Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 1. С. 48–58

УДК 517.95
MSC2010 35B65, 35H10, 35Q99

© А. И. Кожанов[1], С. В. Потапова[2]

Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и знакопеременным коэффициентом

В работе исследована регулярная разрешимость задачи сопряжения (обобщенной задачи дифракции) для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и со знакопеременной функцией при старшей производной. Этот коэффициент имеет разрыв первого рода, меняет знак при переходе через точку разрыва. Методом регуляризации и методом продолжения по параметру доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений.

Ключевые слова: *уравнения с кратными характеристиками, уравнения с меняющимся направлением времени, разрывные коэффициенты, задача сопряжения, регулярные решения, существование и единственность решения.*

Введение

В прямоугольнике $Q=(-1,1)\times(0,T)$, $0<T<+\infty$, рассматриваем задачу сопряжения для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками и первой производной по времени

$$u_t + h(x)u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где функции $f(x,t)$, $c(x,t)$ определены при $(x,t)\in\overline{Q}$, функция $h(x)$ такова, что на интервале $[-1,0)$ и отрезке $[0,1]$ она непрерывна, знакоопределена, в точке $x=0$ имеет разрыв первого рода и при переходе через нее меняет знак.

Разрешимость краевых задач с локальными и нелокальными граничными условиями для подобных уравнений с непрерывными коэффициентами изучена достаточно хорошо [1–12]. В случае $h(x)=\text{const}$ уравнение (1) является линеаризованным уравнением Кортевега – де Фриза. Это уравнение играет важную роль в теории

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 8.
[2] Научно-исследовательский институт математики СВФУ, 677010, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48.
Электронная почта: kozhanov@math.nsc.ru (А. И. Кожанов), sargyp@inbox.ru (С. В. Потапова).

нелинейных волн, его исследованием занимаются с конца XIX века, и до сих пор оно является объектом исследования многих авторов. Отметим здесь работы [13–15], в которых можно найти широкий обзор исследований по данной теме.

Начально-краевые задачи и задача Коши для уравнений с кратными характеристиками высокого порядка по пространственной переменной и первой производной по времени исследовались в работах [16–19] (см. также обширную библиографию указанных работ).

Работ по исследованию разрешимости краевых задач для уравнений с кратными характеристиками в том случае, когда коэффициенты терпят разрыв, не очень много [3, 20–24]. В этих работах авторы рассматривают задачи типа задачи Жевре, т.е. такие в которых граничные условия задаются частично при $t=0$, частично при $t=T$. Такого типа задачи хорошо изучены для параболических уравнений с меняющимся направлением времени [25–30]. Эти уравнения описывают различные физические процессы такие, как рассеивание электронов [31], перенос радиации [32] и др.

В данной работе мы расширяем класс задач для уравнений с меняющимся направлением времени, задавая начальные условия только при $t=0$ на всем интервале (-1,1). При таком условии формулируем корректную постановку краевых задач для уравнения (1) и доказываем существование и единственность регулярных решений в соответствующих анизотропных пространствах Соболева.

Постановка задачи

Пусть $Q^+=\{(x,t):(x,t)\in Q,\, x>0\}$, $Q^-=\{(x,t):(x,t)\in Q,\, x<0\}$, $Q_1=Q^+\cup Q^-$.

Уточним, что функция $h(x)$ в точке $x=0$ терпит разрыв первого рода, $h(x)<0$ при $x\in[-1,0)$, $h(-0)\neq 0$, $h(x)>0$ при $x\in[0,1]$ и $h(x)\in C([-1,0))$, $h(x)\in C([0,1])$.

Краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q_1 решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются граничные условия*

$$u(x,0)=0, \qquad x\in(-1,0)\cup(0,1), \tag{2}$$

$$u(-1,t)=u_x(-1,t)=u(1,t)=u_x(1,t)=0, \qquad 0<t<T, \tag{3}$$

а также условия сопряжения

$$u(+0,t)=\alpha u(-0,t), \qquad 0<t<T, \tag{4}$$

$$u_{xx}(-0,t)=\gamma u_{xx}(+0,t), \qquad 0<t<T, \tag{5}$$

где α, γ — заданные действительные числа.

