

УДК 517.958:531.12, 538.913-405

MSC2010 70J99, 74H45

© А. И. Гудименко¹

Цепи гармонических осцилляторов с точно решаемой динамикой

Разработана техника N -кратного преобразования Дарбу для одномерных цепей гармонических осцилляторов. Даны примеры применения этой техники для построения цепей, обладающих точно решаемой динамикой.

Ключевые слова: *преобразование Дарбу, точные решения, гармонические цепи.*

Введение

Одномерная цепь гармонических осцилляторов является полезной моделью для многих динамических явлений — таких, как колебания кристаллической решетки [1], перенос тепла в твердых телах [2], броуновское движение и диффузия [3–5]. Она также является практичной моделью для тестирования теоретических концепций, таких как эргодичность, термодинамический предел и необратимость [6–9]. Особое внимание к этой модели связано с открытым сначала теоретически и подтвержденным недавно экспериментально аномальным поведением теплового потока в низко-размерных системах [2, 10–14].

Указанные динамические явления существенно зависят от свойства неоднородности цепи. Между тем используются лишь несколько точно решаемых моделей гармонических цепей. Это моно- и диатомная цепи и их модификации, связанные с включением небольшого числа примесных атомов. Точные решения для этих модификаций, полученные, например, методом функций Грина, в общем случае трудно поддаются анализу [1]. Отметим, что для анализа динамики гармонических цепей с локальными неоднородностями применяется также метод рекуррентных соотношений [5, 7].

Метод преобразования Дарбу предлагает иной подход к изучению динамики неоднородных гармонических цепей. А именно, он позволяет алгоритмически генерировать неоднородные цепи вместе с решением уравнений, описывающих их динамику.

Уравнение гармонической цепи представляет собой разностное уравнение второго порядка. Преобразование Дарбу для таких уравнений изучалось в контексте

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, Радио, 7. Электронная почта: gudimenko@iam.dvo.ru

дискретного уравнения Шредингера и применялось для нахождения решений нелинейных решеточных уравнений (см. [15] и ссылки в этой работе), а также для исследования связи спектральных задач для дискретного оператора Шредингера с теорией ортогональных многочленов (см., например, [16, 17]).

В настоящей работе преобразование Дарбу применяется к уравнению одномерной гармонической цепи. Конкретнее, мы разрабатываем технику N -кратного преобразования Дарбу для таких цепей. В частности, получаем компактные выражения в терминах дискретных вронскианов (казоратианов) для коэффициентов преобразованного уравнения, а также для оператора преобразования, с помощью которого вычисляется решение преобразованного уравнения. В качестве приложения развитой техники мы приводим ряд примеров точно решаемых цепей. Эти примеры служат иллюстрацией возможностей преобразования Дарбу в получении неоднородных гармонических цепей с точно решаемой динамикой.

Несколько слов об используемой в работе модели гармонической цепи. Это цепь со взаимодействием ближайших соседей. Примем обозначения и нумерацию частиц и пружин цепи такими, как показано на рис. 1.

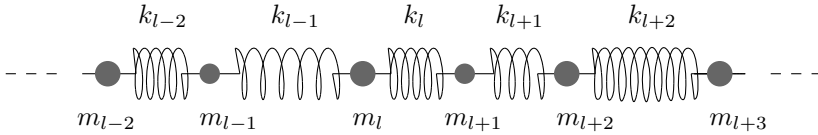


Рис. 1. Участок цепи. m_l — масса l -й частицы, k_l — жесткость l -й пружины.

Обозначим x_l отклонение l -й частицы от положения равновесия. Тогда динамика частиц описывается системой уравнений

$$\ddot{x}_l + \mathcal{H}x_l = 0, \quad (1)$$

$$\mathcal{H}x_l : = -\frac{k_{l-1}}{m_l}x_{l-1} + \frac{k_{l-1} + k_l}{m_l}x_l - \frac{k_l}{m_l}x_{l+1} \quad (2)$$

с начальными и краевыми условиями, специфицированными конкретной задачей.

