УДК 517.956+519.633.6+519.633.6
MSC2010 35Q74, 35Q79

© Е. П. Суляндзига[1]

О разрешимости краевой задачи для системы уравнений термоупругости в пространстве

В работе предложена и обоснована краевая задача для линеаризованной трёхмерной системы уравнений термоупругости, описывающей деформацию твердого тела с учетом его температуры. Доказано существование слабых решений.

Ключевые слова: *Постановка краевой задачи, система термоупругости, существование решения, оценки приближенных решений, температурное расширение.*

Введение

Изучается система уравнений термоупругости, связывающая механические процессы с тепловыми [1]. Интерес к задаче термоупругости возник у А.И. Кондратьева в связи с его исследованиями по акустическим методам неразрушающего контроля. Так, при ультразвуковом исследовании твердого тела оптическими методами часть излучения поглощается веществом и возникают термоупругие напряжения, что приводит к ультразвуковым колебаниям [2].

Взаимное влияние полей деформаций и температур приводит к различным эффектам: пьезокалористическим — возникновению тепла вследствие наличия поля механических напряжений, либо обратному эффекту — возникновению напряжений вследствие резкого локального изменения температуры [3]. Мы используем систему выведенную в [4] для $\tau_r = 0$ и в [5] для $\tau_r > 0$ (стр. 40) при описании высокоинтенсивных температурных процессов.

$$\rho U_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda div\vec{U} + 2\mu\frac{\partial U}{\partial x} - \gamma\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] + \rho f_x,$$

[1] Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680000, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47. Электронная почта: tanod0308@rambler.ru

$$\rho V_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda div\vec{U} + 2\mu\frac{\partial V}{\partial y} - \gamma T\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\right] + \rho f_y,$$
$$\rho W_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda div\vec{U} + 2\mu\frac{\partial W}{\partial z} - \gamma T\right] + \rho f_z,$$
$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) + \gamma T\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}) = \mathrm{div}(k \text{ grad } T),$$

где $\vec{U} = (U,V,W)$ — неизвестный вектор перемещений, λ, μ — постоянные Ламе, $\mu > 0$, $\lambda + \mu > 0$, ρ, k, c, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ — заданные положительные постоянные (α_t — коэффициент теплового расширения), τ_r — время релаксации, T — температура тела, (f_x, f_y, f_z) — заданный вектор внешних сил.

В [6] предложены три корректные краевые задачи в ограниченной области для линеаризованного варианта этой системы при $\tau_r = 0$ в случае одномерного процесса $\vec{U} = (0,0,W)$ и доказаны теоремы разрешимости, единственности в различных классах функций. В [7] и [8] приведены линеаризованные системы и для одномерного варианта методом преобразования Лапласа получено точное решение задачи в полуполосе, приведены численные результаты и дополнительная библиография.

Здесь будет обоснована разрешимость аналога первой из рассмотренных в [6] задач. Обоснование корректности краевых задач для многомерного случая такой системы в литературе отсутствует.

1. Постановка задачи

Указанную выше систему уравнений, рассматриваемую в области $Q_T = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^3$, запишем в более удобном для дальнейших целей виде:

$$\rho U_{tt} = \mu\triangle U + (\lambda + \mu)(U_{xx} + V_{xy} + W_{xz}) - \gamma T_x + \rho f_x,$$
$$\rho V_{tt} = \mu\triangle V + (\lambda + \mu)(U_{xy} + V_{yy} + W_{zy}) - \gamma T_y + \rho f_y,$$
$$\rho W_{tt} = \mu\triangle W + (\lambda + \mu)(U_{xz} + V_{yz} + W_{zz}) - \gamma T_z + \rho f_z,$$
$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \tau_r\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}\right) + \gamma T\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}) = \mathrm{div}(k \text{ grad } T).$$

Как и в [6], считаем, что $\tau_r = 0$, и вводим отклонение θ температуры T от начального заданного состояния T_0 (до деформации): $\theta = T - T_0(x,y,z)$. Тогда система преобразуется к виду

$$\rho U_{tt} = \mu\triangle U + (\lambda + \mu)(U_{xx} + V_{xy} + W_{xz}) - \gamma\theta_x - \gamma T_{0_x} + \rho f_x,$$
$$\rho V_{tt} = \mu\triangle V + (\lambda + \mu)(U_{xy} + V_{yy} + W_{zy}) - \gamma\theta_y - \gamma T_{0_y} + \rho f_y,$$
$$\rho W_{tt} = \mu\triangle W + (\lambda + \mu)(U_{xz} + V_{yz} + W_{zz}) - \gamma\theta_z - \gamma T_{0_z} + \rho f_z,$$
$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t} + \gamma\theta\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}) = \mathrm{div}(k \text{ grad } \theta) - \gamma T_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}) + \mathrm{div}(k \text{ grad } T_0).$$

Проведем линеаризацию, как в [6], считая, что коэффициент при $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\vec{U}$, то есть $-\gamma(\theta + T_0) = h(t,x,y,z)$, есть заданная функция. Последнее будет приближенно выполнено, например, если промежуток t — достаточно мал.

