоматически.

Заметим, что линеаризация уравнения (6) в случае бесконечно малой кривизны приводит к уравнению  $\dot{M} = \omega_\xi$ , корректность которого при описании конечных деформаций и поворотов частиц среды обсуждалась выше. Это уравнение для тензора кривизны используется в классической теории континуума Коссера с малыми деформациями и поворотами. Однако, вопреки полученному ограничению, потенциал напряжений классической теории содержит в качестве одного из слагаемых квадратичную форму, зависящую от всех компонент тензора кривизны  $M$ . Такая зависимость не противоречит напрямую принципам термодинамики, так как при независимом выводе геометрически линейного варианта модели дополнительного уравнения — условия симметрии тензора  $m \cdot M^*$  — не возникает. Тем не менее потенциал не может быть взят в таком виде, поскольку корректное обобщение линейной модели на нелинейный случай возможно, только если квадратичная форма не содержит комбинаций, отличных от компонент симметричного тензора  $N$ . Следовательно, для изотропного континуума Коссера зависящее от кривизны слагаемое в квадратичном потенциале напряжений должно быть пропорциональным первому инварианту тензора  $N$  и равным  $\gamma M_{jk} M_{jk}$ . Соответствующее уравнение для моментных напряжений  $m_{jk} = 2\gamma M_{jk}$  содержит один коэффициент упругости среды  $\gamma$  вместо трех независимых коэффициентов классической теории. Для анизотропного континуума это слагаемое должно задаваться квадратичной формой  $\Gamma_{kl} M_{jk} M_{jl}$  с симметричным тензором коэффициентов  $\Gamma$  второго ранга вместо тензора четвертого ранга.

## 4. Каноническая форма уравнений

В адиабатическом приближении модели ( $q = 0$ ,  $Q = 0$ ) замкнутую систему составляют входящие в (9) уравнения поступательного и вращательного движения, определяющие уравнения (10), уравнение  $\dot{R} = \Omega \cdot R$  для тензора поворота и уравнение  $\dot{s} = 0$  для энтропии.

Пусть  $\tau = R^* \cdot \sigma$  — тензор напряжений, образующий с  $\Lambda$  дуальную пару,

$$\Psi(\tau, m, s) = \tau^* : \Lambda + m^* : M - \Phi(\Lambda, M, s)$$

— двойственный потенциал, равный преобразованию Лежандра от внутренней энергии. В терминах двойственного потенциала определяющие уравнения (10) записываются в обращенном виде:

$$R \cdot \Lambda = R \cdot \frac{\partial\Psi(\tau, m, s)}{\partial\tau} = \frac{\partial\Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial\sigma}, \quad M = \frac{\partial\Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial m}.$$

С помощью (3) и (6) они приводятся к дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial\sigma} = v_\xi, \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial m} = \omega_\xi + \Omega \cdot \frac{\partial\Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial m}.$$

Это позволяет представить модель в виде термодинамически согласованной системы законов сохранения в следующем смысле [13, 14]: можно указать производящие

потенциалы  $L^0$  и  $L^j$ , с помощью которых полная система уравнений, записанная относительно декартовой системы координат

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{v}_i &= \sigma_{ij,j} + f_i, & \frac{\partial}{\partial t} (J_{ij} \omega_j) &= m_{ij,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{kl} \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial \sigma_{jl}} + g_i, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial \sigma_{ij}} &= v_{i,j}, & \dot{R}_{ij} &= \varepsilon_{ikl} \omega_k R_{lj}, & \dot{s} &= 0, & J_{ij} &= J_{kl}^0 R_{ik} R_{jl}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial m_{ij}} &= \omega_{i,j} + \varepsilon_{ikl} \omega_k \frac{\partial \Psi(R^* \cdot \sigma, m, s)}{\partial m_{lj}} \end{aligned} \quad (12)$$

( $\varepsilon_{ijk}$  — дискриминантный тензор), преобразуется к единообразной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L^0(DU)}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \frac{\partial L^j(U)}{\partial U} + F(D, U), \quad \frac{\partial D}{\partial t} = G(D, U). \quad (13)$$

Здесь  $U$  — вектор-столбец, составленный из неизвестных функций (исключая энтропию), т.е. из проекций векторов скорости поступательного движения и угловой скорости, компонент тензоров напряжений и моментных напряжений;  $D$  — невырожденная матрица, отличными от нуля и единицы элементами которой служат величины  $R_{ij}$ ;  $F$  и  $G$  — заданные векторная и матричная функции, легко определяемые по виду уравнений. Производящие потенциалы равны

$$\begin{aligned} L^0(DU) &= \rho_0 \frac{v_i v_i}{2} + \frac{1}{2} (R^* \cdot \omega)_i J_{ij}^0 (R^* \cdot \omega)_j + \Psi(R^* \cdot \sigma, m, s), \\ L^j(U) &= v_i \sigma_{ij} + \omega_i m_{ij}. \end{aligned}$$