1. Преобразование Дарбу для оператора гармонической цепи

Под *оператором гармонической цепи* мы понимаем произвольный разностный оператор второго порядка

$$\mathcal{H}\psi_l : = a_{l-1}\psi_{l-1} + b_l\psi_l + c_{l+1}\psi_{l+1}, \quad (3)$$

коэффициенты которого вещественны и удовлетворяют условию

$$a_{l-1} + b_l + c_{l+1} = \mu, \quad (4)$$

где μ — константа. Оператор (2) является оператором гармонической цепи, для него $\mu=0$.

Удобно представлять последовательность ψ_l как элемент $|\psi\rangle$ векторного пространства всех числовых последовательностей. Обозначим $|l\rangle$ l -й вектор естественного базиса этого пространства (то есть вектор, l -я компонента которого равна единице, а остальные — нулю). Тогда оператор (3) и условие (4) могут быть записаны в виде

$$\mathcal{H}|l\rangle = a_l|l+1\rangle + b_l|l\rangle + c_l|l-1\rangle, \quad (5)$$

$$\mathcal{H}|\mathbb{1}\rangle = \mu|\mathbb{1}\rangle, \quad (6)$$

где мы ввели вектор

$$|\mathbb{1}\rangle := \sum_l |l\rangle. \quad (7)$$

1.1. Однократное преобразование Дарбу

Однократное преобразование Дарбу для оператора \mathcal{H} мы определяем как пару операторов

$$\mathcal{H}'|l\rangle := a'_l|l+1\rangle + b'_l|l\rangle + c'_l|l-1\rangle, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}|l\rangle := A_l|l\rangle + B_l|l-1\rangle, \quad (9)$$

связанных соотношением сплетения

$$\mathcal{H}'\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{H}. \quad (10)$$

Оператор \mathcal{H} считаем исходным для преобразования Дарбу, оператор \mathcal{H}' — результирующим. Оператор \mathcal{L} мы называем *оператором однократного преобразования Дарбу для \mathcal{H}* .

Отметим, что именно соотношение сплетения (10) лежит в основе генерации точно решаемых уравнений вида (1). Действительно, из этого соотношения следует, что если $|x\rangle$ — решение этого уравнения и оператор \mathcal{L} не зависит от t , то $\mathcal{L}|x\rangle$ — решение уравнения, полученного из (1) заменой \mathcal{H} на \mathcal{H}' . В контексте задачи на собственные значения для оператора гармонической цепи это соотношение означает следующее. Если $|\psi\rangle$ — собственный вектор оператора \mathcal{H} , отвечающий собственному значению λ , то $\mathcal{L}|\psi\rangle$ — собственный вектор оператора \mathcal{H}' , отвечающий тому же собственному значению.

Найдем формулы, выражающие коэффициенты операторов \mathcal{H}' и \mathcal{L} через коэффициенты оператора \mathcal{H} и его собственные функции. Подставим (5), (8) и (9) в (10) и выделим уравнения, образованные коэффициентами при одинаковых базисных векторах. Получим после небольших преобразований

$$\begin{aligned} a'_l &= a_l \frac{A_{l+1}}{A_l}, & c'_l &= c_{l+1} \frac{B_l}{B_{l+1}}, \\ b'_l &= b_l + \frac{B_{l+1}}{A_l} a_l - \frac{B_l}{A_{l-1}} a_{l-1} = b_{l+1} - \frac{A_{l+1}}{B_{l+2}} c_{l+2} + \frac{A_l}{B_{l+1}} c_{l+1}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение имеет первый интеграл

$$-\frac{B_l}{A_{l-1}} a_{l-1} + b_l - \frac{A_l}{B_{l+1}} c_{l+1} = \lambda,$$

который после подстановки

$$\frac{B_l}{A_{l-1}} = -\frac{\phi_{l-1}}{\phi_l}$$

принимает вид уравнения

$$\mathcal{H}|\phi\rangle = \lambda|\phi\rangle,$$

то есть $|\phi\rangle$ — собственный вектор оператора \mathcal{H} , отвечающий собственному значению λ . Такой вектор будем называть *вектором преобразования*. В результате

$$a'_l = a_l \frac{A_{l+1}}{A_l}, \quad c'_l = c_{l+1} \frac{A_{l-1}}{A_l} \frac{\phi_{l-1}\phi_{l+1}}{\phi_l^2}, \quad (11)$$

$$\mathcal{L}|l\rangle = A_l|l\rangle - A_{l-1} \frac{\phi_{l-1}}{\phi_l} |l-1\rangle. \quad (12)$$

Заметим, что мы не привели выражение для коэффициента b'_l , так как оно нам не понадобится.