Разрешимость краевой задачи (1)–(5)

Пусть V_0 есть банахово пространство

$$V_0=\{v(x,t):\, v(x,t)\in W_2^{3,1}(Q^+), \quad v(x,t)\in W_2^{3,1}(Q^-)\}.$$

с нормой $\|v\|_{V_0}=\|v\|_{W_2^{3,1}(Q^+)}+\|v\|_{W_2^{3,1}(Q^-)}$.

Сформулируем и докажем теорему единственности для этой краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha\gamma \leqslant 0, \tag{6}$$

$$c(x,t) \geqslant 0, \quad c(x,t) \in C(\bar{Q}). \tag{7}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) *не может иметь более одного решения в пространстве* V_0.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (1)–(5) из пространства V_0. Заметим, что если $\alpha = 0$, то исходная краевая задача (1)–(5) распадается на две независимые задачи в Q^+ и Q^-. Разрешимость каждой из полученных задач в классах регулярных решений установлена. Поэтому будем считать далее, что $\alpha \neq 0$. Поскольку $h(x) \neq 0$ для всех $x \in [-1,1]$, уравнение (1) умножим на функцию $\frac{u(x,t)}{|h(x)|}$, проинтегрируем по цилиндру Q^+, затем умножим на функцию $\eta\frac{u(x,t)}{|h(x)|}$, $\eta = -\frac{\gamma}{\alpha}$, проинтегрируем по Q^- и сложим. Получим равенство

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{2|h(x)|}u^2(x,t)dx + \int\limits_{0}^{1}\frac{\eta}{2|h(x)|}u^2(x,t)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}u_x^2(-0,\tau)d\tau + \frac{\eta}{2}\int\limits_{0}^{t}u_x^2(+0,\tau)d\tau + \\
+\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{|h(x)|}c(x,\tau)u^2(x,\tau)dxd\tau + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t}\frac{\eta}{|h(x)|}c(x,\tau)u^2(x,\tau)dxd\tau - \\
-\int\limits_{0}^{t}\left[u_{xx}(-0,\tau)u(-0,\tau) + \eta u_{xx}(+0,\tau)u(+0,\tau)\right]d\tau = \\
= \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{|h(x)|}f(x,\tau)u(x,\tau)dxd\tau + \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t}\frac{\eta}{|h(x)|}f(x,\tau)u(x,\tau)dxd\tau.
\end{gathered} \tag{8}$$

Заметим, что вследствие условия (6) число η будет неотрицательным, а условия сопряжения (4) и (5) дают равенство

$$\int\limits_{0}^{t}\left[u_{xx}(-0,\tau)u(-0,\tau) + \eta u_{xx}(+0,\tau)u(+0,\tau)\right]d\tau = 0.$$

Применяя к правой части равенства (8) неравенство Юнга, лемму Гронуолла можно получить оценку, из которой вытекает единственность решения краевой задачи (1)–(5). Теорема доказана. □

Теперь сформулируем и докажем теорему существования решения для данной краевой задачи.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (6), (7), *а также пусть выполняются условия*

$$h(x) \in C^2([-1,0)), \qquad h(x) \in C^2([0,1]), \tag{9}$$

$$h'(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in [-1,0), \qquad h'(x) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1], \tag{10}$$

$$|h''(x)| \leqslant C\sqrt{|h'(x)|} \quad \text{при} \quad x \in [-1,0) \cup [0,1], \qquad C = \text{const}; \tag{11}$$

$$c(x,t) \in C^3(\bar{Q}), \qquad c_x(0,t) = c_{xx}(0,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]; \tag{12}$$

$$\begin{gathered} f(x,t) \in W_2^{3,0}(Q^+), \qquad f(x,t) \in W_2^{3,0}(Q^-), \\ f(-0,t) = \alpha f(+0,t), \qquad f_{xx}(+0,t) = \gamma f_{xx}(-0,t), \\ f(-1,t) = f_x(-1,t) = f(1,t) = f_x(1,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{13}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) *разрешима в пространстве* V_0.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$ *являющуюся в прямоугольнике* Q_1 *решением уравнения*

$$-\varepsilon u_{xxxxxxxt} + u_t + h(x)u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{14}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(5), *а также условия*