После предложенной линеаризации получим систему

$$\begin{cases} \rho U_{tt} = \mu \triangle U + (\lambda+\mu)(U_{xx}+V_{xy}+W_{xz}) - \gamma\theta_x + f_1(t,x,y,z), \\ \rho V_{tt} = \mu \triangle V + (\lambda+\mu)(U_{xy}+V_{yy}+W_{zy}) - \gamma\theta_y + f_2, \\ \rho W_{tt} = \mu \triangle W + (\lambda+\mu)(U_{xz}+V_{yz}+W_{zz}) - \gamma\theta_z + f_3, \\ c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t} = \mathrm{div}(k \ \mathrm{grad}\ \theta) + h\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}) + \mathrm{g}(x,y,z), \end{cases} \tag{1}$$

которая будет исследоваться в этой работе в ограниченной области $Q_T = \Omega\times(0,T)$. Систему (1) дополним заданными при $t=0$ начальными условиями

$$\begin{cases} \vec{U}(0,x,y,z) = \vec{U}_0(x,y,z), \\ \vec{U}_t(0,x,y,z) = \vec{U}_1(x,y,z), \quad (x,y,z)\in\Omega, \\ \theta(0,x,y,z) = \theta_0(x,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Предполагая, что $\vec{U}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(\Omega)$, $\vec{U}_1,\ \theta_0 \in L_2(\Omega)$, рассмотрим однородную краевую задачу

$$\vec{U}|_S = 0, \quad \theta|_S = 0, \ \text{где } S = (0,T)\times\partial\Omega. \tag{3}$$

Общий случай неоднородной задачи заменой неизвестных функций сводится к этому случаю.

Для упрощения изложения мы предполагаем, что $\Omega\subset R^3$ — ограниченная область с границей класса C^1. Однако, как нетрудно увидеть из дальнейшего изложения, в силу однородности условий (3), на $\partial\Omega$ можно не накладывать никаких ограничений.

2. Построение приближённых решений

Пусть $\{\omega_j\}$ — ортогональный базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, состоящий из функций, принадлежащих $W_2^2(\Omega)$. Далее считаем его ортонормированным в $L_2(\Omega)$.

Такой базис, независимо от гладкости границы, можно, например, построить следующим образом. Зафиксируем натуральное s и определим $\{\omega_j\}$ как последовательность решений спектральной задачи:

$$(\omega_j, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega)} = \lambda_j(\omega_j, v)_{L_2(\Omega)} \ \ \text{для любого } v \text{ из } \overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega),$$

где λ_j — соответствующие функциям ω_j собственные значения задачи. Известно, что $\{\omega_j\}$ — ортогональный базис в $L_2(\Omega)$ и в $\overset{\circ}{W}{}_2^s(\Omega)$. Параметр s можно взять любым и подобрать его так, чтобы добиться нужной гладкости ω_j, [9] стр. 87. Далее считаем $s\geqslant 1$ натуральным.

Приближенное решение будем искать в виде

$$\vec{U}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{a}_j^{\,n}(t)\omega_j,$$

$$\theta_n = \sum_{j=1}^{n} c_j^n(t)\omega_j.$$

А начальные условия, то есть значения $\vec{a}_j^n(0)$ и $c_j^n(0)$, определим так, чтобы

$$\vec{a}_j^n(0) = \vec{a}_j \overset{\text{опр}}{=} \int\limits_\Omega \vec{U}_0\ \omega_j\ d\Omega, \qquad \frac{\partial \vec{a}_j^n}{\partial t}(0) = \vec{a}_j^1 \overset{\text{опр}}{=} \int\limits_\Omega \vec{U}_1\ \omega_j\ d\Omega, \tag{2'}$$

$$c_j^n(0) = c_j \overset{\text{опр}}{=} \int\limits_\Omega \theta_0\ \omega_j\ d\Omega.$$

