*Дальневосточный математический журнал.* 2017. Т. 17. № 1. С. 110–123

УДК 519.7+519.8
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© В. О. Филиппова[1]

# Задача оптимального управления с интервальным параметром

Рассматривается задача оптимального управления системой, содержащей интервальный параметр. Предлагается понятие *p-универсального* решения. Доказано существование и единственность *p-универсального* решения интервальной задачи оптимального управления и представлен алгоритм его нахождения. Приведен пример решения интервальной задачи оптимального управления системой, описываемой краевой задачей для дифференциального уравнения 2-го порядка.

Ключевые слова: *интервальные задачи, оптимальное управление в гильбертовом пространстве, система оптимальности, принцип Лагранжа, теорема существования и единственности решения.*

## Введение

Интервальные задачи оптимального управления интересны с практической точки зрения из-за неопределенности данных, на основе которых строятся соответствующие математические модели. С другой стороны, рассмотрение интервальных задач оптимального управления интересно с теоретической точки зрения, поскольку возникающие экстемальные задачи являются нелинейными, даже если управляемая система линейна при конкретных значениях неопределенных параметров.

В настоящей работе рассмотрена постановка задачи оптимального управления с интервальным параметром для операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Данная задача приведена к системе оптимальности, для которой предлагается *p-универсальное* решение, основанное на минимизации $L^p$ нормы невязки операторного уравнения, вычисленной по области изменения допустимых параметров. Основной результат работы состоит в представлении и обосновании алгоритма нахождения *p-универсального* решения системы при $p=+\infty$.

Аналогичный подход для нахождения универсального решения более простой интервальной задачи оптимального управления, изучен в статье автора [1]. Кроме того, доказаны существование и единственность *p-универсальных* решений при $1\leqslant p<+\infty$

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: filippova.vo@dvfu.ru

и получено решение задачи при $p=1$. В качестве иллюстрации предложенного алгоритма рассмотрена задача граничного управления для дифференциального уравнения второго порядка. Приведены численные примеры для различных значений параметра регуляризации и различных длин интервала неопределенности.

Понятие *p-универсального* решения для интервальной квадратичной функции в гильбертовом пространстве рассмотрено в статье автора [2]. Основой изучения универсальных решений интервальных задач послужила монография [3]. Указанное понятие близко к различным вариантам определения решений некорректных задач [4]. Отметим также [5–10], где в работах описываются изученные конечномерные интервальные задачи на экстремум.

## 1. Постановка абстрактной интервальной задачи оптимального управления

Рассмотрим вещественные гильбертовы пространства $V$ и $H$, $V \subset H \subset V'$, с плотным компактным вложением $V \subset H$. Здесь $V'$ — пространство, сопряженное с $V$. Обозначим через $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ нормы в $V$ и $H$ соответственно, а через $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $H$. Через $(f,v)$ будем понимать значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в $H$, если $f \in H$.

Пусть $A : V \to V'$ — линейный непрерывный оператор со свойствами

$$(Ay, y) \geqslant \alpha \parallel y \parallel^2, \quad \alpha > 0, \quad (Ay, v) = (Av, y),$$
$$(Ay, v) \leqslant \tau \|y\| \cdot \|v\|, \quad \tau > 0.$$

В силу теоремы Гильберта$-$Шмидта собственные элементы $w_j$ оператора $A$

$$Aw_j = \lambda_j w_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (w_i, w_j) = \delta_{ij}, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots,$$

образуют базис пространств $H$ и $V$, $\lambda_m \to +\infty$ при $m \to \infty$. Из сформулированных свойств оператора $A$ следует существование обратного оператора $A^{-1} : V' \to V$,

$$A^{-1} f = \sum_{j\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} (f, w_j) w_j, \qquad f \in V'.$$

Сформулируем интервальную задачу оптимального управления.

