Дальневосточный математический журнал. 2016. Том 16. № 2. С. 229–236

УДК 517.95
MSC2010 35J61, 35Q79

© А. Ю. Чеботарев, Г. В. Гренкин, А. Е. Ковтанюк[1]

Однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи для уравнений сложного теплообмена

Рассмотрена модель процесса радиационно-кондуктивного теплообмена с многозначной зависимостью коэффициента излучения от интенсивности. Доказана однозначная разрешимость субдифференциальной краевой задачи для уравнений сложного теплообмена в трехмерной области.

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, субдифференциальные краевые условия, нелокальная однозначная разрешимость.*

Введение

Процесс радиационно-кондуктивного теплообмена в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ моделируется, в рамках диффузионного P_1 приближения уравнения переноса излучения, системой нелинейных эллиптических уравнений [1], [2].

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a|\theta|\theta^3 = b\kappa_a\varphi, \qquad -\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\varphi = \kappa_a|\theta|\theta^3. \tag{1}$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, κ_a — коэффициент поглощения. Постоянные a, b, и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_p}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{max}^3}{\rho c_p}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k — теплопроводность, c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана– Больцмана, n — показатель преломления, T_{max} — максимальная температура в ненормализованной модели, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ — коэффициент полного взаимодействия, κ_s — коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1, 1]$ описывает анизотропию рассеяния.

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

К уравнениям (1) добавляются краевые условия на границе $\Gamma = \partial\Omega$

$$a\partial\theta/\partial n + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

$$\alpha\partial\varphi/\partial n + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

Здесь через $\partial/\partial n$ обозначена производная по направлению внешней нормали к границе. Неотрицательные функции θ_b и β, определенные на Γ, являются заданными. Будем предполагать, что величина γ, определяющая коэффициент излучения границы Γ, имеет структуру

$$\gamma = \gamma(\varphi) = \begin{cases} \gamma_0, & \varphi > \theta_0^4, \\ [\gamma_0, \gamma_1], & \varphi = \theta_0^4, \\ \gamma_1, & \varphi < \theta_0^4, \end{cases} \tag{4}$$

где функции $0 \le \gamma_0 \le \gamma_1$, $0 \le \theta_0 \le \theta_b$ предполагаются известными. Многозначная функция (4) моделирует изменение отражающих свойств границы области в зависимости от интенсивности излучения.

Заметим, что краевое условие (3) удобно записать в виде

$$-\alpha\partial\varphi/\partial n \in \partial g(\varphi), \quad g(\varphi) = \begin{cases} \frac{\gamma_0}{2}(\varphi - \theta_b^4)^2, & \varphi \ge \theta_0^4, \\ \frac{\gamma_1}{2}(\varphi - \theta_b^4)^2 + \frac{\gamma_0 - \gamma_1}{2}(\theta_0^4 - \theta_b^4)^2, & \varphi < \theta_0^4, \end{cases} \tag{5}$$

где через ∂g обозначен субдифференциал выпуклой функции g.

Анализ задач сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами представляет интерес в силу их прикладной значимости. Теоретический анализ задач с классическими краевыми условиями для различных моделей сложного теплообмена, учитывающих радиационные эффекты, представлен достаточно полно. Отметим работы [2]–[17], посвященные теоретическому и численному анализу различных задач, учитывающих радиационный теплообмен. В работах [18]–[25] проведен анализ задач оптимального управления для моделей сложного теплообмена.

В то же время вопросы, связанные с корректностью субдифференциальных задач для уравнений (1), являются открытыми. Анализ таких задач приводит к вариационным неравенствам для соответствующих этой модели нелинейных операторов. Основной результат статьи состоит в доказательстве существования и единственности слабого решения задачи (1)–(3) без каких-либо условий малости исходных данных.