Соотношение (12) можно записать в более компактном виде

$$\psi'_l = A_l \frac{W_l[\psi, \phi]}{\phi_{l+1}}, \quad (13)$$

где $|\psi'\rangle := l|\psi\rangle$ и $W_l[\psi, \phi] := \psi_l\phi_{l+1} - \psi_{l+1}\phi_l$. Вектор с компонентами $W_l[\psi, \phi]$ представляет собой дискретный вронскиана (казоратиан) векторов $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$.

Для определения коэффициента A_l используем условие (6) в применении к оператору \mathcal{H}' . Реализуем это условие в виде

$$|\mathbb{1}\rangle = \mathcal{L}|\theta\rangle, \quad (14)$$

где $|\theta\rangle$ — собственный вектор оператора \mathcal{H} , отвечающий собственному значению μ . Тогда

$$\mathcal{H}'|\mathbb{1}\rangle = \mathcal{H}'\mathcal{L}|\theta\rangle = \mathcal{L}\mathcal{H}|\theta\rangle = \mu\mathcal{L}|\theta\rangle = \mu|\mathbb{1}\rangle,$$

то есть условие (6) действительно выполняется.

В силу равенств (7) и (12) условие (14) эквивалентно равенству

$$A_l^{-1} = \theta_l - \frac{\phi_l}{\phi_{l+1}}\theta_{l+1},$$

с учетом которого (11) и (13) принимают вид

$$a'_l = a_l \frac{\phi_{l+2}}{\phi_{l+1}} \frac{W_l[\theta, \phi]}{W_{l+1}[\theta, \phi]}, \quad c'_l = c_{l+1} \frac{\phi_{l-1}}{\phi_l} \frac{W_l[\theta, \phi]}{W_{l-1}[\theta, \phi]}, \quad \psi'_l = \frac{W_l[\psi, \phi]}{W_l[\theta, \phi]}. \quad (15)$$

Формулы (15) — искомые и дают координатное выражение однократного преобразования Дарбу для оператора гармонической цепи в терминах исходного оператора и его собственных функций. Перейдем к рассмотрению N -кратного преобразования Дарбу.

1.2. N -кратное преобразование Дарбу

Последовательное применение N раз однократного преобразования Дарбу для оператора гармонической цепи называется N -кратным преобразованием Дарбу для этого оператора.

Будем обозначать

$$\mathcal{H}^{(N)}|l\rangle = a_l^{(N)}|l+1\rangle + b_l^{(N)}|l\rangle + c_l^{(N)}|l-1\rangle$$

оператор гармонической цепи, полученный в результате применения N -кратного преобразования Дарбу к оператору \mathcal{H} , и $\mathcal{L}^{(N)}$ — соответствующую этому преобразованию композицию операторов однократного преобразования Дарбу. Заметим, что справедливо соотношение сплетения

$$\mathcal{H}^{(N)}\mathcal{L}^{(N)} = \mathcal{L}^{(N)}\mathcal{H},$$

которое сразу следует из (6) и определения операторов $\mathcal{H}^{(N)}$ и $\mathcal{L}^{(N)}$. Удобно считать, что N наряду с натуральными значениями принимает и нулевое значение. В этом случае мы полагаем $\mathcal{H}^{(0)} := \mathcal{H}$ и $\mathcal{L}^{(0)} := \text{id}$, где id — тождественный оператор.