$$u_{xxx}(-1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{15}$$

$$u_{xxx}(+0,t) = \frac{h(-0)}{h(+0)}\alpha u_{xxx}(-0,t), \tag{16}$$

$$u_{xxxx}(-0,t) = u_{xxxx}(+0,t) = 0, \tag{17}$$

$$u_{xxxxx}(-0,t) = \frac{h(+0)}{h(-0)}\gamma u_{xxxxx}(+0,t). \tag{18}$$

Пусть V_1 есть линейное пространство

$$V_1 = \big\{v(x,t) : v(x,t) \in V_0,\, v_{xxxxxxxt}(x,t) \in L_2(Q^+),\, v_{xxxxxxxt}(x,t) \in L_2(Q^-)\big\}.$$

с нормой

$$\|v\|_{V_1} = \left(\|v\|^2_{V_0} + \int\limits_{Q^+} v^2_{xxxxxxxt}\, dxdt + \int\limits_{Q^-} v^2_{xxxxxxxt}\, dxdt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что регуляризованная краевая задача (14), (2)–(5), (15)–(18) при фиксированном ε разрешима в пространстве V_1 для любой функции $f(x,t) \in L_2(Q)$.

Воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть λ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в* Q_1 *решением уравнения*

$$L_\varepsilon u \equiv -\varepsilon u_{xxxxxxxt} + u_t + \lambda[c(x,t)u + h(x)u_{xxx}] = f(x,t) \tag{19}$$

и такую, что выполняются условия (2)–(5), (15)–(18).

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка [0,1], для которых краевая задача (19), (2)–(5), (15)–(18) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству V_1. Если множество Λ будет не пусто, открыто и замкнуто, то оно, как известно [33], будет совпадать со всем отрезком [0,1].

Множество Λ не пусто, поскольку число нуль принадлежит ему. Это следует из того, что при $\lambda=0$ уравнение (19) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $u_t(x,t)$, решение же этого обыкновенного дифференциального уравнения с заданными граничными условиями и условиями сопряжения нетрудно построить в явном виде. Имея же функцию $u_t(x,t)$, найти и саму функцию $u(x,t)$; принадлежность функции $u(x,t)$ требуемому классу очевидна.

Для доказательства открытости и замкнутости множества Λ достаточно показать, что для всевозможных решений $u(x,t)\in V_1$ краевой задачи (19), (2)–(5), (15)–(18) имеет место равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \leqslant N\|f\|_{L_2(Q_1)}. \tag{20}$$

Покажем, что искомая оценка действительно существует.

Рассмотрим равенство

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{t} L_\varepsilon u u_{xxxxxx}\,dx d\tau + \sigma\int_{0}^{1}\int_{0}^{t} L_\varepsilon u u_{xxxxxx}\,dx d\tau = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{t} f u_{xxxxxx}\,dx d\tau + \sigma\int_{0}^{1}\int_{0}^{t} f u_{xxxxxx}\,dx d\tau,$$

где σ — действительное число. Проинтегрируем по частям и, если выполняются условия (2), (3), (12), (15), (17), получим

$$\begin{gathered}
\frac{\varepsilon}{2}\int_{-1}^{0} u^2_{xxxxxx}(x,t)dx + \sigma\frac{\varepsilon}{2}\int_{0}^{1} u^2_{xxxxxx}(x,t)dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} u^2_{xxx}(x,t)dx + \frac{\sigma}{2}\int_{0}^{1} u^2_{xxx}(x,t)dx- \\
-\frac{\lambda h(-1)}{2}\int_{0}^{t} u^2_{xxxx}(-1,\tau)d\tau + \frac{\sigma\lambda h(1)}{2}\int_{0}^{t} u^2_{xxxx}(1,\tau)d\tau - \lambda\int_{-1}^{0}\int_{0}^{t}\frac{3h'(x)}{2}u^2_{xxxx}dxd\tau- \\
-\sigma\lambda\int_{0}^{1}\int_{0}^{t}\frac{3h'(x)}{2}u^2_{xxxx}dxd\tau + \lambda\int_{-1}^{0}\int_{0}^{t} cu^2_{xxx}dxd\tau + \lambda\sigma\int_{0}^{1}\int_{0}^{t} cu^2_{xxx}dxd\tau+ \\
+\int_{0}^{t}\left[-u_{xxxxx}(-0,\tau)u_\tau(-0,\tau) + \sigma u_{xxxxx}(+0,\tau)u_\tau(+0,\tau)\right]d\tau+ \\
+\int_{0}^{t}\left[-u_{xxx}(-0,\tau)u_{xx\tau}(-0,\tau) + \sigma u_{xxx}(+0,\tau)u_{xx\tau}(+0,\tau)\right]d\tau+ \\
+\lambda\int_{0}^{t}\Big[-h(-0)u_{xxx}(-0,\tau)u_{xxxxx}(-0,\tau) + \sigma h(+0)u_{xxx}(+0,\tau)u_{xxxxx}(+0,\tau)\Big]d\tau=
\end{gathered} \tag{21}$$

