УДК 517.927.2, 531
MSC2010 34A25, 34A30, 70B99

© М. А. Гузев[1], А. А. Дмитриев[1,2]

Различные формы представления решения одномерной гармонической модели кристалла

Рассматривается одномерная гармоническая модель идеальной кристаллической системы, состоящей из частиц. Для потенциала, соответствующего учету парного взаимодействия частиц с ближайшими соседями, построено фундаментальное решение в собственном базисе матрицы этого потенциала. Показано, как записать решение через полиномы Чебышёва и функции Бесселя, а также получить интегральное представление в окрестности нуля комплексной плоскости и с использованием преобразования Лапласа. Приведено решение для случая матрицы потенциала, возмущенной относительно диагональных элементов.

Ключевые слова: *модель идеальной кристаллической решётки, фундаментальное решение, полиномы Чебышёва, функции Бесселя, преобразование Лапласа.*

1. Введение

Одномерные цепочки частиц всегда были предметом рассмотрения исследователей при изучении многих проблем математической физики, поскольку одномерная модель может допускать построение решения, которого нельзя указать в случае двух или трех измерений [1], а получаемые результаты для одномерных цепочек частиц позволяют объяснить эффекты, отражающие типичное поведение систем. В качестве примера для исследования такой системы рассмотрим идеальный кристалл, изучение различных свойств которого выполняется на основе одномерной гармонической модели, состоящей из n частиц. Потенциал взаимодействия W такой системы дается формулой $W = {}^1\!/_2 \sum\limits_{i,j=1}^{n} A_{ij} u_i u_j$, где u_i — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц относительно положения равновесия, $\mathbf{A} = ||A_{ij}||$ — симметричная матрица, определяемая феноменологическими параметрами системы. Система уравнений для

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8
Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев), dmitriev@iam.dvo.ru (А. А. Дмитриев).

частиц гармонической цепочки записывается в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{A}\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{u}(0) &= \dot{\mathbf{u}}(0) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — вектор, характеризующий внешнее воздействие на систему.

В рамках модели (1) можно формулировать и решать различные проблемы для идеальных кристаллических систем. В частности, было показано, что описание процесса распространения тепла в кристалле не подчиняется закону Фурье [2–4]. Экспериментальное подтверждение эффекта аномального переноса тепла в одномерных структурах можно найти в работах [5–7]. Необходимость полного решения задачи о распространении тепла для указанных выше систем приобретает особую актуальность, так как с развитием нанотехнологий расширяется возможность применения идеальных бездефектных кристаллов и их уникальных теплопроводящих свойств.

С математической точки зрения система (1) является набором линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и знания о свойствах решений таких систем можно найти в современных информационных системах. Тем не менее, получение различных форм координатного представления для решений (1) является отдельной задачей в научной литературе. Для бесконечной цепочки частиц, в которой взаимодействие осуществляется между ближайшими соседями, Шредингер [8] получил решения через функции Бесселя. Для конечной одномерной цепочки с одинаковыми массами, посредине которой расположена частица с другой массой, решение представлено в [9]. В работе [8] анзац был выбран в виде суммы функций Бесселя, а в [9] применялось преобразование Лапласа. Для двумерных дискретно-периодических сред метод интегральных преобразований в задачах распространения волн использовался в [10–12].

Авторы периодически рассматривали [13–16] различные аспекты одномерной гармонической модели кристалла. В данной работе ставится задача восполнить пробел исследований по получению различных форм решения для уравнений (1). В разделе 2 мы напоминаем, как выполняется переход от (1) к обыкновенному дифференциальному уравнению, позволяющий представить решение $\mathbf{u}$ через матрицу преобразования собственных векторов $\mathbf{A}$. В разделе 3 рассматривается случай трехдиагональной матрицы $\mathbf{A}$, что соответствует учету парного взаимодействия с ближайшими соседями для однородной цепочки частиц. В п. 3.1 данного раздела построено решение в собственном базисе матрицы $\mathbf{A} = ||A_{ij}||$ и показано, как оно связано с полиномами Чебышёва. Полученное решение представлено через функции Бесселя в п. 3.2. Применение теории функции комплексной переменной позволяет записать фундаментальное решение (1) в виде контурного интеграла на плоскости — это сделано в п. 3.3. Конструирование решения с помощью преобразования Лапласа выполнено в п. 3.4. В завершении раздела указан полный набор представлений для фундаментального решения (1), указаны импликации между различными формами записи. В разделе 4 рассматривается трехдиагональная матрица, возмущенная относительно относительно первого или последнего диагонального элемента, что соответствует рассмотрению физически неоднородной структуры моделируемого материала. По параметру возмущения сконструировано решение в виде ряда, для каждого члена которого используется представление через функции Бесселя. Обобщение результатов раздела 4 представлено в разделе 5, в котором сформулирован способ построения решения для трехдиагональной матрицы, возмущенной как относительно первого, так и последнего диагональных элементов

2. Общие соотношения для аналитического решения

Построение функции $\mathbf{u}$ (1) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения

$$\ddot{v} + \omega^2 v = \mathrm{g}, \tag{2}$$

с помощью преобразования $\mathbf{U}_n$, матрица которого составлена из нормированных собственных векторов $\mathbf{A}$. Действительно, так как $\mathbf{A}$ является симметричной матрицей, то её нормированные собственные векторы $\boldsymbol{\alpha}_k$ ортогональны, и для матрицы $\mathbf{U}_n = (\boldsymbol{\alpha}_1,...,\boldsymbol{\alpha}_n)$ справедливо равенство

$$\mathbf{A}\mathbf{U}_n = (\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n), \qquad \mathbf{U}_n^t\mathbf{A}\mathbf{U}_n = (\lambda_1\mathbf{e}_1,\ldots,\lambda_n\mathbf{e}_n), \qquad \mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^t = \mathbf{1}_n,$$

где $\lambda_1,...,\lambda_n$ — собственные числа $\mathbf{A}$, $\mathbf{1}_n$ — единичная матрица, $\mathbf{e}_k$ $(k=1,...,n)$ — базисный единичный вектор в евклидовом n-мерном пространстве (отлична от нуля k координата), а верхний индекс ^{t} означает транспонирование. Общее решение системы уравнений (1) запишем в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_n\mathbf{v}. \tag{3}$$

Тогда система (1) редуцируется к

$$\mathbf{U}_n^t\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{U}_n^t\mathbf{A}\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^t\mathbf{u} + \mathbf{U}_n^t\boldsymbol{\eta} \qquad \text{или} \qquad \ddot{\mathbf{v}} = (\lambda_1\mathbf{e}_1,\ldots,\lambda_n\mathbf{e}_n)\mathbf{v} + \mathbf{U}_n^t\boldsymbol{\eta}.$$

Полагая

$$\mathbf{U}_n^t\boldsymbol{\eta} = \mathrm{g}, \tag{4}$$

получим систему дифференциальных уравнений типа (2) с нулевыми начальными условиями, решением которой является вектор $\mathbf{v}$ с компонентами

$$v_k(t) = \frac{1}{\omega_k}\int\limits_0^t \mathrm{g}_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{g}_k * s_{\omega_k}(t), \qquad s_{\omega_k}(t) = \frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t, \tag{5}$$

где $\omega_k = \sqrt{-\lambda_k}$, а символ $*$ обозначает операцию свёртки функций g_k, s_{ω_k}. Переход к решению $\mathbf{u}$ (1) выполняется с помощью преобразования (3).

