Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 223–228

УДК 519.178, 519.218.5
MSC2010 05C20, 60G55

© Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова[1]

Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания

В работе рассматривается открытая ациклическая сеть массового обслуживания в стационарном режиме с экспоненциально распределенными временами обслуживания в узлах и пуассоновским входным потоком. С использованием преобразования этой сети в сеть многофазного типа доказывается, что все потоки в ней являются пуассоновскими и некоторые из них являются независимыми.

Ключевые слова: *ациклическая сеть массового обслуживания, сеть обслуживания многофазного типа, фиктивный узел, пуассоновский поток, стационарный режим.*

Введение

В работе рассматривается открытая ациклическая сеть массового обслуживания с экспоненциально распределенными временами обслуживания в ее узлах. Доказывается пуассоновость всех потоков этой сети в стационарном режиме и независимость некоторых их них.

Данное исследование основано на известной теореме Бурке [1] о пуассоновости стационарного выходного потока в многоканальной системе массового обслуживания. Эта теорема дополняется преобразованием ориентированной ациклической сети обслуживания в сеть многофазного типа, в которой множество вершин разбито на последовательность непересекающихся подмножеств, а направленные ребра соединяют вершины из соседних подмножеств.

1. Вычисление максимальных длин путей в ациклических ориентированных графах

Рассмотрим ациклический ориентированный граф G с множеством вершин $U = \{1, \dots, n\}$ и множеством ребер V. Полагаем, что в графе G для любой вершины

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@iam.dvo.ru, mao1975@list.ru

$i \in U$ существует путь из вершины 1 в вершину i. Для каждой вершины i графа G определим максимальную длину пути l_i из вершины 1 в вершину i, $l_1 = 0$.

Для конструктивного вычисления l_i, $i = 2, \ldots, n$, введем матрицу $D^1 = ||d^1_{i,j}||^n_{i,\,j=1}$, где $d^1_{i,\,i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, $d^1_{i,\,j} = \infty$, если $(i,\ j) \notin V$, $d^1_{i,\,j} = 1$, если $(i,\ j) \in V$. Тем самым подчеркнем, что для любой пары вершин, которые не соединяются ребром (путем длины единица), величина $d^1_{i,\,j}$ равна бесконечности.

Построим аналог алгоритма Флойда - Уоршелла [2, С. 1296] для нахождения матрицы максимальных длин всех путей между вершинами ациклического ориентированного графа. Обозначим $D^k = ||d^k_{i,\,j}||^n_{i,\,j=1}$, $k = 1, \ldots, n$, где величина $d^k_{i,\,j}$ равна бесконечности, тогда и только тогда, когда в графе G нет пути из вершины i в вершину j, который проходит через вершины из множества $\{1, \ldots, k\}$. Если такие пути существуют, то величина $d^k_{i,\,j}$ равна максимальной длине таких путей. Нетрудно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Матрицы* $D^k = ||d^k_{i,\,j}||^n_{i,\,j=1}$, $k = 2, \ldots, n$, *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$d^k_{i,\,j} = \max(d^{k-1}_{i,\,j},\ d^{k-1}_{i,\,k} + d^{k-1}_{k,\,j}), \qquad \text{если} \qquad \max(d^{k-1}_{i,\,j},\ d^{k-1}_{i,\,k} + d^{k-1}_{k,\,j}) < \infty, \tag{1}$$

$$\text{иначе} \qquad d^k_{i,\,j} = \min(d^{k-1}_{i,\,j},\ d^{k-1}_{i,\,k} + d^{k-1}_{k,\,j}). \tag{2}$$

Причем матрица $D^n = ||d^n_{i,\,j}||^n_{i,\,j=1}$ *определяет максимальные длины путей между вершинами графа* G, *если такие пути существуют. В случае отсутствия таких путей соответствующие элементы матрицы равны бесконечности.*

Таким образом, с помощью теоремы 1 можно вычислить максимальные длины путей из вершины 1 в вершины $i = 2, \ldots, n:\ l_i = d^n_{1,\,i}$.

2. Преобразование открытой ациклической сети обслуживания в сеть многофазного типа

Рассмотрим открытую ациклическую сеть массового обслуживания S с конечным числом узлов $1, \ldots, n$ и пуассоновским входным потоком интенсивности λ_1. Перемещения заявок по сети S определяются матрицей $\Theta = ||\theta_{i,j}||^n_{i,j=1}$, состоящей из вероятностей $\theta_{i,j}$ перехода заявки в узел j после после окончания обслуживания в узле i. Причем $\theta_{1,i}$ – это вероятность заявки входного потока поступить на обслуживание в узел i, а $\theta_{i,1}$ – это вероятность ухода заявки из сети после окончания обслуживания в узле i, $2 \le i \le n$.