$$= \lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} h''(x) u_{xxx} u_{xxxx} dx d\tau + \lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} h''(x) u_{xxx} u_{xxxx} dx d\tau -$$

$$-\lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} c_{xxx} u u_{xxx} dx d\tau - \lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} c_{xxx} u u_{xxx} dx d\tau - 3\lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} c_{xx} u_x u_{xxx} dx d\tau -$$

$$-3\lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} c_{xx} u_x u_{xxx} dx d\tau - 3\lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} c_x u_{xx} u_{xxx} dx d\tau - 3\lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} c_x u_{xx} u_{xxx} dx d\tau -$$

$$- \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} f u_{xxxxxx} dx d\tau - \sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} f u_{xxxxxx} dx d\tau.$$

При выборе числа $\sigma = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{h(+0)}{h(-0)}$ и выполнении условий сопряжения (4), (5), (16), (18), граничные интегралы при $x = \pm 0$ в равенстве (21) в сумме будут равны нулю. Далее правую часть равенства (21) оцениваем с помощью элементарных неравенств и неравенства Юнга. Из полученного неравенства согласно лемме Гронуолла следует оценка

$$\varepsilon \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_{xxxxxx} dx d\tau + \varepsilon \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_{xxxxxx} dx d\tau +$$
$$+ \int\limits_{-1}^{0} u^2_{xxx}(x,t) dx + \int\limits_{0}^{1} u^2_{xxx}(x,t) dx \leqslant K_\varepsilon \int\limits_{Q} f^2 dx dt, \tag{22}$$

в которой положительное число K_ε определяется функциями $h(x), c(x,t)$ и числами $\varepsilon, \alpha, \gamma$.

Далее рассмотрим равенство

$$\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau + \sigma \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau = \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} f u_\tau dx d\tau + \sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} f u_\tau dx d\tau,$$

в котором произведем интегрирование по частям. При указанном выше выборе числа σ и выполнении условий (3)–(5), (15)–(18) граничные интегралы, которые возникают в результате интегрирования, будут в сумме тождественно равны нулю. Получим

$$\varepsilon \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_{xxx\tau} dx d\tau + \sigma\varepsilon \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_{xxx\tau} dx d\tau + \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_\tau dx d\tau + \sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_\tau dx d\tau =$$
$$-\lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} h(x) u_{xxx} u_\tau dx d\tau - \lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} h(x) u_{xxx} u_\tau dx d\tau - \tag{23}$$
$$-\lambda \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} c u u_\tau dx d\tau - \lambda\sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} c u u_\tau dx d\tau + \int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} f u_\tau dx d\tau + \sigma \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} f u_\tau dx d\tau.$$

Оценим интегралы в правой части равенства (23). Для оценки интегралов с функцией $c(x,t)$ применим неравенство Юнга и представление

$$u(x,\tau)=\int\limits_0^\tau u_\xi(x,\xi)d\xi,$$

получим

$$-\lambda\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_0^t cuu_\tau dxd\tau-\lambda\sigma\int\limits_0^1\int\limits_0^t cuu_\tau dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{-1}^0 u_\tau^2dxd\tau+\frac{T\max c^2(x,t)}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_{-1}^0 u_\xi^2dx\ d\xi\ d\tau+$$

$$+\frac{\sigma\delta^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_\tau^2dxd\tau+\frac{\sigma T\max c^2(x,t)}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 u_\xi^2dx\ d\xi\ d\tau.$$