3. Различные представления аналитического решения

Полагаем, что параметры цепочки однородны, а взаимодействие в ней осуществляется между ближайшими соседями, тогда матрица $\mathbf{A}$ потенциала взаимодействия W является трехдиагональной, и её элементы записываются в виде

$$A_{ij} = \delta_{(i-1)j} - 2\delta_{ij} + \delta_{(i+1)j}, \tag{6}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. В этом разделе для случая матрицы (6) будут представлены различные формы записи решения системы (1).

3.1. Представление решения через собственные векторы матрицы потенциала взаимодействия

Введём матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n^+ &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}), & \mathbf{I}_n^- &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{0}) = (\mathbf{I}_n^+)^t, \\ \mathbf{C}_n(\nu) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{I}_n^- + 2\nu \mathbf{1}_n + \mathbf{I}_n^+, & \mathbf{E}_k &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{e}_k, \dots, \mathbf{0}). \end{aligned} \tag{7}$$

Из (6), (7) следует, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_n(-1).$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$ определяется из условия

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}_n) = \det \mathbf{C}_n(\nu) = 0, \qquad 2\nu = -(2+\lambda) \tag{8}$$

С другой стороны, известно [17], что детерминант матрицы $\mathbf{C}_n(\nu)$ является функцией Чебышёва второго рода $U_n(\nu)$

$$\det \mathbf{C}_n(\nu) = U_n(\nu) = \frac{\sin\bigl((n+1)\arccos \nu\bigr)}{\sin(\arccos \nu)} = \frac{(\nu + \sqrt{\nu^2-1})^{n+1} - (\nu - \sqrt{\nu^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{\nu^2-1}},$$

что позволяет вычислить корни характеристического уравнения (8), а именно $\nu_k = -\cos\dfrac{k\pi}{n+1}$ $(k=1,\dots,n)$. Следовательно, собственные числа матрицы $\mathbf{A}$ определяются равенством

$$\lambda_k = -2(1+\nu_k) = -4\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

Собственные векторы $\boldsymbol{\alpha}_k$, соответствующие собственному значению λ_k, являются решением системы $\mathbf{C}_n(\nu_k)\boldsymbol{\alpha}_k = \mathbf{0}$. Отсюда и из (7) следует, что компоненты вектора $\boldsymbol{\alpha}_k = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_{km}\mathbf{e}_m$ удовлетворяют равенствам

$$\alpha_{m-1\,k} + 2\nu_k\alpha_{mk} + \alpha_{m+1\,k} = 0, \qquad m = 1, \dots, n-1, \quad \alpha_{0k} \stackrel{\text{def}}{=} 0. \tag{9}$$

Но (9) является рекуррентным соотношением для полиномов Чебышёва относительно $-\nu_k$, следовательно, $\alpha_{mk} = U_{m-1}(-\nu_k)\alpha_{1k}$. Полагая $\alpha_{1k} = \sigma_k$, получаем $\alpha_{km} = \sigma_k U_{m-1}(-\nu_k)$. Таким образом, собственные векторы равны

$$\boldsymbol{\alpha}_k = \sigma_k \sum_{m=1}^{n} U_{m-1}(-\nu_k)\mathbf{e}_m, \qquad \sigma_k^{-2} = \sum_{m=1}^{n} U_{m-1}^2(-\nu_k). \tag{10}$$

Для полиномов Чебышёва справедливо тождество

$$\sum_{m=1}^{n} U_{m-1}^2(\nu) = \frac{2n+1-U_{2n}(\nu)}{4(1-\nu^2)}. \tag{11}$$

Доказательство основано на использовании свойства функции Чебышёва

$$\left(z - \frac{1}{z}\right) U_m\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) = z^{m+1} - \frac{1}{z^{m+1}}. \tag{12}$$

Полагая $\nu = {}^1\!/_2\,(z + {}^1\!/_z)$, представим левую часть (11) с учетом (12) в следующем виде:

$$\sum_{m=1}^{n} U_{m-1}^2(\nu) = \left(z - \frac{1}{z}\right)^{-2} \sum_{m=1}^{n} \left(z^m - \frac{1}{z^m}\right)^2 =$$
$$= \left(z - \frac{1}{z}\right)^{-2} \sum_{m=0}^{n} \left(z^{2m} - 2 + \frac{1}{z^{2m}}\right) =$$
$$= \left(z - \frac{1}{z}\right)^{-2} \left\{\frac{1 - z^{2(n+1)}}{1 - z^2} - 2(n+1) + \frac{1 - z^{-2(n+1)}}{1 - z^{-2}}\right\} =$$
$$= \left(z - \frac{1}{z}\right)^{-2} \left\{1 + \left(z^{2n+1} - \frac{1}{z^{2n+1}}\right)\left(z - \frac{1}{z}\right)^{-1} - 2(n+1)\right\}.$$

Учитывая (12) и тождество $(z - {}^1\!/_z)^{-2} = 4(\nu^2 - 1)$, получаем (11).

Из (10), (11) следует

$$\sigma_k^2 = \frac{4(1 - \nu_k^2)}{2n + 1 - U_{2n}(\nu_k)}.$$

Так как $U_{2n}(-\nu_k) = U_{2n}(\nu_k) = -1$, то $\sigma_k^2 = \dfrac{2(1 - \nu_k^2)}{n+1}$, а координаты собственных векторов в (10) равны

$$\alpha_{mk} = \sigma_k U_{m-1}(-\nu_k) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\frac{mk\pi}{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma \sin mk\vartheta, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{n+1}. \tag{13}$$

Очевидно, что $\alpha_{mk} = \alpha_{km}$, следовательно, матрица $\mathbf{U}_n$ симметрична ($\mathbf{U}_n^t = \mathbf{U}_n$). В силу ортогональности собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}_k$ справедливы соотношения

$$\sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm}\alpha_{mk} = \delta_{jk}. \tag{14}$$

Запишем координатную формулу для решения системы уравнений (1) при

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \sum_{m=1}^{n} \eta_m(t)\mathbf{e}_m.$$

Учитывая свойство симметрии матрицы $\mathbf{U}_n$ и (4), получим $\mathrm{g}_k = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_{mk}\eta_m(t)$. Векторное представление для решения (5) дается формулой

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \eta_m(t)\alpha_{mk}\right) * s_{\omega_k}(t)\mathbf{e}_k.$$

Отсюда и из (3) получаем решение системы уравнений (1)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = \mathbf{U}_n\mathbf{v}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} \eta_m\alpha_{mk}\right) * s_{\omega_k}(t)\boldsymbol{\alpha}_k = \\ &= \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_k} \sin mk\vartheta \sin kj\vartheta \sin\omega_k(t - \tau)\right) \eta_m(\tau)d\tau\mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (13), (15) следует, что компоненты вектора **u** являются сверткой

$$u_j = K_{j,m}(t) * \eta_m \quad \text{и} \quad K_{j,m}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\,=\,1}^{n} \alpha_{jk}\alpha_{km}\frac{1}{\omega_k}\sin\omega_k t. \tag{16}$$

Ядро $K_{j,m}(t)$ является фундаментальным решением системы уравнений (1), а соотношения (16) определяют разложение $K_{j,m}(t)$ в собственном базисе матрицы $\mathbf{A}$.