1. Формализация задачи

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область. Через L^p, $1 \le p \le \infty$, обозначаем пространства Лебега, а через H^s — пространства Соболева W_2^s. Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_V$ нормы в H и V соответственно, а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что выполняются условия

(i) $\beta, \gamma_0, \gamma_1 \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma_1 \geq \gamma_0 \geq c_0 > 0$, $\beta_0, c_0 = \mathrm{Const}$;

(ii) $\theta_0, \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$, $0 \leq \theta_0 \leq \theta_b$.

Введем функции $h_p(s) = |s|^p \mathrm{sign} s$, $p > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Отметим, что $h_p(h_q(s)) = h_{pq}(s)$. Определим операторы и функционалы $A_{1,2}\colon V \to V'$, $f \in V'$, $G\colon V \to \mathbb{R}$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v),$$
$$(f, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma, \quad G(\varphi) = \int_\Gamma g(\varphi(x)) d\Gamma.$$

Отметим, что V вложено в $L^6(\Omega)$, выражение $(h_4(u), v)$ имеет смысл для любых функций $u, v \in V$ и поэтому $h_4(u) \in V'$.

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in V \times V$ называется слабым решением задачи (1)–(3), если

$$A_1\theta + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) = f, \tag{6}$$
$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta)) + \partial G(\varphi) \ni 0. \tag{7}$$

Слабая формулировка краевой задачи выводится стандартным образом путем умножения уравнений (1) на тестовые функции $\eta \in V$, $(\psi - \varphi) \in V$, интегрирования по частям в Ω, применения краевого условия (2) и условия (3) в форме (5).

2. Априорные оценки

Получим оценки решений задачи (1)–(3) в L^∞ и в пространстве V. Из определения слабого решения следует

$$(A_1\theta, \eta) + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi, \eta) - (f, \eta) = 0 \quad \forall \eta \in V, \tag{8}$$

$$(A_2\varphi, \psi - \varphi) + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta), \psi - \varphi) + G(\psi) - G(\varphi) \geq 0 \quad \forall \psi \in V. \tag{9}$$

Для произвольной функции $w \in V$ в неравенстве (9) положим $\psi = \varphi + \varepsilon(w - \varphi)$, $\varepsilon > 0$, разделим на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. Тогда

$$(A_2\varphi, w - \varphi) + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta), w - \varphi) + \int_\Gamma \chi(w - \varphi) d\Gamma \geq 0,$$

где $\chi \in \partial g(\varphi)$. Заметим, что $\partial g(\varphi) = \gamma(\varphi - \theta_b^4)$, где $\gamma = \gamma(\varphi)$ определяется формулой (4). Выбрав $w = \varphi \pm \psi,\ \psi \in V$, получим

$$(A_2\varphi, \psi) + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta), \psi) + \int_\Gamma \chi\psi d\Gamma = 0 \quad \forall \psi \in V. \tag{10}$$

Пусть $0 \le \theta_b \le M$ п.в. на Γ. Положим $\eta = \max(\theta - M, 0) \in V$ в (8), $\psi = b\psi_0$, где $\psi_0 = \max(h_{1/4}(\varphi) - M, 0) \in V$, в (10) и сложим эти равенства.

$$(a\nabla\eta, \nabla\eta) + \int_\Gamma \beta(\theta - \theta_b)\eta d\Gamma + \alpha b \int_{\Omega, \varphi > M^4} \varphi^{-3/4} |\nabla\varphi|^2 dx +$$

$$+ b \int_\Gamma \gamma(\varphi - \theta_b^4)\psi_0 d\Gamma + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi, \eta - \psi_0) = 0. \tag{11}$$

Очевидно, что первые три слагаемых в (11) неотрицательны. В силу монотонности функций $h_4(s)$, $\max(s-M, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, два последних слагаемых также неотрицательны. Поэтому $\eta = 0$, $\psi_0 = 0$, что означает справедливость неравенств $\theta \le M$, $\varphi \le M^4$ п.в. в Ω. Аналогично доказывается, что $\theta \ge 0, \varphi \ge 0$ п.в. в Ω.