Будем считать, что n -й шаг N -кратного преобразования Дарбу выполняется с векторами преобразования

$$|\theta^{(n-1)}\rangle := \mathcal{L}^{(n-1)}|\theta\rangle, \quad |\phi_n^{(n-1)}\rangle := \mathcal{L}^{(n-1)}|\phi_n\rangle, \quad n = 1, \dots, N,$$

где

$$|\theta\rangle, |\phi_1\rangle, \dots, |\phi_N\rangle \tag{16}$$

— произвольный набор собственных векторов оператора \mathcal{H} , отвечающих различным собственным значениям. Векторы (16) будем называть *векторами N -кратного преобразования*. Введем обозначение

$$W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_n] := \begin{vmatrix} \phi_{1,l+1} & \phi_{2,l+1} & \dots & \phi_{n,l+1} \\ \phi_{1,l+2} & \phi_{2,l+2} & \dots & \phi_{n,l+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{1,l+n} & \phi_{2,l+n} & \dots & \phi_{n,l+n} \end{vmatrix}$$

для дискретного вронскиана набора векторов $|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$.

Следующее утверждение дает описание в терминах дискретных вронскианов N -кратного преобразования Дарбу для оператора гармонической цепи и является основным результатом нашей работы.

Теорема 1. *Справедливы выражения*

$$a_l^{(N)} = a_l \frac{W_{l+2}[\phi_1, \dots, \phi_N]}{W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_N]} \frac{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_{l+1}[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}, \tag{17}$$

$$c_l^{(N)} = c_{l+N} \frac{W_{l-1}[\phi_1, \dots, \phi_N]}{W_l[\phi_1, \dots, \phi_N]} \frac{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_{l-1}[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}, \tag{18}$$

$$\psi_l^{(N)} = \frac{W_l[\psi, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}. \tag{19}$$

Эта теорема доказывается с помощью индукции по N с использованием следующей простой леммы.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$W_l[\phi_1, \dots, \phi_n, \phi, \psi] = \frac{W_l[W[\phi_1, \dots, \phi_n, \phi], W[\phi_1, \dots, \phi_n, \psi]]}{W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_n]}. \quad (20)$$

Доказательство леммы, в свою очередь, также проводится методом индукции с использованием подходящего разложения определителей.

Для примера докажем соотношение (19). Предположим, что оно верно для $N - 1$,

$$\psi_l^{(N-1)} = \frac{W_l[\psi, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]},$$

и применим к $\psi^{(N-1)}$ однократное преобразование Дарбу с векторами преобразования $\theta^{(N-1)}$ и $\phi_N^{(N-1)}$. Получим

$$\begin{aligned} \psi_l^{(N)} &= \frac{W_l[\psi^{(N-1)}, \phi_N^{(N-1)}]}{W_l[\theta^{(N-1)}, \phi_N^{(N-1)}]} = W_l \left[\frac{W[\psi, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}, \frac{W[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]} \right] \times \\ &\quad \times W_{l-1} \left[\frac{W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}, \frac{W[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]} \right] = \\ &= \frac{W_l[W[\psi, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}], W[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]]}{W_l[W[\theta, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}], W[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]]} = \frac{W_l[\psi, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}. \end{aligned}$$

Последнее равенство получено с использованием тождества (20).

Следствие 1.1. *В терминах масс грузов и жесткостей пружин формулы (17) и (18) записываются следующим образом:*

$$m_l^{(N)} = m_{N,l} \frac{W_l^2[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_l[\phi_1, \dots, \phi_N] W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_N]}, \quad (21)$$

$$k_l^{(N)} = k_{N,l} \frac{W_l[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N] W_{l+1}[\theta, \phi_1, \dots, \phi_N]}{W_{l+1}^2[\phi_1, \dots, \phi_N]}. \quad (22)$$

где

$$m_{N,l} := m_l \prod_{n=0}^{N-1} \frac{k_{l+n}}{m_{l+n}}, \quad k_{N,l} := k_l \prod_{n=1}^N \frac{k_{l+n}}{m_{l+n}}. \quad (23)$$

Выражения (21) и (22) получены из (17) и (18) интегрированием соотношений

$$a_{l-1}^{(N)} = -\frac{k_{l-1}^{(N)}}{m_l^{(N)}}, \quad c_{l+1}^{(N)} = -\frac{k_l^{(N)}}{m_l^{(N)}}.$$

Отметим, что в выражениях (21) и (22) мы опустили одинаковый не зависящий от l множитель — константу интегрирования. На самом деле легко понять, что этот множитель может быть своим для каждого из этих выражений. Для уравнений, определяющих колебания частиц цепи, это приводит к умножению временной переменной или собственного значения на константу.