Тогда, из способа построения ω_j и условий $\vec{U}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\vec{U}_1$, $\theta_0 \in L_2(\Omega)$, получим при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \vec{U}^n(0,x,y,z) &= \sum_{j=1}^n \vec{a}_j\omega_j \to \vec{U}_0 \text{ в } \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \\ \nabla\vec{U}^n(0,x,y,z) &= \sum_{j=1}^n \vec{a}_j\nabla\omega_j \to \nabla\vec{U}_0 \text{ в } L_2(\Omega), \\ U_t^n(0,x,y,z) &= \sum_{j=1}^n \vec{a}_j^1\omega_j \to \vec{U}_1 \text{ в } L_2(\Omega), \\ \theta^n(0,x,y,z) &= \sum_{j=1}^n c_j\omega_j \to \theta_0 \text{ в } L_2(\Omega). \end{aligned} \tag{4}$$

По тем же основаниям, в силу требования $\vec{U}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, получим

$$\operatorname{div}\, \vec{U}^n(0,x,y,z) \to \operatorname{div}\, \vec{U}_0 \text{ в } L_2(\Omega). \tag{4'}$$

Коэффициенты $\vec{a}_j^n(t)$, $c_j^n(t)$ при $t>0$ найдем исходя из требования ортогональности в $L_2(\Omega)$ невязки первым n функциями ω_j:

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \big[\rho U_{tt}^n - \mu\Delta\ U^n - (\lambda+\mu)(U_{xx}^n + V_{xy}^n + W_{xz}^n) + \gamma\theta_x^n - f_1\big]\omega_j\ d\Omega = 0, \quad j=1,\dots,n, \\ \int\limits_\Omega \big[\rho V_{tt}^n - \mu\Delta\ V^n - (\lambda+\mu)(U_{xy}^n + V_{yy}^n + W_{yz}^n) + \gamma\theta_y^n - f_2\big]\omega_j\ d\Omega = 0, \quad j=1,\dots,n, \\ \int\limits_\Omega \big[\rho W_{tt}^n - \mu\Delta\ W^n - (\lambda+\mu)(U_{xz}^n + V_{yz}^n + W_{zz}^n) + \gamma\theta_z^n - f_3\big]\omega_j\ d\Omega = 0, \quad j=1,\dots,n, \\ \int\limits_\Omega \left[c\rho\frac{\partial\theta^n}{\partial t} - \operatorname{div}\ (k\nabla\theta^n) - h\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\ \vec{U}^n) - \mathrm{g}\right]\omega_j d\Omega = 0, \quad j = 1,\dots,n. \end{gathered} \tag{5}$$

Для начала предположим, что функции f_1, f_2 и $f_3 \in C([0,T];L_2(\Omega))$, $h \in C([0,T];W_4^1(\Omega))$. А затем увидим, что результаты будут справедливы и для случая, когда $f_j \in L_2(Q)$, а $h \in L_\infty(0,T;W_4^1(\Omega))$. При этом предположении система (5) относительно $c_j^n(t)$ и $\vec{a}_j^n(t)$ есть система ОДУ, разрешенных относительно старших производных с непрерывными коэффициентами. В силу линейности системы она имеет на всем заданном промежутке $[0,T]$ (единственное) решение задачи Коши с условиями $(2')$, в классе: $\vec{a}_j^n \in C^2[0,T]$, $c_j \in C^1[0,T]$.

3. Обоснование равномерных оценок

Получим равномерные оценки приближенного решения. Умножим первое, второе и третье уравнения в (5) на первую, вторую и третью компоненты вектора $\frac{\partial \vec{a}_j^n}{\partial t}$ соответственно, просуммируем эти уравнения по j от 1 до n, а затем сложим эти три соотношения.

Четвертое уравнение в (5) умножим на c_j^n и просуммируем по j от 1 до n. Используя интегрирование по частям и понимая в нужных местах скалярные произведения векторов, в результате получим:

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega \Big[\rho \vec{U}_{tt}^n \vec{U}_t^n + \mu \nabla \vec{U}^n \nabla \vec{U}_t^n + (\lambda+\mu)\Big(\mathrm{div}\vec{U}^n\Big)\Big(\mathrm{div}\vec{U}_t^n\Big) + \gamma(\theta_x^n U_t^n + \theta_y^n V_t^n + \theta_z^n W_t^n)\Big]\, d\Omega = \\ = \int\limits_\Omega (f_1 U_t^n + f_2 V_t^n + f_3 W_t^n) d\Omega, \\ \int\limits_\Omega \Big[c\rho\theta_t^n\theta^n + k(\nabla\theta^n\nabla\theta^n) - h(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\ \vec{U}^n)\theta^n\Big]\, d\Omega = \int\limits_\Omega \mathrm{g}\theta^n d\Omega. \end{cases}$$

В предыдущих и некоторых последующих неравенствах граничные интегралы отсутствуют в силу того, что компоненты вектора $\vec{U}^n$ и функция θ^n принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ для всех $t \geqslant 0$.