3.2. Запись фундаментального решения через функции Бесселя

Рассмотрим ядро решения $K_{j,m}(t)$ в (16) и разложим $\sin\omega_k t$ в ряд, затем воспользуемся соотношением (13) и равенством $U_k(-\nu)=(-1)^k U_k(\nu)$. В результате $K_{j,m}(t)$ дается формулой:

$$K_{j,m}(t) = \sum_{k\,=\,1}^{n}(-1)^{j+m}\sigma_k^2 U_{j-1}(\nu_k)\sum_{l\,=\,0}^{\infty}(-1)^l\frac{2^l t^{2l+1}}{(2l+1)!}U_{m-1}(\nu_k)(1+\nu_k)^l.$$

Для дальнейших преобразований полезно тождество (I.2.28) в [17]

$$2^l U_m(\nu)(1+\nu)^l = \sum_{i\,=\,-l}^{l}\binom{2l}{l-i}U_{m+i}(\nu) = \binom{2l}{l}U_m(\nu)+\sum_{i\,=\,1}^{l}\binom{2l}{l-i}\big[U_{m+i}(\nu)+U_{m-i}(\nu)\big].$$

Это позволяет представить $K_{j,m}(t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} K_{j,m}(t) = {} & \sum_{k\,=\,1}^{n}(-1)^{j+m}\sigma_k^2 U_{j-1}(\nu_k)\Bigg\{\sum_{l\,=\,0}^{\infty}(-1)^l\frac{t^{2l+1}}{(l!)^2(2l+1)}U_{m-1}(\nu_k)+ \\ & +\sum_{l\,=\,1}^{\infty}(-1)^l\frac{t^{2l+1}}{(2l+1)!}\sum_{i\,=\,1}^{l}\binom{2l}{l-i}\big[U_{m-1+i}(\nu_k)+U_{m-1-i}(\nu_k)\big]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Меняя порядок суммирования в сумме по l,i, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{i\,=\,1}^{\infty}[\ldots]\sum_{l\,=\,i}^{\infty}(-1)^l\frac{t^{2l+1}}{(2l{+}1)!}\binom{2l}{l{-}i} = \sum_{i\,=\,1}^{\infty}[\ldots]\sum_{l\,=\,0}^{\infty}(-1)^{i+l}\frac{t^{2(l+i)+1}}{(2(i{+}l){+}1)!}\binom{2(i{+}l)}{l} = \\ &= \sum_{i\,=\,1}^{\infty}[\ldots](-1)^i\sum_{l\,=\,0}^{\infty}(-1)^l\frac{t^{2(l+i)+1}}{l!(l{+}2i)!(2(i{+}l){+}1)} = \sum_{i\,=\,1}^{\infty}(-1)^i[\ldots]\int_0^t\sum_{l\,=\,0}^{\infty}(-1)^l\frac{s^{2(l+i)}}{l!(l{+}2i)!}, \end{aligned}$$

где многоточия в квадратной скобке обозначают комбинацию функций Чебышёва. Последняя сумма по l совпадает с функцией Бесселя первого рода $J_{2i}(2s)$; тогда, обозначая

$$\int_0^t J_{2i}(2s)ds = \phi_i,$$

соотношение (17) представим в следующем виде

$$\sum_{k\,=\,1}^{n}(-1)^{j+m}\sigma_k^2 U_{j-1}(\nu_k)\left\{\phi_0 U_{m-1}(\nu_k)+\sum_{i\,=\,1}^{\infty}(-1)^i\phi_i\big[U_{m+i-1}(\nu_k)+U_{m-i-1}(\nu_k)\big]\right\}. \tag{18}$$

Поскольку $U_{-k-1} = -U_{k-1}$, $U_{-1} \equiv 0$, то справедливы преобразования в сумме по i:

$$\phi_0 U_{m-1} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \phi_i [U_{m+i-1} - U_{i-m-1}] =$$
$$= \phi_0 U_{m-1} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{i-m} \phi_{i-m} U_{i-1} - \sum_{i=-m+1}^{\infty} (-1)^{i+m} \phi_{i+m} U_{i-1} =$$
$$= \phi_0 U_{m-1} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{i+m} \phi_{i-m} U_{i-1} - \sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{i+m} \phi_{i+m} U_{i-1} -$$
$$- \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \phi_{i+m} U_{i-1} - \sum_{i=-m+1}^{-1} (-1)^{i+m} \phi_{i+m} U_{i-1} =$$
$$= \phi_0 U_{m-1} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{i+m} [\phi_{i-m} - \phi_{i+m}] U_{i-1} -$$
$$- \sum_{i=0}^{m} (-1)^{i+m} \phi_{i+m} U_{i-1} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+m} \phi_{m-i} U_{i-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+m} [\phi_{m-i} - \phi_{m+i}] U_{i-1} + \sum_{i=m+1}^{\infty} (-1)^{i+m} [\phi_{i-m} - \phi_{i+m}] U_{i-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+m} \varphi_{i,m} U_{i-1},$$

где

$$\varphi_{i,m}(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \phi_{i-m}(t) - \phi_{i+m}(t) = \int_0^t \Big[J_{2(i-m)}\big(2s\big) - J_{2(i+m)}\big(2s\big) \Big] ds \tag{19}$$

(учли равенство $J_{2n} = J_{-2n}$). В результате (18) записывается в виде

$$K_{j,m}(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{j+i} \sigma_k^2 U_{j-1}(\nu_k) U_{i-1}(\nu_k) \varphi_{i,m}(t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \sigma_k U_{i-1}(\nu_k) \varphi_{i,m}(t).$$

Отметим, что (16) является суммой от 1 до n, поэтому для преобразования предыдущего равенства используем периодичность функции sin. Сумму по i представим в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} a_{l(n+1)+i} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} (a_{2l(n+1)+i} + a_{(2l+1)(n+1)+i}).$$

Так как $\sin((2l+1)(n+1)+i)k\vartheta = \sin(i-n-1)k\vartheta = -\sin(n+1-i)k\vartheta$, $\sin(2l(n+1)+i)k\vartheta =$ $= \sin ik\vartheta$ и $\sigma_k U_{i-1}(\nu_k) = \sigma \sin ik\vartheta$, то

$$\sigma_k U_{(2l+1)(n+1)+i-1}(\nu_k) = -\sigma_k U_{n-i}(\nu_k),\ \sigma_k U_{2l(n+1)+i-1}(\nu_k) = \sigma_k U_{i-1}(\nu_k),$$

причём $U_{-1}\equiv 0$, $U_n(\nu_k)=0$, поэтому сумма по i запишется в виде

$$\sigma_k \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}\big[(-1)^i U_{i-1}(\nu_k)\varphi_{2l(n+1)+i,m}(t)-(-1)^{n+1-i}U_{n-i}(\nu_k)\varphi_{(2l+1)(n+1)+i,m}(t)\big]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\sigma_k U_{i-1}(\nu_k)\sum_{l=0}^{\infty}\big[\varphi_{2l(n+1)+i,m}(t)-\varphi_{2(l+1)(n+1)-i,m}(t)\big]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ik}\sum_{l=0}^{\infty}\big[\varphi_{2l(n+1)+i,m}(t)-\varphi_{2(l+1)(n+1)-i,m}(t)\big].$$