Подберем δ малым и зафиксируем, например, $\delta=1$. Для оценки других интегралов в правой части равенства (23) используем неравенство Юнга. Получим

$$\varepsilon\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_{xxx\tau}^2dxd\tau+\sigma\varepsilon\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_{xxx\tau}^2dxd\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau+\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{T\max c^2(x,t)}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_{-1}^0 u_\xi^2dx\ d\xi\ d\tau+\frac{\sigma T\max c^2(x,t)}{2\delta^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\int\limits_0^1 u_\xi^2dx\ d\xi\ d\tau+\tag{24}$$

$$+M\Big(\int\limits_{Q^-}f^2dxdt+\int\limits_{Q^+}f^2dxdt+\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau+\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau\Big).$$

К этому неравенству применим лемму Гронуолла, получим оценку

$$\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau+\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau\leqslant M\Big(\int\limits_{Q_1}f^2dxdt+\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau+\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau\Big),\tag{25}$$

где положительное число M определяется функциями $h(x)$, $c(x,t)$ и числами α,β и T. Из оценок (22), (25) согласно лемме Гронуолла получим

$$\varepsilon\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_{xxxxxx}^2dxd\tau+\varepsilon\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_{xxxxxx}^2dxd\tau+\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau+$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_{xxx}^2dxd\tau+\int\limits_{-1}^0\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau+\int\limits_0^1\int\limits_0^t u_\tau^2dxd\tau\leqslant N\Big(\int\limits_{Q^-}f^2dxdt+\int\limits_{Q^+}f^2dxdt\Big).$$

Из этой оценки и из уравнения (19) следует существование равномерной по λ априорной оценки (20). Таким образом, краевая задача (19), (2)–(5), (15)–(18) при фиксированном ε имеет решение, принадлежащее пространству V_1 для любой функции $f(x,t)\in L_2(Q)$. Покажем, что для семейства решений $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ имеет место априорная оценка, равномерная по ε и такая, что с ее помощью можно будет организовать процедуру предельного перехода.

Заметим, что для семейства решений $\{u_\varepsilon(x,t)\}$ выполняется неравенство (25). Проинтегрируем по частям по переменной x два последних слагаемых правой части равенства (21). Затем применим неравенство Юнга и при выполнении условий (13) получим неравенство

$$\begin{gathered}\varepsilon\int\limits_{-1}^{0} u^2_{\varepsilon xxxxxxx}(x,t)dx+\varepsilon\int\limits_{-1}^{0} u^2_{\varepsilon xxxxxxx}(x,t)dx+\int\limits_{-1}^{0} u^2_{\varepsilon xxx}(x,t)dx+\int\limits_{0}^{1} u^2_{\varepsilon xxx}(x,t)dx\leqslant\\ \leqslant K\Bigg(\int\limits_{Q} f^2_{xxx}dxdt+\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon xxx}dxd\tau+\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon xxx}dxd\tau\Bigg),\end{gathered}\tag{26}$$

где положительное число K определяется функциями $h(x),c(x,t)$ и числами α,γ.

Следствием неравенств (25) и (26) будет априорная оценка

$$\begin{gathered}\varepsilon\int\limits_{-1}^{0} u^2_{\varepsilon xxxxxxx}(x,t)dx+\varepsilon\int\limits_{-1}^{0} u^2_{\varepsilon xxxxxxx}(x,t)dx+\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon\tau}dxd\tau+\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon\tau}dxd\tau+\\ +\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon xxx}dxd\tau+\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{t} u^2_{\varepsilon xxx}dxd\tau\leqslant N_0\Bigg(\int\limits_{Q} f^2dxdt+\int\limits_{Q} f^2_{xxx}dxdt\Bigg),\end{gathered}\tag{27}$$

постоянная N_0 в которой определяется функциями $h(x),c(x,t)$ и числами α,γ.