2. Примеры точно решаемых гармонических цепей

Рассмотрим примеры применения формул (19), (21) и (22) для нахождения точно решаемых гармонических цепей. В качестве исходного оператора \mathcal{H} возьмем оператор моноатомной гармонической цепи с $m_l = k_l = 1$. Из формул (23) тогда следует, что $m_{N,l} = k_{N,l} = 1$. В качестве векторов преобразования будем использовать следующие базисные собственные векторы оператора \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch} \omega l, \operatorname{sh} \omega l \quad (-\infty < \lambda < 0), \\ & 1, l \quad (\lambda = 0), \\ & \cos \omega l, \sin \omega l \quad (0 < \lambda < 4), \\ & (-1)^l, (-1)^l l \quad (\lambda = 4), \\ & (-1)^l \operatorname{ch} \omega l, (-1)^l \operatorname{sh} \omega l \quad (4 < \lambda < \infty). \end{aligned}$$

Отметим, что в качестве вектора преобразования $|\theta\rangle$ в формулах (19), (21) и (22) может выступать любой собственный вектор, а не обязательно отвечающий собственному значению $\mu = 0$. Для уравнения (1) это приводит к замене $|x\rangle$ на $e^{\mu t}|x\rangle$ и \mathcal{H} на $\mathcal{H} - \mu$.

Пример 1. Применим к \mathcal{H} однократное преобразование Дарбу с векторами преобразования $\theta_l = (-1)^l$ и $\phi_{1,l} = \operatorname{ch} \omega l$. Получим из (21), (22)

$$m_l^{(1)} = \frac{\operatorname{ch}^2 \omega(l + \frac{1}{2})}{\operatorname{ch} \omega l \operatorname{ch} \omega(l + 1)}, \quad k_l^{(1)} = \frac{\operatorname{ch} \omega(l + \frac{1}{2}) \operatorname{ch} \omega(l + \frac{3}{2})}{\operatorname{ch}^2 \omega(l + 1)}.$$

Графики этих функций представлены на рис. 2.

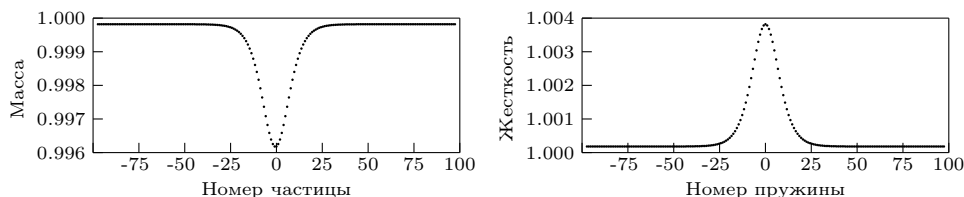


Рис. 2. Распределение масс частиц и жесткостей пружин вдоль цепи, полученной однократным преобразованием Дарбу моноатомной цепи при векторах преобразования $\theta_l = (-1)^l$ и $\phi_{1,l} = \operatorname{ch} 0.1l$.

Полученная цепь моделирует локальную примесь в одномерной бесконечной моноатомной решетке.

Пример 2. Предыдущий пример допускает следующее обобщение. Рассмотрим в качестве векторов N -кратного преобразования векторы

$$\theta : = (-1)^l, \quad \phi_{1,l} : = \operatorname{ch} \omega l, \quad \phi_{2,l} : = \operatorname{sh} 2\omega l, \quad \phi_{3,l} : = \operatorname{ch} 3\omega l, \quad \dots \quad (24)$$

Легко проверить, что

$$\begin{aligned}\frac{W_l[\phi_1, \dots, \phi_N]}{W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_N]} &= \prod_{n=0}^{N-1} \operatorname{ch} \omega \left(l + \frac{n}{2} \right) \prod_{n=N+1}^{2N} \operatorname{ch}^{-1} \omega \left(l + \frac{n}{2} \right), \\ \frac{W_l[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W_{l+1}[\phi_1, \dots, \phi_{N-1}]} &= \operatorname{ch} \omega l \prod_{n=1}^{N-1} \left[-4 \operatorname{sh} \frac{n\omega}{2} \operatorname{ch} \omega \left(l + \frac{n}{2} \right) \right], \\ \frac{W_l[\phi_N, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]}{W_l[\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}]} &= (-1)^l \operatorname{ch} \omega l \prod_{n=1}^{N-1} \left[-2 \operatorname{th} \frac{n\omega}{2} \operatorname{ch} \omega (l+n) \right].\end{aligned}$$