Следовательно, $K_{j,m}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_{jk}\alpha_{ki}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\big[\varphi_{2l(n+1)+i,m}(t)-\varphi_{2(l+1)(n+1)-i,m}(t)\big]$. Используя условие ортогональности (14), перепишем соотношение для $K_{j,m}(t)$ в окончательном виде:

$$K_{j,m}(t)=\sum_{l=0}^{\infty}\big[\varphi_{2l(n+1)+j,m}(t)-\varphi_{2(l+1)(n+1)-j,m}(t)\big]=$$
$$=\varphi_{j,m}(t)+\sum_{l=1}^{\infty}\big[\varphi_{2l(n+1)+j,m}(t)-\varphi_{2l(n+1)-j,m}(t)\big]. \tag{20}$$

Правая часть (20) симметрична относительно индексов j,m. Действительно, соотношение $\varphi_{j,m}(t)=\varphi_{m,j}(t)$ следует из (13) и свойств функций Бесселя чётного индекса. Равенство

$$\varphi_{2l(n+1)+j,m}(t)-\varphi_{2l(n+1)-j,m}(t)=\varphi_{2l(n+1)+m,j}(t)-\varphi_{2l(n+1)-m,j}(t)$$

является следствием (13) и свойства симметрии по индексам j,m функции

$$J_{2(N+j-m)}-J_{2(N+j+m)}-J_{2(N-j-m)}+J_{2(N-j+m)},\qquad N=2l(n+1).$$

Кроме того, справедливы два очевидных равенства: $\varphi_{j,0}(t)\equiv 0$, $\varphi_{j,m}(0)=0$ при всех j и m. Поскольку $J_k(0)=0$ при $k\neq 0$ и $J_0(0)=1$, то $\dot\varphi_{j,m}(0)=\begin{cases}1, & \text{если } j=m\neq 0\\ 0, & \text{если } j\neq m\end{cases}$.

Свойства функций $\varphi_{j,m}$ обеспечивают аналогичные свойства $K_{j,m}$, а именно:
I. $K_{j,0}(t)\equiv 0$.

II. $K_{j,m}(0)=0$ при всех j и m, $\dot K_{j,m}(0)=\begin{cases}1, & \text{если } j=m\neq 0\\ 0, & \text{если } j\neq n\end{cases}$.

При $j=n+1$ индексы в разностях $\varphi_{2l(n+1)+j,m}(t)-\varphi_{2(l+1)(n+1)-j,m}(t)$, определяющих функцию $K_{j,m}$, совпадают, отсюда следует, что

III. $K_{n+1,m}(t)\equiv 0$ при всех m.

3.3. Интегральное представление фундаментального решения

Функция Бесселя $J_n(t)$ допускает представление в виде

$$J_m(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|\,=\,r} z^{-(m+1)} \exp\left\{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} dz,$$

[18, стр. 29] при этом экспонента под знаком интеграла является производящей функцией $J_n(t)$ с целым индексом [18, стр. 23] (здесь и далее контур интегрирования ориентирован в положительном направлении). Подставляя это выражение в (19), получим

$$\varphi_{j,m}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^t \oint\limits_{|z|\,=\,r} (z^{-2(j-m)-1} - z^{-2(j+m)-1}) \exp\left\{\tau\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} dz d\tau. \tag{21}$$

Изменив порядок интегрирования, вычислим интеграл по τ, в результате (21) редуцируется к виду

$$\varphi_{j,m}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|\,=\,r} \frac{1}{z^{2j}} \left(z - \frac{1}{z}\right)^{-1} \left(z^{2m} - \frac{1}{z^{2m}}\right) \exp\left\{t\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{z}. \tag{22}$$

Учтено, что $\oint\limits_{|z|=r} \frac{1}{z^{2j}(1-z^2)}\left(\frac{1}{z^{2m}} - z^{2m}\right) dz = 0$ (ряд Лорана чётной функции не содержит нечётных степеней, поэтому вычет равен нулю).

Выражение $\left(z - \frac{1}{z}\right)^{-1}\left(z^{2m} - \frac{1}{z^{2m}}\right)$ совпадает с полиномом Чебышёва $U_{2m-1}(\zeta)$ при $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, причём справедливо равенство

$$U_{2m-1}(\zeta) = U_{m-1}(T_2(\zeta))U_1(\zeta)$$

[17, формула 1.2.20 при $k=2$], где $T_2(\zeta) = 2\zeta^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ — полином Чебышёва первого рода второго порядка. Это позволяет записать (22) в следующей форме:

$$\varphi_{j,m}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|\,=\,r} \frac{1}{z^{2j}} U_{m-1}(T_2(\zeta)) \left(z + \frac{1}{z}\right) \exp\left\{t\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{z}. \tag{23}$$

Из тождества $\left(z - \frac{1}{z}\right)^2 \frac{1}{z^{2k}} = \frac{1}{z^{2(k-1)}} - 2\frac{1}{z^{2k}} + \frac{1}{z^{2(k+1)}}$ и (21) следует равенство

$$\ddot{\varphi}_{j,m}(t) = \varphi_{j-1,m}(t) - 2\varphi_{j,m}(t) + \varphi_{j+1,m}(t).$$

Отсюда и из (20) получаем аналогичное соотношение для функций $K_{j,m}$:

IV. $$K''_{j,m}(t) = K_{j-1,m}(t) - 2K_{j,m}(t) + K_{j+1,m}(t) = \sum_{l\,=\,1}^{n} A_{jl} K_{l,j}(t), \tag{24}$$

где учтено представление (6) для матрицы $\mathbf{A}$. Свойства I–IV функций $K_{j,m}$ позволяют убедиться в том, что формула (20) определяет фундаментальное решение системы (1). Действительно, дифференцирование (16) дает

$$u_j''(t) = \int_0^t \sum_{m=1}^{n} K_{j,m}''(t-\tau)\eta_m(\tau)d\tau + \eta_j. \tag{25}$$

Из (24) и (6) следует, что (25) является решением (1).