Поэтому из первого соотношения получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega \left[\rho\left|\vec{U}_t^n\right|^2 + \mu\left|\nabla\vec{U}^n\right|^2 + (\lambda+\mu)\left|\mathrm{div}\ \vec{U}^n\right|^2\right] d\Omega = \int\limits_\Omega \left[-\gamma\nabla\theta^n\cdot\vec{U}_t^n + \vec{F}\vec{U}_t^n\right] d\Omega \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\gamma^2\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\, d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\vec{F}\right|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \vec{U}_t^{n^2}\, d\Omega = \varepsilon\gamma^2\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\, d\Omega +$$
$$+(c(\varepsilon)+\frac{1}{2})\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left|\vec{F}\right|^2 d\Omega,$$

где $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$, $\vec{U}^n = (U^n, V^n, W^n)$. Здесь и в дальнейшем мы используем неравенство Коши с ε:

$$\int\limits_\Omega uv d\Omega \leqslant \varepsilon\int\limits_\Omega u^2 d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega v^2 d\Omega,\ c(\varepsilon) = \frac{1}{4\varepsilon}.$$

Воспользуемся мультипликативным неравенством

$$\left(\int\limits_\Omega |u|^4 d\Omega\right)^{\frac{1}{4}} \leqslant c\|u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{4}}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{3}{4}}, \quad \Omega\subset R^3,\ c = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{8}},$$

см. [10], стр. 20, и оценкой

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_1\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}, \quad c_1\ \text{— диаметр области}\ \Omega,$$

для функций u из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Тогда для соотношения, связанного с θ^n, получим цепочку неравенств и оценку:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\Omega c\rho|\theta^n|^2\,d\Omega + k\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\,d\Omega = \int\limits_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{div}\vec{U}^n)\theta^n h + \mathrm{g}\theta^n\right]\,d\Omega =$$

$$= -\int\limits_\Omega \vec{U}_t^n\nabla\theta^n h\,d\Omega - \int\limits_\Omega \vec{U}_t^n\nabla h\theta^n\,d\Omega + \int\limits_\Omega \mathrm{g}\theta^n\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\right)^{1/2}\left[\left(\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2 h^2 d\Omega\right)^{1/2} + \left(\int\limits_\Omega |\nabla h|^2\,\theta_n^2 d\Omega\right)^{1/2}\right] + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2 d\Omega + \varepsilon\int\limits_\Omega |\theta^n|^2 d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\right)^{1/2}\left[||h||_{L_\infty}\left(\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\,d\Omega\right)^{1/2} + \left(\int\limits_\Omega |\nabla h|^4\,d\Omega\right)^{1/4}\left(\int\limits_\Omega |\theta^n|^4\,d\Omega\right)^{1/4}\right] +$$

$$+c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2\,d\Omega + \varepsilon\int\limits_\Omega |\theta^n|^2\,d\Omega \leqslant ||h||_{L_\infty}\left[\varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\,d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega\right] +$$

$$+||\nabla h||_{L_4(\Omega)}\cdot c||\theta^n||^{1/4}_{L_2(\Omega)}||\nabla\theta^n||^{3/4}_{L_2(\Omega)}\left(\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\right)^{1/2} + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2\,d\Omega + \varepsilon\int\limits_\Omega |\theta^n|^2\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant ||h||_{L_\infty(\Omega)}\left[\varepsilon\int\limits_\Omega |\nabla\theta^n|^2\,d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega\right] +$$

$$+||\nabla h||_{L_4(\Omega)}\cdot c||\nabla\theta^n||_{L_2(\Omega)}\sqrt[4]{c_1}\left(\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega\right)^{1/2} + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2\,d\Omega + \varepsilon\int\limits_\Omega |\theta^n|^2\,d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant ||\nabla h||_{L_4(\Omega)}\left(\varepsilon c^2\sqrt{c_1}||\nabla\theta^n||^2_{L_2(\Omega)} + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega |U_t^n|^2\,d\Omega\right) +$$

$$+\varepsilon||h||_{L_\infty(\Omega)}||\nabla\theta^n||^2_{L_2(\Omega)} + ||h||_{L_\infty(\Omega)}c(\varepsilon)\int\limits_\Omega |U_t^n|^2\,d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2\,d\Omega + \varepsilon\int\limits_\Omega |\theta^n|^2\,d\Omega =$$

$$= \varepsilon\left(||\nabla h||_{L_4(\Omega)}c^2\sqrt{c_1} + ||h||_{L_\infty(\Omega)} + c_1^2\right)||\nabla\theta^n||^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\left(||\nabla h||_{L_4(\Omega)} + ||h||_{L_\infty(\Omega)}\right)c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega + c(\varepsilon)\int\limits_\Omega \mathrm{g}^2\,d\Omega.$$

Здесь $c = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{8}}$, а c_1 — диаметр области Ω.