Уравнение для энтропии, входящее в (12), не включено в систему (13), поскольку из нее автоматически следует эквивалентный этому уравнению дополнительный закон сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( U \cdot \frac{\partial L^0(DU)}{\partial U} - L^0(DU) \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( U \cdot \frac{\partial L^j(U)}{\partial U} - L^j(U) \right) + \\ &+ U \cdot F - \frac{\partial L^0(DU)}{\partial U} \cdot D^{-1} G U, \end{aligned} \quad (14)$$

справедливость которого можно проверить с помощью формулы дифференцирования

$$\frac{\partial L^0(DU)}{\partial t} = \frac{\partial L^0(DU)}{\partial U} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial t} + D^{-1} \frac{\partial D}{\partial t} U \right). \quad (15)$$

Система уравнений (13) обладает рядом важных свойств, свидетельствующих о математической корректности модели. Она имеет дивергентную форму и может служить для описания обобщенных решений с разрывами скоростей и напряжений — ударными волнами и контактными разрывами на поверхностях раздела сред с разными механическими свойствами. Для решения таких систем разработаны эффективные вычислительные алгоритмы, адаптированные к расчету разрывов, [15].

Применяя формулу (15) к производной  $\partial L^0(DU)/\partial U$ , можно привести систему (13) к симметрической форме:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^j \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \begin{pmatrix} D \\ U \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G \\ H \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь

$$A(D, U) = \frac{\partial^2 L^0(DU)}{\partial U^2}, \quad B^j(U) = \frac{\partial^2 L^j(U)}{\partial U^2}, \quad H(D, U) = F - A D^{-1} G U.$$

Матрицы  $A$  и  $B^j$  симметричны и, кроме того, в случае сильной выпуклости потенциала  $L^0(DU)$  матрица  $A$  положительно определена. Поэтому система уравнений (13) относится к гиперболическому типу. Условие сильной выпуклости  $L^0$  выполняется, если двойственный потенциал  $\Psi(\tau, m, s)$  представляет собой сильно выпуклую функцию по совокупности переменных  $\tau$  и  $m$ .

Предположим, что матрицы-коэффициенты системы (16) и правые части  $G$  и  $H$  удовлетворяют условию Липшица по  $D$  и  $U$ . Тогда для разности двух решений такой системы, определенных в пространственно-временной области  $W$  типа усеченного конуса, основаниями которого служат гиперплоскости  $t = t_0$  и  $t = t_1$ , а уравнение боковой поверхности  $h(\xi, t) = 0$  удовлетворяет неравенству Гамильтона–Якоби [16]:  $\dot{h} + c(h_\xi) \geq 0$ , где  $h_\xi$  – градиент  $h$ , а  $c(\nu)$  – наименьший корень характеристического уравнения  $\det(cA + \nu_j B^j) = 0$ , справедлива априорная оценка

$$\|(D', U') - (D, U)\|(t_1) \leq \|(D', U') - (D, U)\|(t_0) \exp a(t_1 - t_0). \quad (17)$$

Здесь  $a$  – постоянная, зависящая, вообще говоря, от обоих решений и от их производных по времени и по пространственным переменным, двойными скобками обозначена энергетическая норма

$$\|(D, U)\|^2(t) = \frac{1}{2} \int_{W_\xi} (\text{tr } D^* D + U A U) dV$$

( $\text{tr}$  – след матрицы), вычисляемая как интеграл по сечению  $W_\xi$  конической области  $W$  гиперплоскостью  $t = \text{const}$ . Отсюда следует, что решение задачи Коши

$$D|_{t=t_0} = D^0(\xi), \quad U|_{t=t_0} = U^0(\xi)$$

единственно в  $W$  и непрерывно зависит от начальных данных. Кроме того, оценка (17) показывает ограниченность областей зависимости и влияния решений, т.е. конечность скоростей распространения возмущений в рассматриваемой модели.