В интегральном представлении (21) от индексов j, m зависит лишь функция $1/_{z^{2j}} U_{m-1}(T_2(\zeta))$, следовательно, для того чтобы получить интегральное представление $K_{j,m}(t)$, достаточно просуммировать ряд в представлении решения (20)

$$\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\eta^{2l(n+1)+j} - \eta^{2(l+1)(n+1)-j}\right)$$

при $\eta = 1/_{z^2}$ и подставить его значение в (20) вместо $1/_{z^{2j}}$:

$$\Sigma = \frac{\eta^j}{1-\eta^{2(n+1)}} - \frac{\eta^{2(n+1)-j}}{1-\eta^{2(n+1)}} = \frac{\eta^{j-(n+1)} - \eta^{(n+1)-j}}{\eta^{-(n+1)} - \eta^{(n+1)}}.$$

Ясно, что Σ является отношением полиномов Чебышёва степени $2(n-j)+1$ и $2n+1$, аргумент которых равен ζ. Ряд Σ сходится при $|z|>1$. Учитывая (23), получим

$$K_{j,m}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{U_{n-j}(T_2(\zeta))U_{m-1}(T_2(\zeta))}{U_n(T_2(\zeta))} \left(z + \frac{1}{z}\right) \exp\left\{t\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{z}, \quad r > 1.$$

Так как правая часть (23) несимметрична относительно индексов j, m, а суммирование производится по j, то естественно считать, что $j \geqslant m$. При $j \leqslant m$ индексы j и m следует поменять местами. Особые точки подынтегральной функции содержаться в круге $|z|<r$, следовательно, по теореме о полной сумме вычетов

$$K_{j,m}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{U_{n-j}(T_2(\zeta))U_{m-1}(T_2(\zeta))}{U_n(T_2(\zeta))} \left(z + \frac{1}{z}\right) \exp\left\{t\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{z}, \quad r > 1.$$

Подстановка $z \to -1/_z$ приводит к выражению

$$K_{j,m}(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r} \frac{U_{n-j}(T_2(\zeta))U_{m-1}(T_2(\zeta))}{U_n(T_2(\zeta))} \left(z + \frac{1}{z}\right) \exp\left\{t\left(z - \frac{1}{z}\right)\right\} \frac{dz}{z}, \tag{26}$$

$j \geqslant m$, $r<1$. При $j \leqslant m$ индексы j и m меняются местами.

3.4. Использование преобразования Лапласа для построения фундаментального решения

Для преобразования Лапласа $\mathfrak{L}$ образ $\mathfrak{L}[\ddot{u}](s)$ равен $s^2\mathfrak{L}[u](s)$, тогда система уравнений (1) с матрицей (6) после применения этого преобразования записывается в виде

$$(s^2\mathbf{1}_n - \mathbf{A}_n)\hat{\mathbf{u}} = (-\mathbf{I}_n^- + (s^2+2)\mathbf{1}_n - \mathbf{I}_n^+)\hat{\mathbf{u}} = \hat{\boldsymbol{\eta}}, \qquad \hat{\mathbf{u}} = \mathfrak{L}[u]. \tag{27}$$

Общая формула решения для координат оригинала u_j дается первым равенством в (16). Применение преобразования Лапласа приводит к $\hat{u}_i = \sum\limits_{m=1}^{n} \hat{K}_{i,m}\hat{\eta}_m$. Отсюда видно, что при $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{e}_j$ частное решение $\hat{u}_j$, соответствующее такому выбору правой части (27), совпадает с $\hat{K}_{ij}$. Тогда полагая $2\nu = s^2+2$, запишем систему (27) при $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{e}_j$ в виде

$$\begin{aligned} \hat{u}_2 &= 2\nu\hat{u}_1, \\ \hat{u}_{k+1} &= 2\nu\hat{u}_k - \hat{u}_{k-1} - \delta_{kj}, \\ \hat{u}_{n-1} &= 2\nu\hat{u}_n. \end{aligned} \tag{28}$$

Решения системы уравнений (28) записываются через полиномы Чебышёва второго рода. Это несложно показать, используя индукцию по индексу j, что даёт

$$\hat{u}_i(\nu) = U_{i-1}(\nu)\hat{u}_1(\nu) \tag{29}$$

при $i \leqslant j$ и $\hat{u}_i(\nu) = U_{i-1}(\nu)\hat{u}_1(\nu) - U_{i-j-1}(\nu)$ при $i > j$. Подставив эти выражения в последнее уравнение системы (28), получим

$$U_{n-2}(\nu)\hat{u}_1(\nu) - U_{n-j-2}(\nu) = 2\nu\big(U_{n-1}(\nu)\hat{u}_1(\nu) - U_{n-j-1}(\nu)\big) \quad \text{или} \quad \hat{u}_1(\nu) = \frac{U_{n-j}(\nu)}{U_n(\nu)}.$$

Следовательно,

$$\hat{u}_i(\nu) = \frac{U_{n-j}(\nu)U_{i-1}(\nu)}{U_n(\nu)}, \quad i \leqslant j, \qquad \hat{u}_i(\nu) = \frac{U_{n-j}(\nu)U_{i-1}(\nu)}{U_n(\nu)} - U_{i-j-1}(\nu), \quad i > j.$$

Из тождества 1.2.15 в [17] следует равенство $U_{n-j}U_{i-1} - U_{n-i}U_{j-1} = U_nU_{i-j-1}$, таким образом,

$$\begin{aligned} \hat{u}_i(\nu) &= \frac{U_{n-j}(\nu)U_{i-1}(\nu)}{U_n(\nu)}, \qquad && i \leqslant j, \\ \hat{u}_i(\nu) &= \frac{U_{n-i}(\nu)U_{j-1}(\nu)}{U_n(\nu)}, \qquad && i \geqslant j. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\nu \simeq s^2$, $|\hat{u}_i(\nu)| \simeq |s|^{-2(1+|j-i|)} \leqslant |s|^{-2}$ при $s \to \infty$, то по лемме [19, §31] обратное преобразование Лапласа фундаментального решения системы уравнений (1) можно записать в виде

$$K_{i,j}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|s|\,=\,r} \frac{U_{n-j}(\nu)U_{i-1}(\nu)}{U_n(\nu)} e^{ts} ds, \qquad \nu = \frac{s^2}{2} + 1, \quad r > 2, \quad j \geqslant i. \tag{30}$$

Отметим, что особые точки подынтегрального выражения в (30) определяются нулями полинома $U_n(\nu)$.

3.5. Связь между различными представлениями $K_{j,m}(t)$

В предыдущих пунктах получены следующие выражения функций $K_{j,m}(t)$, определяющих фундаментальное решение системы уравнений (1):

$$K_{j,m}(t) = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k}\sin mk\vartheta\sin kj\vartheta\sin\omega_k t, \tag{15}$$

$$\begin{gathered} K_{j,m}(t) = \varphi_{j,m}(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\bigl[\varphi_{2k(n+1)+j,m}(t) - \varphi_{2k(n+1)-j,m}(t)\bigr], \\ \varphi_{k,m}(t) = \int\limits_0^t\Bigl[J_{2(k-m)}(2s) - J_{2(k+m)}(2s)\Bigr]ds, \end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered} K_{j,m}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{U_{n-j}(T_2(\zeta))U_{m-1}(T_2(\zeta))}{U_n(T_2(\zeta))}\left(z+\frac{1}{z}\right)\exp\left\{t\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}\frac{dz}{z}, \\ \zeta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad r<1, \quad j\geqslant m, \end{gathered} \tag{26}$$

$$K_{j,m}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|s|=r}\frac{U_{n-j}(\nu)U_{m-1}(\nu)}{U_n(\nu)}e^{ts}ds, \qquad \nu = \frac{s^2}{2}+1, \quad r>2, \quad j\geqslant m. \tag{30}$$