Сложим неравенства для $\vec{U}^n$ и θ^n. Используя предположение, что $h \in L_\infty(0,T;W_4^1(\Omega))$, постоянную $\varepsilon > 0$ можно выбрать (что и сделаем) так, чтобы было выполнено неравенство $m = k - \varepsilon\left(\gamma^2 + c_1^2 + c^2\sqrt{c_1}||\nabla h||_{L_\infty(0,T;W_4^1(\Omega))} + ||h||_{L_\infty(Q_T)}\right) > 0$.

Тогда, интегрируя полученную сумму от 0 до t, выведем неравенство:

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega}\left(\rho\left|\vec{U}_t^n(t,\vec{x})\right|^2+\mu\left|\nabla\vec{U}^n(t,\vec{x})\right|^2+(\lambda+\mu)\left|\mathrm{div}\vec{U}^n(t,\vec{x})\right|^2\right)d\Omega+\\
+\int\limits_{\Omega}c\rho|\theta^n|^2d\Omega+2m\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|\nabla\theta^n(\tau,\vec{x})|^2\,d\Omega d\tau\leqslant\\
\leqslant\left[2c(\varepsilon)+1+2c(\varepsilon)\left(||\nabla h||_{L_\infty(0,T;L_4(\Omega))}+||h||_{L_\infty(Q_T)}\right)\right]\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega\,d\tau+\\
+\int\limits_{Q_T}\left|\vec{F}\right|^2\,d\Omega\,d\tau+2c(\varepsilon)\int\limits_{Q_T}\mathrm{g}^2\,d\Omega\,d\tau+\\
+\int\limits_{\Omega}\left(\rho\left|\vec{U}_t^n(0,\vec{x})\right|^2+\mu\left|\nabla\vec{U}^n(0,\vec{x})\right|^2+(\lambda+\mu)\left|\mathrm{div}\vec{U}(0,\vec{x})\right|^2+c\rho\left|\theta^n(0,\vec{x})\right|^2\right)d\Omega=\\
=m_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n\right|^2\,d\Omega\,d\tau+m_2,
\end{gathered}\tag{6}$$

где $\vec{x}=(x,y,z)$, $m_1=m_1\left(\|h\|_{L_\infty(Q_T)}+\|\nabla h\|_{L_\infty(0,T;L_4(\Omega))}\right)$ и

$$m_2=m_2\left(\|\vec{F}\|_{L_2(Q_T)},\|\mathrm{g}\|_{L_2(Q_T)},\|\vec{U}_0\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)},\|\theta_0\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Используя из последнего неравенства оценку

$$\rho\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n(t,\vec{x})\right|^2\,d\Omega\leqslant m_1\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n(\tau,\vec{x})\right|^2\,d\Omega\,d\tau+m_2$$

и неравенство Гронуолла, получим существование постоянной m_3, для которой равномерно по n и по t

$$\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n(t,\vec{x})\right|^2\,d\Omega\leqslant\frac{m_2}{\rho}\exp\left(\frac{m_1T}{\rho}\right)=m_3.$$

Возвращаясь с этой равномерной оценкой к (6), выводим следующие равномерные оценки по n.

$$\begin{gathered}
||\vec{U}_t^n||^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant m_3,\\
\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\left|\vec{U}_t^n(\tau,\vec{x})\right|^2\,d\Omega\,d\tau\leqslant\frac{m_2}{m_1}\left(\exp\left(\frac{m_1T}{\rho}\right)-1\right)=m_4\\
||\nabla\vec{U}^n||^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant\frac{m_5}{\mu},\ \|div\,\vec{U}^n\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant\frac{m_5}{\lambda+\mu},
\end{gathered}\tag{7}$$

$$||\theta^n||^2_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant \frac{m_5}{c\varrho}, \ ||\nabla\theta^n||^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \leqslant \frac{m_5}{2m}.$$

Здесь $m_1 m_4 + m_2 = m_5$.