Из оценки (27) и свойства рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_n\}$ положительных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $n\to\infty$ выполняется $\varepsilon_n\to 0$, $u_{\varepsilon_n}(x,t)\to u(x,t)$, $u_{\varepsilon_n t}(x,t)\to u_t(x,t)$, $u_{\varepsilon_n xxx}(x,t)\to u_{xxx}(x,t)$ слабо в пространстве $L_2(Q^+\cup Q^-)$. Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ принадлежит пространству V_0, для нее в областях Q^+ и Q^- выполнено уравнение (1), а также краевые условия (2) и (3). Далее из оценок (22) и (25) следует, что для функций $u_\varepsilon(x,t)$ определены следы $u_{\varepsilon xx}(-0,t)$ и $u_{\varepsilon xx}(+0,t)$, эти следы равномерно по ε ограничены в пространстве $L_2([0,T])$ и связаны равенством (5). В пределе это равенство сохранится. Выполнение равенства (4) для предельной функции очевидно. Другими словами, функция $u(x,t)$ дает решение краевой задачи (1)–(5) из требуемого класса.

Теорема доказана. □

Комментарии и дополнения

1. Если действительные числа α,γ в условиях сопряжения (4) и (5) заменить на функции от переменной $t\in[0,T]$ – $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, то теорема единственности и тео-

рема существования решения краевой задачи (1)–(5) также будут справедливы с небольшими дополнениями.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$\alpha(t)\gamma(t) \leqslant 0, \qquad t \in [0,T], \tag{28}$$

$$c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \bar{Q}^-,$$

$$\left|\frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}\right| \leqslant \left|\frac{\gamma(0)}{\alpha(0)}\right| e^{2\int\limits_0^t c(x,\tau)d\tau} \qquad \text{при} \quad (x,t) \in \bar{Q}^+. \tag{29}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) *не может иметь более одного решения в пространстве* V_0.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (28), (29), *а также* (9)–(13). *Тогда краевая задача* (1)–(5) *разрешима в пространстве* V_0.

Доказываются эти теоремы так же, как теоремы 1 и 2 соответственно.

2. В силу того, что существует условие (10), уместно также рассмотреть аналогичную задачу сопряжения для следующего уравнения

$$h(x)u_t + u_{xxx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{30}$$

Функция $h(x)$ определяется так же, как в рассмотренной задаче (1)–(5). Тогда будут справедливы аналогичные теоремам 1 и 2 теоремы разрешимости краевой задачи для уравнения (30).

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (6), *а также*

$$c(x,t) \in C(\bar{Q}), \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{Q}^-, \quad c(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при } (x,t) \in \bar{Q}^+. \tag{31}$$

Тогда краевая задача (30), (2)–(5) *не может иметь более одного решения в пространстве* V_0.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (6), (9), (11)–(13) *и* (31), *а также пусть выполняется условие*

$$h'(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in [-1,0), \qquad h'(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in [0,1].$$

Тогда краевая задача (30), (2)–(5) *разрешима в пространстве* V_0.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2 соответственно.

Список литературы

[1] L. Cattabriga, *Annali della scuola normale Superiore di pisa e mat*, **13**:2, (1956), 163–203.

[2] L. Cattabriga, “Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a characteristiche multiple”, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, **3**, (1961), 1–45.

[3] Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1986.

[4] С. Абдиназаров, “Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Дифференциальные уравнения*, **17**, (1981), 3–12.

[5] M. Mascarello, L. Rodino, *Partial differentional equations with multiple characteristics*, Wiley, Berlin, 1997.

[6] M. Mascarello, L. Rodino, M. Tri, “Partial differentional operators with multiple symplectic characteristics”, *Partial differential equations and spectral theory*, ed. M. Demuth, B.-W. Schulze, Birkhauser, Basel, 2001, 293–297.

[7] L. Rodino, A. Oliaro, “Solvability for semilinear PDE with multiple characteristics”, *Evolution equations*, v. 60, ed. R. Picard, M. Reissig, W. Zajaczkowski, Banach Center Publ., Warsaw, 2003, 295–303.

[8] А. И. Кожанов, “О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками”, *Мат. заметки ЯГУ*, **8**:2, (2001), 27–40.

[9] A. I. Kozhanov, “Composite Type Equations and Inverse Problems”, *Utrecht, the Netherlands, VSP*, 1999.

[10] А. Р. Хашимов, А. М. Тургинов, “О некоторых нелокальных задачах для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Мат. заметки СВФУ*, **21**:1, (2014), 69–74.