В п.п. 3.2 и 3.3 установлена импликация (15)$\Rightarrow$(20)$\Rightarrow$(26). Очевидно, что импликация (26)$\Rightarrow$(30) определяется подстановкой $s = z - 1/z$, при этом окружность $|z|^+ = r$ $(r<1)$ переходит в эллипс $\mathscr{E}_r$ с полуосями $1/r - r$, $1/r + r$ с противоположной ориентацией, что приводит к изменению знака перед интегралом. Кроме того, следует учесть, что

$$\begin{gathered} \nu = \frac{s^2}{2}+1 = \frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right) = T_2(\zeta), \\ d\left(z-\frac{1}{z}\right) = \left(1+\frac{1}{z^2}\right)dz = \left(z+\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}. \end{gathered}$$

Отметим, что $U_k(T_2(\zeta)) = \dfrac{z^{4(k+1)}-1}{z^{2(k+1)}}\left(z^2-\dfrac{1}{z^2}\right)^{-1}$, поэтому

$$K_{j,m}(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{z^{2(j-m)}(z^{4(n+1-j)}-1)(z^{4m}-1)}{(z^{4(n+1)}-1)(z^2-1)}\exp\left\{t\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}dz. \tag{26a}$$

Из (26а) сразу видно, что особые точки подынтегрального выражения, кроме точек 0 и ∞, принадлежат единичной окружности и равны $\exp i\dfrac{k\vartheta}{2}$ $(k=-(2n+1),\dots,2n+1)$. Так как точки ±1, $\pm i$ не являются особыми, то $k \neq 0, \pm(n+1)$.

Преобразование $z - 1/z \to s$ «склеивает» точки с индексами k и $-2(n+1)+k$ при $k<0$, k и $2(n+1)-k$ при $k>0$ и переводит их в $\pm i\omega_{\pm k} = 2i\sin\dfrac{k\vartheta}{2}$ $(k=\pm1,\dots,\pm n)$.

Кроме того, непосредственное вычисление вычета в точке 0 функции $K'_{j,m}(t)$ при $t=0$ приводит к равенствам:

$$K'_{j,j}(0)=1 \qquad \text{и} \qquad K'_{j,m}(0)=0 \quad \text{при} \quad j>m.$$

Для того чтобы установить импликацию (30) ⇒ (15), вычислим вычеты подынтегральной функции (20) в особых точках ω_k. Так как корни полинома $U_n\left(s^2/2+1\right)$ — простые и совпадают с нулями полинома $U_n(\nu)$ при $s^2=\lambda_k$, то вычет в такой точке равен отношению значения числителя подынтегральной функции к производной $U_n(\nu)$ по s в точках $\pm i\omega_k$ — $\pm iU'_n(\bar\nu_k)\omega_k$ ($\bar\nu_k=\cos k\vartheta$).

Из определения полиномов Чебышёва следует, что

$$U'_n(\bar\nu_k) = -(n+1)\frac{\cos((n+1)\arccos\bar\nu_k)}{\sin(\arccos\bar\nu_k)\sqrt{1-\bar\nu_k^2}} = (-1)^k\frac{n+1}{\sin^2 k\vartheta},$$

$$U_{n-j}(\bar\nu_k)U_{m-1}(\bar\nu_k) = \frac{\sin(n+1-j)k\vartheta\sin mk\vartheta}{\sin^2 k\vartheta} = (-1)^k\frac{\sin jk\vartheta\sin mk\vartheta}{\sin^2 k\vartheta}.$$

Следовательно, сумма вычетов равна

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin mk\vartheta\sin kj\vartheta\frac{e^{i\omega_k}-e^{-i\omega_k}}{i\omega_k}\sin\omega_k t = \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\omega_k}\sin mk\vartheta\sin kj\vartheta\sin\omega_k t.$$

В заключение этого пункта отметим, что сумма вычетов подынтегрального выражения (26) по особым точкам на единичной окружности равна функции $2K_{j,m}(t)$, определяемой соотношением в (15).

4. Построение однопараметрического решения для неоднородной цепочки

Рассмотрим модель неоднородной цепочки, которой соответствует матрица потенциала, возмущенная по параметру β относительно диагональных элементов

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_n(-1) - \beta\mathbf{E}_k \qquad \text{при } k=1,n \quad (\text{матрица } \mathbf{E}_k \text{ определена в (7)}). \tag{31}$$

Метод, изложенный в п. 3.1, позволяет построить фундаментальное решение для такого случая, но необходимо знать корни уравнения $U_n(\nu)-\beta U_{n-1}(\nu)=0$, что при $\beta\neq 0,1$ возможно лишь численно. При внешнем воздействии на один из концов цепочки вектор $\boldsymbol{\eta}(t)$ имеет вид

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \eta_1(t)\mathbf{e}_1, \qquad \text{или} \qquad \boldsymbol{\eta}(t) = \eta_n(t)\mathbf{e}_n,$$

т. е. выбор индексов $k=1,n$ в (31) вполне оправдан, при этом достаточно рассматривать функции $K_{m,1}(t,\beta)$ и $K_{n,m}(t,\beta)$. Рассмотрим сначала случай $k=n$.

Преобразование Лапласа уравнений (1) с матрицей (31) приводит к алгебраической системе уравнений, которая по структуре аналогична (28), но отличается соотношением при $j=n$

$$\hat u_{n-1} = (2\nu+\beta)\hat u_n - 1. \tag{32}$$

Подставляя (29) в (32) и используя рекуррентное соотношение (9) для полиномов Чебышёва, определяем $\hat{u}_1(\nu)=\dfrac{1}{U_n(\nu)+\beta U_{n-1}(\nu)}$ и $\hat{u}_m(\nu)=\dfrac{U_{m-1}(\nu)}{U_n(\nu)+\beta U_{n-1}(\nu)}$. Следовательно,

$$K_{n,m}(t,\beta)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=r}\frac{U_{m-1}(\nu)}{U_n(\nu)+\beta U_{n-1}(\nu)}e^{ts}ds,\qquad \nu=\frac{s^2}{2}+1. \tag{33}$$

Для того чтобы получить представление решения в виде ряда по функциям Бесселя, вычислим преобразование Лапласа функции $\varphi_{k,m}$. Изображение функции $J_{2n}(2t)$ равно [20] $\dfrac{4^n}{\sqrt{4+s^2}(s+\sqrt{4+s^2})^{2n}}$. Заметим, что

$$(s+\sqrt{s^2+4})^2=4\left(\frac{s^2}{2}+1+\sqrt{\left(\frac{s^2}{2}+1\right)^2-1}\right)=4(\nu+\sqrt{\nu^2-1})=4z,$$

т. е. $\mathfrak{L}[J_{2n}(2\cdot)](s)=\left[\sqrt{4+s^2}z^n\right]^{-1}$. Отсюда и из определения (19) функции $\varphi_{m,j}$ следует, что

$$\mathfrak{L}[\varphi_{m,j}](s)=\frac{1}{s\sqrt{s^2+4}}\left(z^{j-m}-\frac{1}{z^{j+m}}\right)=z^{-m}U_{j-1}(\nu),$$

так как $s\sqrt{s^2+4}=2\sqrt{\nu^2-1}$.