Замечание 1. Под $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ подразумевается пространство, полученное замыканием множества $\overset{\circ}{C}{}^\infty(\Omega)$ по норме $W^1_2(\Omega)$. Поэтому, о гладкости границ не делается никаких предположений, а интегралы по границе не появляются в силу стандартного предельного перехода.

Замечание 2. Оценки (7) и приближённое решение $\vec{U}^n \in C^2(0,T;W^1_2(\Omega))$, $\theta^n \in C^1(0,T;W^1_2(\Omega))$ были получены, когда мы предположили, что $\vec{F} \in C(0,T;L_2(\Omega))$, $\mathrm{g} \in C(0,T;L_2(\Omega))$, $h \in C(0,T;W^1_4(\Omega))$. Взяв теперь $\vec{F}, \mathrm{g} \in L_2(Q_T)$, $h \in L_\infty(0,T;W^1_4(\Omega))$ и приблизив их в нормах указанных пространств функциями $\vec{F}_s, \mathrm{g}_s, h_s$ гладкими по t, получим последовательность решений $\vec{U}^{n,s}, \theta^{n,s}$, для которых справедлива оценка (7). Но правые части в (7) зависят только от норм $\vec{F}_s, \mathrm{g}_s$ в $L_2(Q_T)$, нормы h_s в $L_\infty(Q_T)$ и нормы ∇h в пространстве $L_\infty(0,T;L_4(\Omega))$. (Для липшицевых областей, в силу того, что $W^1_4(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, можно было бы оставить только последнюю норму.) Поэтому, переходя к пределу при $s \to \infty$, получим решения $\vec{U}^n, \theta^n$ из класса функций левой части оценки (7). При этом константы правых частей (7) останутся без изменения.

Замечание 3. В дальнейшем предполагается рассмотреть нелинейную систему без линеаризации. Поэтому на функцию h стремимся наложить минимальные ограничения гладкости.

4. Предельный переход. Основной результат

Покажем теперь, что из полученных равномерных оценок следует существование решения задачи (1)–(3) из класса

$$\begin{gathered}\vec{U} \in L_\infty(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)) \cap W^1_2(Q_T),\\ \vec{U}_t \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),\\ \theta \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)) \cap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),\end{gathered} \tag{8}$$

удовлетворяющее начальным условиям и уравнениям системы в смысле стандартных интегральных тождеств, указанных ниже.

Умножим левые и правые части первых трех равенств на $\alpha^k_{ij} b_i(t)$, $k{=}1,2,3$, а в четвертом на $\beta_{ij} b_i(t)$, где $\{b_i(t)\}$ — базис из гладких функций в пространстве $W^1_2(0,T)$ таких, что $b_i(T) = 0$, а α_{ij}, β_{ij} — произвольные постоянные. Затем, просуммируем по i и j от 1 до $N \leqslant n$ и проинтегрируем по t от 0 до T. Используя интегрирование по частям, получим

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho U_t^n F_{1t}^N(t,\vec{x})d\Omega dt-\int\limits_\Omega \rho U_t^n(0,\vec{x})F_1^N(0,\vec{x})d\Omega+\\
+(\lambda+\mu)\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \vec{U}_x^n\nabla F_1^N+\mu\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla U^n\nabla F_1^N d\Omega dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\gamma\theta_x^n-f_1)F_1^N d\Omega dt=0,\\
-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho V_t^n F_{2t}^N d\Omega dt-\int\limits_\Omega \rho V_t^n(0,\vec{x})F_2^N(0,\vec{x})d\Omega+(\lambda+\mu)\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \vec{U}_y^n\nabla F_2^N d\Omega dt+\\
+\mu\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla V^n\nabla F_2^N d\Omega dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\gamma\theta_y^n-f_2)F_2^N d\Omega dt=0,\\
-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \rho W_t^n F_{3t}^N d\Omega dt-\int\limits_\Omega \rho W_t^n(0,\vec{x})F_3^N(0,\vec{x})d\Omega+(\lambda+\mu)\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \vec{U}_z^n\nabla F_3^N d\Omega dt+\\
+\mu\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \nabla W^n\nabla F_3^N d\Omega dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\gamma\theta_z^n-f_3)F_3^N d\Omega dt=0,\\
-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega c\rho\theta^n\tilde{F}_t^N d\Omega dt-\int\limits_\Omega c\rho\theta^n(0,\vec{x})\tilde{F}^N(0,\vec{x})d\Omega+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega k\nabla\theta^n\nabla\tilde{F}^N d\Omega dt+\\
+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega h\vec{U}_t^n\nabla\tilde{F}^N d\Omega dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \vec{U}_t^n\nabla h\tilde{F}^N d\Omega dt-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \mathrm{g}\tilde{F}^N d\Omega dt=0,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{gathered}
F_k^N=\sum_{i,j=1}^N \alpha_{ij}^k b_i(t)\omega_j(\vec{x}),\quad k=1,2,3;\\
\tilde{F}^N=\sum_{i,j=1}^N \beta_{ij}b_i(t)\omega_j(\vec{x}),\quad N\leqslant n;\\
\vec{F}^N=(F_1^N,F_2^N,F_3^N).
\end{gathered}
$$