Из оценок решения в $L^\infty(\Omega)$ сразу следуют оценки θ и φ в V. Для их получения достаточно положить $\eta = \theta$ в (8) и $\psi = 0$ в (9).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i)–(ii), $M = \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$. Тогда слабое решение задачи (1)–(3) удовлетворяет условиям*

$$0 \le \theta \le M, \quad 0 \le \varphi < M^4, \quad \|\theta\|_V \le C, \quad \|\varphi\|_V \le C. \tag{12}$$

Здесь $C > 0$ зависит только от исходных данных.

3. Существование и единственность решения

Сведем задачу (1)–(3) к вариационному неравенству в гильбертовом пространстве $Y = V \times V$. Норма в Y вводится обычным образом; если $y = \{\theta, \varphi\}$, то $\|y\|_Y^2 = \|\theta\|_V^2 + \|\varphi\|_V^2$. Определим нелинейный оператор $A : Y \mapsto Y'$ и выпуклый функционал $\Phi : Y \mapsto \mathbb{R}$, используя равенства

$$Ay = \{A_1\theta + b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) - f, A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - h_4(\theta))\}, \ \Phi(y) = G(\varphi) \quad \forall y = \{\theta, \varphi\}.$$

Через $\langle q, y\rangle = (q_1, \theta) + (q_2, \varphi)$ будем обозначать значение функционала $q = \{q_1, q_2\} \in Y'$ на элементе $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$.

Очевидно, что пара $y = \{\theta, \varphi\} \in Y$ будет слабым решением задачи (1)–(3), если и только если y – решение вариационного неравенства

$$\langle Ay, z - y\rangle + \Phi(z) - \Phi(y) \ge 0 \quad \forall z \in Y \text{ или } Ay + \partial\Phi(y) \ni 0. \tag{13}$$

Лемма 2. *Оператор A является псевдомонотонным, то есть*

- *A – ограниченный оператор;*
- *из условия $y_j \to y$ слабо в Y и $\limsup\langle Ay_j, y_j - y\rangle \le 0$ вытекает, что $\liminf\langle Ay_j, y_j - z\rangle \ge \langle Ay, y - z\rangle \quad \forall z \in Y$.*

Доказательство. Ограниченность оператора A является следствием непрерывности вложения $V \subset L^s(\Omega)$, $1 \le s \le 6$ и оценок

$$|(\nabla\theta, \nabla\zeta)| \le \|\theta\|_V \|\zeta\|_V, \quad |(h_(\theta), \zeta)| \le \|\theta\|^4_{L^6(\Omega)} \|\zeta\|_{L^3(\Omega)} \quad \forall \theta, \zeta \in V.$$

Далее, пусть $y_j = \{\theta_j, \varphi_j\} \to y = \{\theta, \varphi\}$ слабо в Y и при этом $\limsup \langle Ay_j, y_j - y\rangle \le 0$. Рассмотрим r_j, $r \in Y'$,

$$r_j = \{b\kappa_a(h_4(\theta_j) - \varphi_j) - f, \kappa_a(\varphi_j - h_4(\theta_j))\}, \;\; r = \{b\kappa_a(h_4(\theta) - \varphi) - f, \kappa_a(\varphi - h_4(\theta))\}.$$

Заметим, что $\langle r_j, y_j - z\rangle \to \langle r, y - z\rangle$ для всех $z = \{\zeta, \psi\} \in Y$, поскольку вложение $V \subset L^s(\Omega)$, $1 \le s < 6$, компактно. В частности, $\langle r_j, y_j - y\rangle \to 0$. Поэтому

$$\limsup \left[(A_1\theta_j, \theta_j - \theta) + (A_2\varphi_j, \varphi_j - \varphi)\right] \le 0. \tag{14}$$