Используя эти тождества, из (21) и (22) находим

$$m_l^{(N)} = \Theta_{N,l} \frac{\operatorname{ch} \omega (l + \frac{N}{2})}{\operatorname{ch} \omega l}, \quad k_l^{(N)} = \Theta_{N,l} \frac{\operatorname{ch} \omega (l + N + \frac{1}{2})}{\operatorname{ch} \omega (l + \frac{N}{2} + \frac{1}{2})}, \quad (25)$$

где

$$\Theta_{N,l} := \prod_{n=1}^N \frac{\operatorname{ch} \omega (l + n - \frac{1}{2})}{\operatorname{ch} \omega (l + n)}.$$

Графики функций (25) приведены на рис. 3.

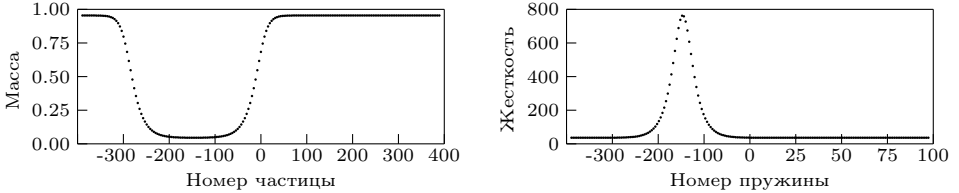


Рис. 3. Распределение масс частиц и жесткостей пружин, полученное 300-кратным преобразованием Дарбу моноатомной цепи при векторах преобразования (24) с $\omega = 0.05$.

Пример 3. Массивное жесткое включение в моноатомную цепь (сингулярность, или разрыв цепи на две полубесконечные цепи с закрепленными концами) моделируется однократным преобразованием Дарбу с векторами преобразования с $\theta_l = 1$ и $\phi_{1,l} = \operatorname{sh} \omega l$:

$$m_l^{(1)} = \frac{\operatorname{ch}^2 \omega (l + \frac{1}{2})}{\operatorname{sh} \omega (l + 1) \operatorname{sh} \omega l}, \quad k_{l-1}^{(1)} = \frac{\operatorname{ch} \omega (l + \frac{1}{2}) \operatorname{ch} \omega (l - \frac{1}{2})}{\operatorname{sh}^2 \omega l}. \quad (26)$$

Графики функций (26) представлены на рис. 4.

Пример 4. Разрыв цепи на две полубесконечные цепи со свободными концами моделируется двукратным преобразованием Дарбу с векторами преобразования с $\theta_l = 1$, $\phi_{1,l} = (-1)^l \operatorname{ch} \omega l$ и $\phi_{2,l} = \operatorname{ch} \omega l$:

$$m_l^{(2)} = \frac{\operatorname{sh}^2 \omega (l + 1)}{\operatorname{ch} \omega (l + 2) \operatorname{ch} \omega l}, \quad k_{l-1}^{(2)} = \operatorname{th} \omega (l + 1) \operatorname{th} \omega l.$$

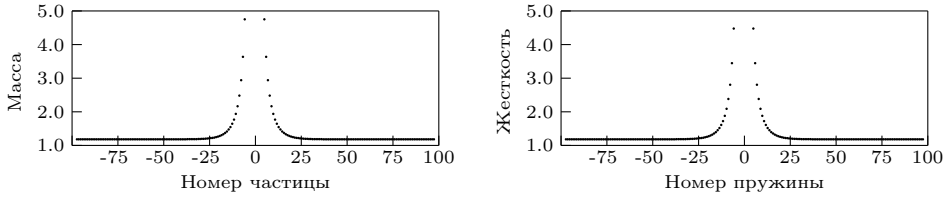


Рис. 4. Распределение масс частиц и жесткостей пружин вдоль цепи, полученной однократным преобразованием Дарбу моноатомной цепи при векторах преобразования $\theta_l = 1$ и $\phi_{1,l} = \text{sh}0.1l$.