Из (7) следует, что можно выделить подпоследовательность $(\vec{U}^{n_s},\theta^{n_s})$ такую, что

$$
\begin{gathered}
\vec{U}^{n_s}\to\vec{U},\quad \vec{U}_t^{n_s}\to\vec{U}_t,\quad \theta^{n_s}\to\theta;\\
\vec{U}_x^{n_s}\to\vec{U}_x,\quad \vec{U}_y^{n_s}\to\vec{U}_y,\quad \vec{U}_z^{n_s}\to\vec{U}_z;\\
\nabla U^{n_s}\to\nabla U,\quad \nabla V^{n_s}\to\nabla V,\quad \nabla W^{n_s}\to\nabla W;
\end{gathered}
$$

$*$-слабо в $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$ и $\nabla\theta^{n_s}\to\nabla\theta$ слабо в $L_2(Q)$ для некоторых функций $\vec{U}= =(U,V,W)$ и θ из класса (8). Тогда, используя сходимость из (9), (4′) и (4), получим тождества

$$
\begin{gathered}
-\int\limits_{Q_T} \rho U_t F_{1t}^N d\Omega dt - \int\limits_{\Omega} \rho U_1 F_1^N(0,\vec{x}) d\Omega + (\lambda+\mu) \int\limits_{Q_T} \vec{U}_x \nabla F_1^N dQ + \\
+\mu \int\limits_{Q_T} \nabla U \nabla F_1^N dQ + \int\limits_{Q_T} (\gamma\theta_x - f_1) F_1^N dQ = 0, \\
-\int\limits_{Q_T} \rho V_t F_{2t}^N d\Omega dt - \int\limits_{\Omega} \rho V_1 F_2^N(0,\vec{x}) d\Omega + (\lambda+\mu) \int\limits_{Q_T} \vec{U}_y \nabla F_2^N dQ + \\
+\mu \int\limits_{Q_T} \nabla V \nabla F_2^N dQ + \int\limits_{Q_T} (\gamma\theta_y - f_2) F_2^N dQ = 0, \\
-\int\limits_{Q_T} \rho W_t F_{3t}^N d\Omega dt - \int\limits_{\Omega} \rho W_1 F_3^N(0,\vec{x}) d\Omega + (\lambda+\mu) \int\limits_{Q_T} \vec{U}_z \nabla F_3^N dQ + \\
+\mu \int\limits_{Q_T} \nabla W \nabla F_3^N dQ + \int\limits_{Q_T} (\gamma\theta_z - f_3) F_3^N dQ = 0, \\
-\int\limits_{Q_T} c\rho\theta \tilde{F_t^N} dQ - \int\limits_{\Omega} c\rho\theta_0 \tilde{F}^N(0,\vec{x}) d\Omega + \int\limits_{\Omega} k\nabla\theta\nabla \tilde{F^N} dQ + \int\limits_{Q_T} h\vec{U}_t \nabla \tilde{F^N} dQ + \\
+\int\limits_{Q_T} \vec{U}_t \nabla h \tilde{F^N} dQ - \int\limits_{Q_T} \mathrm{g} \tilde{F^N} dQ = 0.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Здесь $(U_1,V_1,W_1)=\vec{U}_1(x,y,z)$ из условия (2). Кроме того, мы воспользовались тем фактом, что по построению $\vec{U}^n(0,x,y,z)$, $\theta^n(0,x,y,z)$ выполнены условия (4).

Теперь, используя произвольность постоянных α_{ij}^k, β_{ij} и базисность системы функций $\{b_i(t)\omega_j\}\, i,j=1,...,\infty$, можем считать, что в тождестве (10) вместо F_k^N, $\tilde{F^N}$ стоят произвольные функции $F_k(t,x,y,z)$, $k=1,2,3$, и F из класса

$$
W_2^2(Q) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \tag{11}
$$

удовлетворяющие условию $F_k(T,x,y,z)=0$, $k=1,2,3$, $\tilde{F}(T,x,y,z)=0$.

Теперь можно сформулировать точное определение решения задачи.