В узле k сети S находится n_k идентичных приборов с показательным распределением времени обслуживания заявок, имеющим параметр μ_k, $0 < \mu_k \le \infty$, $k = 2, \ldots, n$.

Сопоставим матрице переходных вероятностей Θ ориентированный граф G с множеством вершин $1, \ldots, n$ и множеством V ребер $(i,\ j)$, для которых переходная вероятность $\theta_{i,\,j} > 0$. Предположим, что матрица Θ устроена таким образом, что ориентированный граф G является ациклическим. Назовем так определенную открытую сеть массового обслуживания ациклической.

Рассмотрим систему балансовых соотношений для стационарных интенсивностей $\lambda_k,\ k = 2, \ldots, n$, входных потоков в узлы сети S :

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\Theta.$$

В силу ацикличности графа G эта система может быть переписана в виде

$$\lambda_i = \sum_{k \in V_i} \lambda_k \theta_{k,\,i},\ i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где V_i – множество вершин сети S, откуда заявки поступают в вершину i. Очевидно, что при фиксированной интенсивности $\lambda_1 > 0$ входного потока система (3) имеет единственное решение $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Потребуем, чтобы при каждом $k = 2, \ldots, n$ выполнялось неравенство

$$\lambda_k < n_k \mu_k.$$

Тогда в сети S существует стационарный режим [3].

Перейдем теперь к преобразованию сети S в сеть многофазного типа, в которой все вершины разбиты на множества L_k, находящиеся на расстоянии k от вершины 1, причем переходы возможны только из вершины множества L_p в вершину множества $L_{p+1},\ 1 \le p \le K-1,\ K = \max\limits_{i=1,\ldots,n} l_i$.

Это преобразование начнем с графа G. Очевидно, что все вершины, из которых ребра непосредственно входят в вершину $i \in L_p,\ p = 1, \ldots, K$, содержатся в множествах $L_{p-1},\ L_{p-2},\ \ldots, L_1$. Действительно, если ребро $(i,\ j)$ удовлетворяет условию $i \in L_p,\ j \in L_q,\ p \le q$, то в силу ацикличности граф G не содержит ребра $(j,\ i)$, поскольку в этом случае $l_i > q \ge p$, и значит, $i \notin L_p$.

Предположим, что при тех же условиях $i \in L_p,\ j \in L_q,\ q < p$, граф G содержит ребро $(i,\ j)$. Тогда в это ребро можно вставить $q - p - 1$ фиктивных вершин, принадлежащих множествам $L_{q+1}, \ldots, L_{p-1}$ (см. рис. 1). После такого преобразования графа G в граф G' длина любого пути из вершины 1 в вершину i равна l_i, причем направленные ребра графа G' соединяют только вершины соседних множеств $L_{p-1},\ L_p,\ p = 1, \ldots, n$.

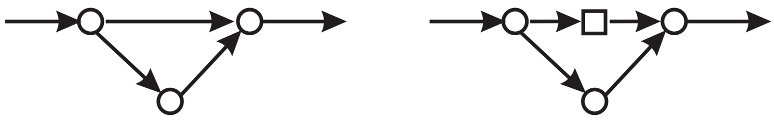

Рис. 1. Включение фиктивного узла $\square$ в ациклический граф

Очевидно, что такое преобразование графа G в граф G' не меняет потока, проходящего по ребру $(i,\ j)$, если вводимые таким способом промежуточные вершины мгновенно пропускают заявки входящего в них потока. В результате сеть обслуживания S превращается в сеть обслуживания S' многофазного типа.

3. Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания

Целью настоящей работы является исследование стационарных потоков в сетях $S,\ S'$, установление условий их пуассоновости и независимости. Под стационарным понимаем поток в сети (системе) массового обслуживания в стационарном режиме.

Это исследование базируется на теореме Бурке [1] о пуассоновости стационарного выходного потока в многоканальной системе массового обслуживания с пуассоновским входным потоком и показательным распределением времени обслуживания заявок в каналах.

Перейдем теперь к анализу пуассоновости и независимости стационарных потоков в сетях $S,\ S'$. Пусть случайные векторы $(n_1^{(1)},\ldots,n_1^{(k)}),\ (n_2^{(1)},\ldots,n_2^{(k)})$ характеризуют количество заявок потоков $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ на непересекающихся отрезках $[t^{(1)},t^{(1)}+T^{(1)}],\ldots,[t^{(k)},t^{(k)}+T^{(k)}]$ временной полуоси $t\geq 0$. Скажем, что случайные потоки $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ независимы, если для любой конечной совокупности непересекающихся отрезков $[t^{(1)},t^{(1)}+T^{(1)}],\ldots,[t^{(k)},t^{(k)}+T^{(k)}]$ случайные векторы $(n_i^{(1)},\ldots,n_i^{(k)}),\ i=1,2,$ независимы.