Такая же оценка справедлива в усеченных конусах, примыкающих к границе области решения задачи, если на этой границе поставлены диссипативные граничные условия. Диссипативность в точности означает, что для любых двух решений на границе выполняется неравенство

$$(U' - U) B^j (U' - U) \nu_j \leq 0,$$

где  $\nu$  – вектор внешней нормали. Из интегральной оценки в этом случае следует единственность и непрерывная зависимость от начальных данных решений краевых задач. Учитывая структуру матриц  $B^j$ , можно показать, что условие диссипативности для модели моментной теории упругости сводится к неравенству

$$(v'_i - v_i)(\sigma'_{ij} - \sigma_{ij})\nu_j + (\omega'_i - \omega_i)(m'_{ij} - m_{ij})\nu_j \leq 0. \quad (18)$$

К диссипативным относятся граничные условия в скоростях  $v_i = \bar{v}_i$ ,  $\omega_i = \bar{\omega}_i$ , и граничные условия в напряжениях  $\sigma_{ij}\nu_j = \bar{\sigma}_i$ ,  $m_{ij}\nu_j = \bar{m}_i$ , а также комбинированные варианты таких условий. Например, на некоторой части границы могут быть заданы векторы угловой скорости  $\bar{\omega}_i$  и напряжений  $\bar{\sigma}_i$  или векторы линейной скорости  $\bar{v}_i$  и моментных напряжений  $\bar{m}_i$ . Допускаются также смешанные граничные условия, когда задаются нормальные скорости и касательные напряжения, или, наоборот, нормальные напряжения и касательные скорости.

## Список литературы

- [1] E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des Corps Déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [2] В. А. Пальмов, “Основные уравнения теории несимметричной упругости”, *Прикл. матем. и механ.*, **28**:3 (1964), 401–408.
- [3] В. Т. Койтер, “Моментные напряжения в теории упругости”, *Механика: Сб. переводов*. Т. 3, 1965, 89–112.
- [4] Э. Л. Аэро, А. Н. Булыгин, Е. В. Кувшинский, “Асимметрическая гидромеханика”, *Прикл. матем. и механ.*, **29**:2 (1965), 297–308.
- [5] В. И. Кондауров, “О нелинейных уравнениях динамики упругой микрополярной среды”, *Прикл. матем. и механ.*, **48**:3 (1984), 404–413.
- [6] E. Nikitin, L. M. Zubov, “Conservation laws and conjugate solutions in the elasticity of simple materials and materials with couple stress”, *J. Elast.*, **51** (1998), 1–22.
- [7] W. Pietraszkiewicz, V. A. Eremeev, “On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum”, *Int. J. Solids Struct.*, **46** (2009), 774–787.
- [8] A. E. Green, P. M. Naghdi, W. L. Wainwright, “A general theory of a Cosserat surface”, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **20**:4 (1965), 287–308.
- [9] Л. И. Шкутин, *Механика деформаций гибких тел*, Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1988.
- [10] Х. Альтенбах, П. А. Жилин, “Общая теория упругих простых оболочек”, *Успехи механики*, **11**:4 (1988), 107–148.
- [11] В. М. Садовский, “Термодинамически самосогласованная система законов сохранения несимметричной теории упругости”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:2 (2011), 201–212.
- [12] В. И. Кондауров, В. Е. Фортов, *Основы термомеханики конденсированной среды*, Изд-во МФТИ, М., 2002.
- [13] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.
- [14] O. Sadovskaya, V. Sadovskii, *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials, Ser.: Advanced Structured Materials*. V. 21, Springer, Heidelberg – New York – Dordrecht – London, 2012.
- [15] А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, Физматлит, М., 2001.
- [16] С. К. Годунов, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1979.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 сентября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 16-41-240415).

---

*Sadovskii V. M.* Thermodynamically consistent equations of the couple stress elasticity. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 209–222.

#### ABSTRACT

To describe motion in a micropolar medium, with the concurrent translational degrees of freedom and independent particle rotations, it is chosen to use natural measure of curvature that is a strain state characteristic independent of deformation method. It is shown that the common Lagrangian curvature measure with the rate of change equal to a tensor of angular velocity gradients is only applicable under geometrically linear approximation. The nonlinear constitutive equations of the couple stress theory are constructed using the method of internal thermodynamic parameters of state. The linearization of these equations in isotropic case yields the Cosserat continuum equations, where material resistance to the change in curvature is characterized by a single coefficient as against the three independent coefficients of the classical theory. The complete system of equations for the dynamics of a medium with couple stresses under finite strains and particle rotations reduces to a thermodynamically consistent system of laws of conservation. This system allows to obtain the integral estimates that guarantee the uniqueness and continuous dependence on the initial data of solutions of the Cauchy problems and the boundary-value problems with dissipative boundary conditions.

*Key words: elasticity, Cosserat continuum, couple stresses, curvature tensor, thermodynamically consistent system.*