Поскольку операторы A_1, A_2 монотонные, то

$$(A_1\theta_j, \theta_j - \theta) + (A_2\varphi_j, \varphi_j - \varphi) \ge (A_1\theta, \theta_j - \theta) + (A_2\varphi, \varphi_j - \varphi) \to 0.$$

Следовательно, учитывая (14), заключаем, что $(A_1\theta_j, \theta_j - \theta) + (A_2\varphi_j, \varphi_j - \varphi) \to 0$. Таким образом, справедливы равенства

$$\lim \langle Ay_j, y_j - z\rangle = \lim \left[(A_1\theta_j, \theta_j - \zeta) + (A_2\varphi_j, \varphi_j - \psi) + \langle r_j, y_j - z\rangle\right] =$$

$$= \lim \left[(A_1\theta_j, \theta - \zeta) + (A_2\varphi_j, \varphi - \psi)\right] + \langle r, y - z\rangle = \langle Ay, y - z\rangle,$$

то есть A – псевдомонотонный оператор. □

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(ii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(3).*

Доказательство. Воспользуемся теорией разрешимости вариационных неравенств с псевдомонотонными операторами [26], применяя подход, предложенный в [27]. Пусть $B_\lambda = \{z \in Y : \|z\|_Y \le \lambda\}$, $\lambda > 0$. Поскольку шар B_λ является выпуклым, замкнутым и ограниченным, существует такой эдемент $y_\lambda = \{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\} \in B_\lambda$, что

$$\langle Ay_\lambda, z - y_\lambda\rangle + \Phi(z) - \Phi(y_\lambda) \ge 0 \quad \forall z \in B_\lambda. \tag{15}$$

Покажем, что решение (15) удовлетворяет оценке

$$\|y_\lambda\|_Y \le C, \tag{16}$$

где C не зависит от $\lambda > 0$. В этом случае, если выбрать $\lambda > C$, то y_λ будет решением неравенства (13), а значит пара $\{\theta_\lambda, \varphi_\lambda\}$ – слабое решение задачи (1)–(3).

Пусть $M > \|\theta_b\|_{L^\infty(\Omega)}$, $\eta_\lambda = \max(\theta_\lambda - M, 0)$. Полагая $z = \{\theta_\lambda - \eta_\lambda, \varphi_\lambda\} \in B_\lambda$ в неравенстве (15), получим

$$(a\nabla\eta_\lambda, \nabla\eta_\lambda) + b\kappa_a(h_4(\theta_\lambda) - \varphi_\lambda, \eta_\lambda) \le 0. \tag{17}$$

Положим в (15) $z = \{\theta_\lambda, \varphi_\lambda + \varepsilon(\zeta - \varphi_\lambda)\}$, где $0 < \varepsilon < 1$, $\|\zeta\|_V^2 \le \lambda^2 - \|\theta_\lambda\|_V^2$, разделим на ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. В результате выводим

$$(A_2\varphi_\lambda, \varphi_\lambda - \zeta) + \kappa_a(\varphi_\lambda - h_4(\theta_\lambda), \varphi_\lambda - \zeta) + \int\limits_\Gamma \chi_\lambda(\varphi_\lambda - \zeta)d\Gamma \le 0,$$

где $\chi_\lambda \in \partial g(\varphi_\lambda) = \gamma(\varphi - \theta_b^4)$, а $\gamma = \gamma(\varphi_\lambda)$ определяется формулой (4). Подставим в последнее неравенство $\zeta = \varphi_\lambda - \psi_0$, где $\psi_0 = \max(h_{1/4}(\varphi_\lambda) - M, 0)$, что допустимо, поскольку $\|\zeta\|_V^2 \le \lambda^2 - \|\theta_\lambda\|_V^2$ при $M > 1$. Тогда

$$\alpha \int\limits_{\Omega, \varphi_\lambda > M^4} \varphi_\lambda^{-3/4} |\nabla\varphi_\lambda|^2 dx + \int\limits_\Gamma \gamma(\varphi_\lambda - \theta_b^4)\psi_0 d\Gamma + \kappa_a(\varphi_\lambda - h_4(\theta_\lambda), \psi_0) \le 0.$$