[11] G. G. Doronin, N. A. Larkin, E. Tronco, “Exponential Decay of Weak Solutions for the Zakharov-Kuznetsov Equation”, *Nonclassical equations of mathematical physics. 1ed. Novosibirsk*, **446**, (2012), 5–13.

[12] А. М. Абдрахманов, А. И. Кожанов, “Задача с нелокальным граничным условием для одного класса уравнений нечетного порядка”, *Известия вузов. Математика*, **5**, (2007), 3–12.

[13] N. A. Larkin, “Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains”, *J. Math. Anal. Appl.*, **297**:2, (2004), 169–185.

[14] B. A. Bubnov, “Generalized boundary value problems for Korteweg–de Vries equation in bounded domains”, *Differential Equations*, **15**, (1979), 17–21.

[15] В. В. Хаблов, *О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега де Фриза*, Препринт Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1979.

[16] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval”, *Electronic Journal of Diff. Equations*, 2010, 1–20.

[17] A. V. Faminskii, N. A. Larkin, “Odd-order quasilinear evolution equations posed on a bounded interval”, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, **28**:1, (2010), 67–77.

[18] Sh. Cui, Sh. Tao, “Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of Kawahara equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **304**, (2005), 683–702.

[19] N. A. Larkin, “Correct initial boundary value problems for dispersive equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **344**:2, (2008), 1079–1092.

[20] С. Абдиназаров, А. Хашимов, “Краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками и разрывными коэффициентами”, *Уз. мат. журн.*, 1993, № 1, 3–12.

[21] А. Хашимов, “Об одной задаче для уравнения смешанного типа с кратными характеристиками”, *Уз. мат. журн.*, 1995, № 2, 95–97.

[22] В. И. Антипин, “Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени”, *Математические заметки ЯГУ*, **18**:1, (2011), 8–15.

[23] В. И. Антипин, “Разрешимость краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений смешанного типа”, *Сибирский математический журнал*, **54**:2, (2013), 245–257.

[24] S. G. Pyatkov, S. Popov, V. I. Antipin, “On solvability of boundary value problem for kinetic

operator-differential equations", *Integral Equation and Operator Theory*, **80**:4, (2014), 557–580.

[25] M. Gevrey, "Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique", *J. Math. Appl.*, **9**:6, (1913), 305–478.

[26] Н. А. Ларькин, В. А. Новиков, Н. Н. Яненко, *Нелинейные уравнения переменного типа*, Наука, Новосибирск, 1983.

[27] С. А. Терсенов, *Параболические уравнения с меняющимся направлением времени*, Наука, Новосибирск, 1985.

[28] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально–операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.

[29] Н. В. Кислов, И. С. Пулькин, "О существовании и единственности слабого решения задачи Жевре с обобщенными условиями склейки", *Вестник МЭИ*, 2002, № 6, 88–92.

[30] И. М. Петрушко, Е. В. Черных, "О параболических уравнениях 2-го порядка с меняющимся направлением времени", *Вестник МЭИ*, 2003, № 6, 85–93.

[31] R. Beals, "On an equations of mixed type from electron scattering", *J. Math. Anal. Appl.*, **568**:1, (1977), 32–45.

[32] C. E. Siewert and P. E. Zweifel, "Radiative transfer, II", *J. Math. Phys.*, **7**, (1966), 2092–2102.

[33] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

[34] S. V. Potapova, "Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction", *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, **3**:1, (2012), 75–91.

Поступила в редакцию
19 январь 2016 г.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-00582). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-31-50077\15).

Kozhanov A. I., Potapova S. V. Boundary value problem for third order equation with multiple characteristics and alternating function on the highest derivative. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 48–58.

ABSTRACT

In this paper we investigated the regular solvability of conjugate problem (generalized diffraction problem) for third order equation with multiple characteristics and alternating function on the highest derivative. This function has a discontinuity of the first kind and changes sign when passing the point of discontinuity. The existence and uniqueness of regular solutions are proved by the regularization and continuation methods.

Key words: *equations with multiple characteristics, equations with changing time direction, discontinuous coefficients, conjugate problem, regular solutions, existence and uniqueness.*