Пример 5. Локальная примесь в моноатомной цепи со слабо взаимодействующими частицами моделируется двукратным преобразованием Дарбу при $\theta_l = \text{ch}\omega l$, $\phi_{1,l} = \text{sh}\omega l$ и $\phi_{2,l} = 1$:

$$m_l^{(2)} = \frac{1}{\text{ch}\omega(l + \frac{3}{2}) \text{ch}\omega(l + \frac{1}{2})}, \quad k_{l-1}^{(2)} = \frac{1}{\text{ch}^2\omega(l + \frac{1}{2})}. \quad (27)$$

Графики функций (27) представлены на рис. 5.

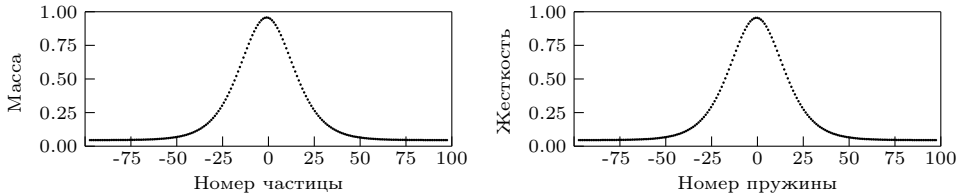


Рис. 5. Распределение масс частиц и жесткостей пружин, полученное двукратным преобразованием Дарбу при векторах преобразования $\theta_l = \text{ch}0.05l$, $\phi_{1,l} = \text{sh}0.05l$ и $\phi_{2,l} = 1$.

Пример 6. При моделировании конечных цепей возникает проблема выбора векторов преобразования, при которых преобразование Дарбу сохраняет заданные граничные условия.

Рассмотрим двукратное преобразование Дарбу для конечной моноатомной цепи длины L с закрепленными концами. Если $|x\rangle$ — решение исходного уравнения, обращающееся в нуль в граничных точках ($x_1 = x_L = 0$), то с учетом формулы (19) решение $|x^{(2)}\rangle$ преобразованного уравнения также обратиться в нуль в этих точках, если в качестве векторов $|\phi_1\rangle$ и $|\phi_2\rangle$ взять векторы преобразования, например обращающиеся в нуль на границе. При этом $|\theta\rangle$ нужно подобрать так, чтобы знаменатель дроби в (19) в нуль не обращался.

Графики масс частиц и жесткостей пружин, соответствующие такому выбору векторов преобразования, представлены на рис. 6.

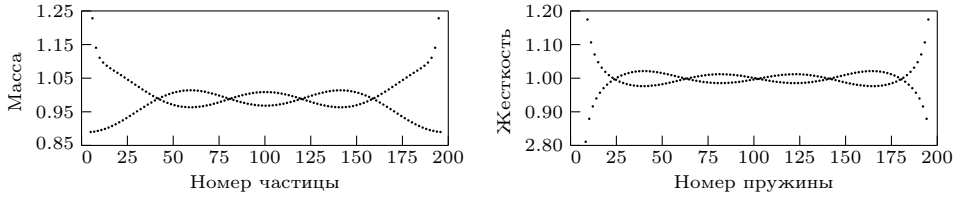


Рис. 6. Распределение масс частиц и жесткостей пружин, полученное двукратным преобразованием Дарбу при векторах преобразования $\theta_l = 1$, $\phi_{1,l} = \sin 97\pi l/200$ и $\phi_{2,l} = \sin 98\pi l/200$.

Заключение

В настоящей работе разработана техника N -кратного преобразования Дарбу в применении к уравнению динамики одномерной цепи гармонических осцилляторов. Приведены примеры точно решаемых гармонических цепей.

Данное исследование проводилось, в частности, с целью получения представления о возможностях преобразования Дарбу для моделирования неоднородных точно решаемых гармонических цепей. Мы надеялись, например, что этим методом можно генерировать (выбирая в качестве исходной моноатомную цепь) в достаточно широком диапазоне локальные неоднородности цепи типа дефектов и включений. Надежды оправдались лишь частично. Генерируемые преобразованием Дарбу неоднородности устроены так, что рост массы частиц неоднородности компенсируется падением жесткости составляющих ее пружин (см. примеры 1 и 2). На данный момент такое поведение преобразованной цепи представляется нам вполне естественным.