Умножив это неравенство на b и сложив с (15), получим оценку, из которой так же как при доказательстве леммы 1, следуют неравенства $\theta_\lambda \le M$, $\varphi_\lambda \le M^4$ п.в. в Ω. Аналогичным образом проверяется, что $\theta_\lambda \ge 0, \varphi_\lambda \ge 0$ п.в. в Ω. Из полученных равномерных по λ оценок в $L^\infty(\Omega)$ следуют равномерные по λ оценки θ_λ и φ_λ в пространстве V. Для этого достаточно положить в (15) сначала $z = \{0, \varphi_\lambda\}$, затем $z = \{\theta_\lambda, 0\}$. Поэтому справедливо неравенство (16), что гарантирует разрешимость задачи (1)–(3).

Докажем единственность слабого решения. Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}$, $\{\theta_2, \varphi_2\} \in Y$ – слабые решения задачи (1)–(3), $\theta = \theta_1 - \theta_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $w = h_4(\theta_1) - h_4(\theta_2)$, $\chi_{1,2} \in \partial g(\varphi_{1,2})$. Тогда из (8), (10) получаем $\forall \eta, \psi \in V$ равенства

$$(A_1\theta, \eta) + b\kappa_a(w - \varphi, \eta) = 0, \quad (A_2\varphi, \psi) + \kappa_a(\varphi - w), \psi) + \int\limits_\Gamma (\chi_1 - \chi_2)\psi d\Gamma = 0. \quad (18)$$

Определим регуляризацию функции sign: $r_\delta(s) = s/|s|$, если $|s| \ge \delta$; $r_\delta(s) = s/\delta$, если $|s| < \delta$. Положим в (18) $\eta = r_\delta(\theta)$, $\psi = br_\delta(\varphi)$ и сложим два равенства.

$$a(\nabla\theta, r'_\delta(\theta)\nabla\theta) + \int\limits_\Gamma \beta\theta r_\delta(\theta)d\Gamma + \alpha b(\nabla\varphi, r'_\delta(\varphi)\nabla\varphi)$$

$$+ b\int\limits_\Gamma (\chi_1 - \chi_2)r_\delta(\varphi)d\Gamma + b\kappa_a(w - \varphi, r_\delta(\theta) - r_\delta(\varphi)) = 0. \quad (19)$$

Заметим, что $r'_\delta(s) \ge 0$, $s \in \mathbb{R}$ и, кроме того, значения функций θ и w одного знака. Поэтому из (19) следует неравенство

$$\int\limits_\Gamma \beta\theta r_\delta(\theta)d\Gamma + b\int\limits_\Gamma (\chi_1 - \chi_2)r_\delta(\varphi)d\Gamma + b\kappa_a \int\limits_{w,\varphi\ne 0} (w - \varphi)(r_\delta(\theta) - r_\delta(\varphi))dx \le 0.$$

В пределе при $\delta \to +0$ получаем

$$\int\limits_\Gamma \beta|\theta|d\Gamma + b\int\limits_\Gamma (\chi_1 - \chi_2)\mathrm{sign}\varphi d\Gamma + b\kappa_a \int\limits_{w,\varphi\ne 0} (w - \varphi)(\mathrm{sign}\theta - \mathrm{sign}\varphi)dx \le 0.$$

Нетрудно проверить, что $(\chi_1 - \chi_2)\mathrm{sign}\varphi \geq \gamma_0|\varphi|$, и поэтому $\theta|_\Gamma = \varphi|_\Gamma = 0$. Полагая в (18) $\eta = a\theta + \alpha b\varphi$, $\psi = b\eta$ и складывая равенства, получим $\|\nabla(a\theta + \alpha b\varphi)\|^2 = 0$ и $a\theta + \alpha b\varphi = 0$. Тогда из первого уравнения в (18) следует

$$a(\nabla\theta, \nabla v) + b\kappa_a(w + \frac{a}{\alpha b}\theta, v) = 0 \quad \forall v \in V. \tag{20}$$

Полагая $v = \theta$ в (20), получаем $\theta = 0$, а значит, $\varphi = -\frac{a}{\alpha b}\theta = 0$.