Лемма 1. *Пусть $\Lambda=\{0\leq t_1\leq t_2\leq\ldots\}$ – пуассоновский поток точек интенсивности λ, каждая точка которого независимо от других точек с вероятностью p_1 становится точкой потока Λ_1 и с вероятностью $p_2=1-p_1$ – точкой потока Λ_2. Тогда потоки $\Lambda_1,\ \Lambda_2$ являются пуассоновскими с интенсивностями $\lambda p_1,\ \lambda p_2$ и независимыми.*

Доказательство. Возьмем произвольный отрезок $[t,t+T],\ 0\leq t,\ 0<T$ и обозначим $n,\ n_1,\ n_2$ количество точек потоков $\Lambda,\ \Lambda_1,\ \Lambda_2$ на этом отрезке соответственно. Вычислим вероятность

$$P(n_1=k_1,\ n_2=k_2)=P(n=k_1+k_2)C_{k_1+k_2}^{k_1}p_1^{k_1}p_2^{k_2}=e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}\frac{(k_1+k_2)!}{k_1!k_2!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}=$$

$$=e^{-\lambda Tp_1}\frac{(\lambda Tp_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda Tp_2}\frac{(\lambda Tp_2)^{k_2}}{k_2!}=P(n_1=k_1)\cdot P(n_2=k_2). \tag{4}$$

Пусть теперь отрезки $[t^{(1)},t^{(1)}+T^{(1)}],\ldots,[t^{(k)},t^{(k)}+T^{(k)}]$ временной оси не пересекаются. Аналогично (4) доказывается независимость соответствующих этим отрезкам случайных векторов $(n_1^{(1)},\ldots,n_1^{(k)}),\ (n_2^{(1)},\ldots,n_2^{(k)})$ и независимость компонент этих векторов. □

Следствие 1. *Пусть каждая заявка потока Λ независимо от других заявок с вероятностью p_i поступает в поток $\Lambda_i,\ p_i>0,\ i=1,\ldots,r,\ \sum\limits_{i=1}^{r}p_i=1$. Тогда потоки $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_r$ являются пуассоновскими с интенсивностями $\lambda p_1,\ldots,\lambda p_r$ и независимыми.*

Лемма 2. *Пусть пуассоновские потоки* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_r$ *с параметрами* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *независимы. Тогда их объединение* $\bigcup\limits_{i=1}^{r} \Lambda_i$ *является пуассоновским потоком с параметром* $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i$.

Лемма 2 доказана в [4, § 30].

Теорема 2. *Все стационарные потоки, исходящие из вершин множества* L_p *сети* S', *являются пуассоновскими и независимыми,* $1 \le p \le K$.

Доказательство. Все стационарные потоки сети S', выходящие из вершины 1, в силу следствия 1 являются пуассоновскими и независимыми. Используя леммы 1, 2 и теорему Бурке, нетрудно получить то, что все стационарные потоки, выходящие из вершин $i \in L_1$, являются пуассоновскими и независимыми. Предположим, что стационарные потоки, выходящие из вершин множества L_p, — пуассоновские и независимые. Тогда, используя следствие 1, лемму 2 и теорему Бурке, получаем, что стационарные потоки в ребрах, выходящих из вершин множества L_{p+1}, также являются пуассоновскими и независимыми. Отсюда следует, что для любого p, $p = 1, \ldots, K$, выполняется утверждение теоремы 2. $\square$

Следствие 2. *Все стационарные потоки сети* S *являются пуассоновскими.*

Доказательство. В рамках теоремы 2, переходя теперь от сети S' к исходной сети S, нетрудно получить то, что все стационарные потоки в сети S являются пуассоновскими. $\square$

Список литературы

[1] P. J. Burke, “The output of a queuing system”, *Operations Research*, **4** (1956), 699–704.

[2] Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн, *Алгоритмы: построение и анализ*, Вильямс, Москва, 2006.

[3] J. R. Jackson, “Networks of Waiting Lines”, *Oper. Res. Vol.*, **5**:4 (1957), 518–521.

[4] В. И. Тихонов, М. А. Миронов, *Марковские процессы*, Сов. радио, Москва, 1977.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 октября 2016 г.

Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. Stationary flows in acyclic queuing networks. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 223–228.

ABSTRACT

In this paper an open acyclic queuing network with exponentially distributed service times is considered. Using a transformation of this network to a network of multiphase type it is proved that its flows are Poisson and some of these flows are independent. Applications to systems with retrial queues are described.

Key words: *an acyclic queuing network, a queuing network of multiphase type, a sham node, Poisson flows, a stationary regime.*