Определение 1. Под решением задачи (1)–(3) будем понимать пару функций $\vec{U}(t,x,y,z)$, $\theta(t,x,y,z)$ из класса (8), удовлетворяющих интегральному тождеству для любых функций $\vec{F}$, $\tilde{F}$ из класса (11).

Итогом наших рассуждений является теорема.

Теорема. *Пусть Ω — произвольная ограниченная область в R^3. Если выполнены включения $\vec{F}=(f_1,f_2,f_3)\in L_2(Q_T)$, $h\in L_\infty(Q_T)$, $\nabla h\in L_\infty(0,T;L_4(\Omega))$, $\mathrm{g}\in L_2(Q_T)$, $\vec{U}_1,\theta_0\in L_2(Q_T)$, $\vec{U}_0\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то задача (1)–(3) имеет решение из класса (8) в смысле Определения 1.*

Доказательство существования проведено выше при получении (10) и затем предельного перехода по N. Отметим только, что интегралы, связанные с h, имеют смысл. Действительно, в силу того, что выполнены неравенства теоремы вложения, а $\vec{U}_t$ принадлежности к пространству $L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, получим ограниченность этих интегралов.

Для первого интеграла:

$$\left|\int_0^T \int_\Omega h\vec{U}_t \nabla \tilde{F} d\Omega dt\right| \leqslant \int_0^T \left(\int_\Omega |\vec{U}_t|^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega h^2 |\nabla \tilde{F}|^2 d\Omega\right)^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \|U_t\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \int_0^T \left(\int_\Omega h^4 d\Omega\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\nabla \tilde{F}|^4 d\Omega\right)^{1/4} dt \leqslant$$

$$\leqslant c \left(\int_0^T \left(\int_\Omega h^4 d\Omega\right)^{1/2} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla \tilde{F}|^4 d\Omega\right)^{1/2} dt\right)^{1/2} =$$

$$c\|h\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|\nabla \tilde{F}\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}.$$

Для второго интеграла, связанного с h получим:

$$\int_0^T \int_\Omega \vec{U}_t \nabla h \tilde{F} d\Omega dt \leqslant \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla h|^2 \tilde{F}^2 d\Omega\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\vec{U}_t|^2 d\Omega\right)^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{U}_t\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla h|^4 d\Omega\right)^{1/4} \left(\int_\Omega |\tilde{F}|^4 d\Omega\right)^{1/4} dt \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{U}_t\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))} \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla h|^4 d\Omega\right)^{1/2} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |\tilde{F}|^4 d\Omega\right)^{1/2} dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c\|\nabla h\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|\tilde{F}\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}.$$

Поэтому интеграл конечен.

Список литературы

[1] А. Д. Коваленко, *Термоупругость*, Издательское объединение «Вища школа», Киев, 1975.

[2] П. В. Базылев, А. В. Изотов, А. И. Кондратьев, В. А. Луговой, К. Н. Окишев, “Государственный первичный эталон единиц скоростей распространения продольных, сдвиговых и поверхностных ультразвуковых волн в твердых средах ГЭТ 189-2012.”, *Измерительная техника*, **7**:7, (2013), 6–10.

[3] А. П. Филин, *Прикладная механика твёрдого деформируемого тела: сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики*, Наука, М., 1978.

[4] В. Новацкий, *Динамические задачи термоупругости*, Мир, М., 1970.

[5] А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Едиториал УРСС, М., 2003.

[6] Е. П. Суляндзига, "О краевых задачах для одномерной системы уравнений термоупругости", *Вестник ТОГУ*, **3(34)**, (2014), 29–38.

[7] Y. Sun, D. Fang, M. Saka and A. K. Soh, "Laser-Induced Vibrations of Micro-Beams under Different Boundery Conditions", *International Journal of Solids and Structures*, **45**:7–8, (2008), 1993–2013.

[8] H. M. Youssef, A. S. Al-Felali, "Generalized Thermoelasticity Problem of Material Subjected to Thermal Loading Due to Laser Pulse", *Applied Mathematics*, **3**, (2012), 142–146.

[9] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.

[10] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию
26 февраля 2016 г.

Sulyandziga E. P. The solvability of the boundary value problem for the system of thermoelasticity equations in space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 98–109.

ABSTRACT

The proposed and substantiated boundary value problem for the linearized three-dimensional system of thermoelasticity equations describing the deformation of a solid body because of its temperature. The existence of weak solutions was proved.

Key words: *setting the boundary value problem, system of thermoelasticity, the existence of solutions, estimation of approximate solutions, thermal expansion.*