□

Список литературы

[1] Modest M.F., *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.

[2] A. E. Ковтанюк, A. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:4 (2014), 191–199.

[3] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, “An iterative method for solving a complex heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **219** (2013), 9356–9362.

[4] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Solvability of P1 approximation of a conductive-radiative heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **249** (2014), 247–252.

[5] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[6] A. E. Ковтанюк, A. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:12 (2014), 1590–1597.

[7] Г. В. Гренкин, A. Ю. Чеботарев, “Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**:1 (2014), 18–32.

[8] Г. В. Гренкин, A. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:11 (2014), 1806–1816.

[9] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **20**:2 (2015), 776–784.

[10] Г. В. Гренкин, A. Ю. Чеботарев, “Неоднородная нестационарная задача сложного теплообмена”, *Сибирские электронные математические известия*, **12**:11 (2015), 562–576.

[11] Г. В. Гренкин, A. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача свободной конвекции с радиационным теплообменом”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:2 (2016), 275–282.

[12] A. A. Амосов, “Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:1 (2005), 93–104.

[13] P.-E. Druet, “Existence of weak solutions to the time-dependent MHD-equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **10**:5 (2009), 2914–2936.

[14] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, “Identification of temperature dependent parameters in laser–interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9 (2012), 1–29.

[15] A. A. Амосов, “О разрешимости одной задачи теплообмена излучением”, *Докл. АН СССР*, **245**:6 (1979), 1341–1344.

[16] A. A. Amosov, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164**:3 (2010), 309–344.

[17] A. A. Amosov, "Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency", *Journal of Mathematical Sciences*, **165**:1 (2010), 1–41.

[18] R. Pinnau, "Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the SP_1-System", *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[19] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412** (2014), 520–528.

[20] Г. В. Гренкин, "Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена", *Дальневосточный математический журнал*, **14**:2 (2014), 160–172.

[21] G. V. Grenkin, A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Boundary optimal control problem of complex heat transfer model", *J. Math. Anal. Appl.*, **433** (2016), 1243–1260.

[22] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Optimal boundary control of a steady-state heat transfer model accounting for radiative effects", *J. Math. Anal. Appl.*, **439** (2016), 678–689.

[23] A. Yu. Chebotarev, A. E. Kovtanyuk, G. V. Grenkin, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model", *Applied Mathematics and Computation*, **289** (2016), 371–380.

[24] Г. В. Гренкин, "Алгоритм решения задачи граничного оптимального управления в модели сложного теплообмена", *Дальневосточный математический журнал*, **16**:1 (2016), 24–38.

[25] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Управление сложным теплообменом при создании экстремальных полей", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **56**:10 (2016), 1725–1732.

[26] Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972.

[27] А. Ю. Чеботарев, "Вариационные неравенства для оператора типа Навье-Стокса и односторонние задачи для уравнений вязкой теплопроводной жидкости", *Математические заметки*, **70**:2 (2001), 296–307.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 9 ноября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-01-00037)

Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E. Unique solvability of the subdifferential boundary value problem for the complex heat transfer equations. Far Eastern Mathematical Journal. 2016. V. 16. № 2. P. 229–236.

ABSTRACT

A model of the process of radiation-conductive heat transfer with the multi-valued dependence of emissivity on the radiation intensity is considered. The unique solvability of the subdifferential boundary value problem for the complex heat transfer equations in a three-dimensional domain is proved.

Key words: *radiation heat transfer, subdifferential boundary conditions, non-local unique solvability.*