Точно решаемые гармонические цепи, полученные методом преобразования Дарбу, могут использоваться, например, в задачах, упомянутых во Введении, в частности, — в задачах о термомеханических свойствах одномерных гармонических систем. Такие цепи могут оказаться полезными для тестирования и получения теоретических и численных результатов.

Список литературы

- [1] A. A. Maradudin, E. W. Montroll, G. H. Weiss, *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*, Academic Press, New York, 1963.
- [2] A. Dhar, K. Saito, “Heat Transport in Harmonic Systems”, *Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer, Lecture Notes in Physics*, v. 921, eds. S. Lepri, Springer, 2016, 39–105.
- [3] I. Fujiwara, P. C. Hemmer, H. Wergeland, “Some Exact Results in the Theory of Brownian Motion”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **37–38**, (1966), 141–152.
- [4] R. J. Rubin, “Momentum Autocorrelation Function of a Heavy Particle in a Finite Crystal”, *Journal of the American Chemical Society*, **90**:12, (1968), 3061–3063.
- [5] M. B. Yu, “Momentum autocorrelation function of an impurity in a classical oscillator chain with alternating masses III. Some limiting cases”, *Physica A*, **447**, (2016), 411–421.

-
- [6] P. Mazur, E. Montroll, “Poincare Cycles, Ergodicity, and Irreversibility in Assemblies of Coupled Harmonic Oscillators”, *J. Math. Phys.*, **1**:1, (1960), 70–84.
- [7] M. H. Lee, “Local Dynamics in an Infinite Harmonic Chain”, *Symmetry*, **8**:22, (2016), 1–12.
- [8] M. A. Huerta, H. S. Robertson, “Entropy, Information Theory, and the Approach to Equilibrium of Coupled Harmonic Oscillator Systems”, *J. Stat. Phys.*, **1**:3, (1969), 393–414.
- [9] A. J. O’Connor, “A Central Limit Theorem for the Disordered Harmonic Chain”, *Commun. math. Phys.*, **45**, (1975), 63–77.
- [10] Z. Rieder, J. L. Lebowitz, E. Lieb, “Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequilibrium state”, *J. Math. Phys.*, **8**:5, (1967), 1073–1078.
- [11] R. J. Rubin, W. L. Greer, “Abnormal Lattice Thermal Conductivity of a One-Dimensional, Harmonic, Isotopically Disordered Crystal”, *J. Math. Phys.*, **12**:8, (1971), 1686–1701.
- [12] F. Bonetto, J. L. Lebowitz, L. Rey-Bellet, “Fourier law: a challenge to theorists”, *Mathematical Physics 2000*, eds. A. Fokas, et al., Imperial College Press, London, 2000, 128.
- [13] S. Lepri, R. Livi, A. Politi, “Heat Transport in Low Dimensions: Introduction and Phenomenology”, *Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer, Lecture Notes in Physics*, v. 921, eds. S. Lepri, Springer, 2016, 1–37.
- [14] C.-W. Chang, “Experimental Probing of Non-Fourier Thermal Conductors”, *Thermal transport in low dimensions: from statistical physics to nanoscale heat transfer, Lecture Notes in Physics*, v. 921, eds. S. Lepri, Springer, 2016, 305–338.
- [15] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [16] V. Spiridonov, A. Zhedanov, “Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials”, *Methods and Applications of Analysis*, **2**:4, (1995), 369–398.
- [17] V. Spiridonov, A. Zhedanov, “Discrete Reflectionless Potentials, Quantum Algebras, and q -Orthogonal Polynomials”, *Annals of physics*, **237**, (1995), 126–146.

Поступила в редакцию
1 апреля 2017 г.

Gudimenko A. I. Harmonic oscillator chains with exactly solvable dynamics.
Far Eastern Mathematical Journal. 2017. V. 17. No 1. P. 11–21.

ABSTRACT

The method of Darboux transformation is applied to construct exactly solvable one-dimensional chains of harmonic oscillators.

Key words: *Darboux transformation, exactly solvable dynamics, harmonic chains.*