Полагая, что $\beta<1$ в (33), представим преобразование Лапласа функции $K_{n,m}(t,\beta)$ в виде ряда

$$\mathfrak{L}[K_{n,m}(\cdot,\beta)]=\frac{U_{m-1}(\nu)}{U_n(\nu)}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\beta^l\left(\frac{U_{n-1}(\nu)}{U_n(\nu)}\right)^l.$$

После замены переменной ν на z в полиномах степени n и $n-1$ для коэффициентов при степенях β^l получим выражение, которое несложно представить в виде ряда

$$\begin{aligned}\frac{U^l_{n-1}(\nu)}{U^{l+1}_n(\nu)}&=\frac{1}{z^{n+l}}\left(1-\frac{1}{z^{2n}}\right)^l\left(1-\frac{1}{z^{2(n+1)}}\right)^{-(l+1)}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)=\\&=\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{j}\binom{i+l}{i}\frac{1}{z^{2(n+1)i+2jn+n+l}}.\end{aligned}$$

Обозначим $(2n+1)j+2(n+1)i+l+n+1$ через N и, учитывая изображение функции $\varphi_{m,j}$, получим представление $K_{n,m}(t,\beta)$ через функции Бесселя

$$K_{n,m}(t,\beta)=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^l\beta^l\binom{l}{j}\binom{i+l}{i}[\varphi_{N-1,m}(t)-\varphi_{N+1,m}(t)].$$

Изменив порядок суммирования по l и j и заменив l на $l+j$, получим

$$K_{n,m}(t,\beta)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{l+j}\frac{(j+l+i)!}{j!\,l!\,i!}\beta^{l+j}[\varphi_{N-1,m}(t)-\varphi_{N+1,m}(t)].$$

Отметим, что рекуррентные формулы [18, п. 2.12] позволяют выразить $K_{n,m}(t,\beta)$ непосредственно через функции Бесселя.

Действительно, из (19) следует, что подынтегральную функцию разности

$$\varphi_{N-1,m}(t)-\varphi_{N+1,m}(t)$$

можно записать в виде

$$\begin{aligned} & J_{2(N-m-1)}(2s) - J_{2(N+m-1)}(2s) - J_{2(N-m+1)}(2s) - J_{2(N+m+1)}(2s) = \\ = \; & J_{2(N-m)-2} - J_{2(N-m)} + J_{2(N-m)} - J_{2(N-m)+2} - \\ & - (J_{2(N+m)-2} - J_{2(N+m)} + J_{2(N+m)} - J_{2(N+m)+2}) = \\ = \; & 2[J'_{2(N-m)-1}(2s) + J'_{2(N-m)+1}(2s) - (J'_{2(N+m)-1}(2s) + J'_{2(N+m)+1}(2s)], \end{aligned}$$

что после интегрирования приводит к равенству

$$\varphi_{N-1,m}(t) - \varphi_{N+1,m}(t) = \frac{2(N-m)}{t} J_{2(N-m)}(2t) - \frac{2(N+m)}{t} J_{2(N+m)}(2t).$$

Следовательно, $K_{n,m}(t,\beta)=$

$$= \frac{2}{t} \sum_{i,j,l\,=\,0}^{\infty} (-1)^{l+j} \frac{(j+l+i)!}{j!\,l!\,i!} \beta^{l+j} [(N-m) J_{2(N-m)}(2t) - (N+m) J_{2(N+m)}(2t)], \tag{34}$$

$(N=(2n+1)j+2(n+1)i+l+n+1)$.

В заключение этого раздела сформулируем результат при $k=1$ для матрицы (31). Преобразование Лапласа уравнений (1) с этой матрицей приводит к системе соотношений, первое из которых имеет вид $\hat{u}_2=(2\nu+\beta)\hat{u}_1-1$, а последнее — $\hat{u}_{n-1}=2\nu\hat{u}_n$. Остальные соотношения совпадают с соответствующими по номерам уравнениями системы (21). Решение $\hat{u}_m(\nu)$ равно $\hat{u}_m(\nu)=\dfrac{U_{n-m}(\nu)}{U_n(\nu)+\beta U_{n-1}(\nu)}$. Отсюда и из (30) сразу следует равенство $K_{m,1}(t,\beta)=K_{n,n-m+1}(t,\beta)$, которое определяет правило замены индекса m в (34) для вычисления $K_{m,1}(t,\beta)$.

5. Построение двухпараметрического решения для неоднородной цепочки

Рассмотрим более общую ситуацию, когда матрица $\mathbf{A}$ зависит от двух параметров

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_n(-1) - \beta_1 \mathbf{E}_1 - \beta_n \mathbf{E}_n,$$

а вектор-функция внешнего воздействия определена в (32). Для построения решения достаточно найти функции $K_{m,1}(t,\beta_1,\beta_n)$ и $K_{n,m}(t,\beta_1,\beta_n)$.

Найдём решение системы уравнений (28), которое определяет функции $\hat{K}_{n,m}$. Это означает, что первая строка имеет вид $\hat{u}_2=(2\nu+\beta_1)\hat{u}_1$, а последняя — $\hat{u}_{n-1}=(2\nu+\beta_n)\hat{u}_n-1$. Запишем $\hat{u}_2(\nu)$ в виде $(U_1(\nu)+\beta_1 U_0(\nu))\hat{u}_1(\nu)$, тогда $\hat{u}_m(\nu)=(U_{m-1}(\nu)+\beta_1 U_{m-2}(\nu))\hat{u}_1$. Подставив $\hat{u}_{n-1}(\nu)$, $\hat{u}_n(\nu)$ в уравнение $\hat{u}_{n-1}=(2\nu+\beta_n)\hat{u}_n-1$, получим

$$\hat{u}_1(\nu) = \frac{1}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)},$$

следовательно,

$$\hat{u}_m(\nu) = \frac{U_{m-1}(\nu) + \beta_1 U_{m-2}(\nu)}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)}.$$

Таким образом,

$$K_{n,m}(t,\beta_1,\beta_n) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r} \frac{U_{m-1}(\nu) + \beta_1 U_{m-2}(\nu)}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)} e^{ts} ds, \qquad (35)$$

где $\nu = \dfrac{s^2}{2} + 1$.

Вычисление функций $K_{m,1}(t,\beta_1,\beta_n)$ сводится к решению системы (28), в которой последняя строка имеет вид $\hat{u}_{n-1} = (2\nu+\beta_n)\hat{u}_n$, а первая — $\hat{u}_2 = (2\nu+\beta_1)\hat{u}_1 - 1$.

Очевидно, что

$$\hat{u}_{n-1}(\nu) = (U_1(\nu) + \beta_n U_0(\nu))\hat{u}_n(\nu), \qquad \hat{u}_{n-m}(\nu) = (U_m(\nu) + \beta_n U_{m-1}(\nu))\hat{u}_n(\nu),$$

т. е.

$$\hat{u}_n(\nu) = \frac{1}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)},$$

$$\hat{u}_m(\nu) = \frac{U_{n-m}(\nu) + \beta_n U_{n-m-1}(\nu)}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)},$$

следовательно,

$$K_{m,1}(t,\beta_1,\beta_n) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|\,=\,r} \frac{U_{n-m}(\nu) + \beta_n U_{n-m-1}(\nu)}{U_n(\nu) + (\beta_1+\beta_n)U_{n-1}(\nu) + \beta_1\beta_n U_{n-2}(\nu)} e^{ts} ds. \qquad (36)$$

Представление решения в виде ряда по функциям Бесселя можно получить, используя замену переменных $\nu \to z$ в знаменателе формул (35), (36). Для этого достаточно найти коэффициенты ряда

$$\sum_{l\,=\,0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+l}} \left[(\beta_1+\beta_n)\left(1-\frac{1}{z^{2n}}\right) + \beta_1\beta_2\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z^{2(n-1)}}\right)\right]^l \left(1-\frac{1}{z^{2(n+1)}}\right)^{-(l+1)}\left(1-\frac{1}{z^2}\right).$$

Вычисление коэффициентов этого ряда приводит к сумме по индексам l_0, l_1, l_2, l_3, l_4 от 0 до ∞ с коэффициентами

$$(-1)^{l_2+l_4}\frac{(l_0+l_1+l_2+l_3+l_4)!}{l_0!\,l_1!\,l_2!\,l_3!\,l_4!}\,\frac{(l_1+l_2)!\,(l_3+l_4)!}{l_1!\,l_2!\,l_3!\,l_4!}(\beta_1\beta_2)^{l_1+l_2}(\beta_1+\beta_n)^{l_3+l_4},$$

умноженной на разность $\dfrac{1}{z^{N-1}} - \dfrac{1}{z^{N+1}}$ при $N = 2(l_0+l_2+l_4)n + 2(l_0+l_1) + l_2 + l_3 + n + 1$. Учитывая числитель (35), соответствующий ряд функции $K_{n,m}(t,\beta_1,\beta_n)$, аналогично (34), будет содержать члены

$$\frac{2}{t}\Big\{(N-m)J_{2(N-m)} - (N+m)J_{2(N+m)} + \\ + \beta_1\left[(N-m-1)J_{2(N-m-1)} - (N+m-1)J_{2(N+m-1)}\right]\Big\}.$$

В выражении функции $K_{m,1}(t,\beta_1,\beta_n)$ в последнем равенстве нужно изменить индекс m на $n-m+1$ и β_1 на β_n.

6. Заключение

Начальной мотивацией для написания работы была задача, которую авторы исследовали для одномерной модели гармонического кристалла, пытаясь детально изучить переход от дискретной модели среды к её непрерывному представителю. Проблема является классической и общие знания о ней были получены многими научными предшественниками на протяжении длительного периода. При этом само время, образно говоря сохранило в модели самое необходимое: линейное обыкновенное векторное дифференциальное уравнение (1) с матрицей (6). Последняя, как хорошо известно [21], определяет разностный оператор второго порядка, спектральные свойства которого изучены очень детально. Тем не менее, в данной работе показано, что спектральные характеристики модели являются частью более общей математической ситуации, в которой первую скрипку играют полиномы Чебышёва.

Список литературы

[1] *Mathematical Physics in One Dimension. Exactly Soluble Models of Interacting Particles. A Collection of Reprints With Introductory*, ed. E. H. Lieb, D. C. Mattis, Academic Press, New York, London, 1966.

[2] Z. Rieder, J. L. Lebowitz, E. Lieb, "Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State", *J. Math. Phys*, **8**:5, (1967), 1073–1078.

[3] N. Yang, G. Zhang, B. Li, "Violation of Fourier's law and anomalous heat diffusion in silicon nanowires", *Nano Today*, **5**:2, (2010), 85–90.

[4] А. М. Кривцов, "Распространение тепла в бесконечном одномерном гармоническом кристалле", *ДАН*, **464**:2, (2015), 162-–166.

[5] C. W. Chang, D. Okawa, H. Garcia, A. Majumdar, A. Zettl, "Breakdown of Fourier's Law in Nanotube Thermal Conductors", *Phys. Rev. Lett.*, **101**:7, (2008), 075903-1–4.

[6] S. Shen, A. Henry, J. Tong, R. Zheng, G. Chen, "Polyethylene nanofibres with very high thermal conductivities", *Nature Nanotechnology*, **5**, (2010), 251–255.

[7] T. K. Hsiao, H. K. Chang, S. C. Liou, M. W. Chu, S. C. Lee, C. W. Chang, "Observation of room temperature ballistic thermal conduction persisting over 8.3μm in SiGe nanowires", *Nature Nanotechnology*, **8**, (2013), 534–538.

[8] Schrödinger, "Zur Dynamik elastisch gekoppelter Punktsysteme", *Annalen der Physik*, **349**:14, (1914), 916-934.

[9] R. E. Turner, "Motion of a heavy particle in a one dimensional chain", *Physica*, **24**:6, (1960), 269-273.

[10] N. I. Aleksandrova, "Asymptotic formulae for the Lommel and Bessel functions and their derivatives", *R. Soc. Open Sci.*, 1: 140176 `doi:10.1098/rsos.140176`.

[11] N. I. Aleksandrova, "The discrete Lamb problem: Elastic lattice waves in a block medium", *Wave Motion*, **51**:5, (2014), 818-832.

[12] Н. И. Александрова, "Асимптотическое решение антиплоской задачи для двумерной задачи", *ДАН*, **455**:1, (2014), 34-37.

[13] М. А. Гузев, Ю. Г. Израильский, М. А. Шепелов, "Молекулярно-динамические характеристики одномерной точно решаемой модели на различных масштабах", *Физическая мезомеханика*, **9**:5, (2006), 53-57.

[14] М. А. Гузев, А. А. Дмитриев, Н. А. Пермяков, “Структура остаточного напряжения в модели молекулярной динамики”, *Дальневосточный матем. журнал*, **8**:2, (2008), 152–163.

[15] М. А. Гузев, А. А. Дмитриев, “Перемежаемость спектра матрицы, имеющей блочную структуру”, *Математика в приложениях. Всероссийская конф., приуроченная к 80-ти летию акад. С.К. Годунова. 20–24 июля 2009 г. Тез. докл.*, Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, 2009, 98–99.

[16] М. А. Гузев, А. А. Дмитриев, “О решении характеристических уравнений систем, описывающих линейные модели молекулярной динамики. II”, *Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней матем. школы «Понтрягинские чтения - XX». Тез. докл.*, ВГУ, Воронеж, 2009, 42–43.

[17] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, «Наука» ГРФМЛ, Москва, 1983.

[18] Г.Ḣ. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Ч. I, ИЛ, Москва, 1949.

[19] Х. Карслоу, Д. Егер, *Операционные методы в прикладной математике*, ИЛ, Москва, 1948.

[20] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, Т. I, «Наука» ГРФМЛ, Москва, 1969.

[21] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Разностные схемы. Введение в теорию*, «Наука» ГРФМЛ, Москва, 1977.

Поступила в редакцию
5 мая 2017 г.

Guzev M. A., Dmitriev A. A. Different representations for solving one-dimensional harmonic model of a crystal. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 30–47.

ABSTRACT

One-dimensional harmonic model of an ideal crystalline system composed of particles is considered. For the potential corresponding to a pair interaction of particles with the nearest neighbors, we constructed the fundamental solution in the own basis matrix of this potential. It is shown how to write the solution using Chebyshev polynomials and Bessel functions, as well as to obtain an integral representation on the complex plane and using the Laplace transformation. The application of the results are presented for the potential matrix perturbed with respect to the diagonal elements.

Key words: *ideal lattice model, fundamental solution, Chebyshev polynomials, Bessel functions, Laplace transform.*