Пусть заданно гильбертово пространство управлений $U$ и линейное непрерывное отображение $B : U \to V'$. Для каждого управления $u \in U$ состояние $y \in V$ определяется как решение операторного уравнения вида

$$aAy = Bu, \tag{1}$$

где $a$ — неопределенный коэффициент из замкнутого интервала

$$0 < a_1 \leqslant a \leqslant a_2. \tag{2}$$

Интервальная задача оптимального управления заключается в минимизации функционала

$$J(u, y) = \frac{1}{2} |y - y_d|^2 + \frac{N}{2} |u|^2 \to inf \tag{3}$$

на решениях уравнения (1). Здесь $y_d \neq 0$ — заданный элемент из пространства $H$, $N > 0$.

*Замечание.* К задаче управления вида (1)–(3) сводятся естественным образом [11] задачи оптимального управления системами эллиптических уравнений и, в частности, задачи граничного управления. Интервальность параметра $a$ в (1) моделирует неопределенность физических характеристик управляемой системы, таких как, например, коэффициенты теплопроводности, диффузии или вязкости.

Прежде чем определить понятие *p-универсального* решения задачи оптимального управления, сведем постановку (1)–(3) к системе оптимальности:

$$\begin{cases} aAy = Bu, \\ aA\zeta = y_d - y, \\ Nu = B^*\zeta. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $\zeta \in V$ — сопряженное состояние. Оператор $B^* : V' \to U$. В [11, с. 57] показано, что для каждого фиксированного $a$ из отрезка $[a_1, a_2]$ задача управления (1)–(3) эквивалентна решению системы оптимальности (4). Выражая $\zeta$ и $u$ из второго и третьего уравнений, приходим к уравнению для нахождения $y$:

$$\nu y = D(y_d - y). \tag{5}$$

Здесь параметр $\nu$ — неопределенный коэффициент, удовлетворяющий ограничениям

$$0 < \nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2, \tag{6}$$

где $\nu_1 = Na_1^2, \quad \nu_2 = Na_2^2$. Оператор $D : H \to H$ определяется равенством

$$(Dw, v) = (B^*A^{-1}w, B^*A^{-1}v), \qquad \forall w, v \in H.$$

**Лемма 1.** *Оператор $D$ — самосопряженный и компактный.*

Доказательство. Очевидно, что $(Dw, v) = (w, Dv)$. В силу неравенства

$$\|A^{-1}w\| \leqslant \|A^{-1}\| \|w\|_{V'} \leqslant C\|A^{-1}\||w|,$$

где $C$ — постоянная вложения из $H$ в $V'$, $D$ непрерывен. Если последовательность $\{w_n\}$ ограничена в $H$, то $\{A^{-1}w_n\}$ ограничена в $V$. Отсюда вытекает следующее неравенство

$$\|Dw_n\| \leqslant C\|A^{-1}\|\|B\|\|B^*\|\|A^{-1}w_n\| \leqslant Const.$$

Поэтому последовательность $\{Dw_n\}$ ограничена в $V$ и отностительно компактна в $H$. Следовательно, оператор $D$ компактный. □

Понятие *p-универсального* решения уравнения с интервальными параметрами сводится к усреднению квадрата невязки по интервалу неопеределенности и минимизации полученного выражения.

$$\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} |\nu y - D(y_d - y)|^{2p} d\nu \to \inf, \qquad y \in H.$$

Применение данного подхода к интервальной задаче (1)–(3) приводит к следующему определению.

**Определение 1.** Элемент $y \in H$, минимизирующий функционал

$$\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(\nu) |\nu y - D(y_d - y)|^{2p} d\nu \to \inf, \tag{7}$$

называется р-универсальным оптимальмым состоянием задачи (1)–(3), $p \geqslant 1$. Здесь $\rho : [\nu_1, \nu_2] \to (0, +\infty)$ является весовой функцией.

Под универсальным оптимальным управлением в интервальной задаче (1)–(3) будем понимать решение следующей задачи

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \|Nau - B^* A^{-1}(y_d - y_p)\|_U^{2p} \to \inf, \qquad u \in U, \tag{8}$$

где $y_p$ — решение экстремальной задачи (7). Пару $\{y_p, u_p\}$ назовем $p$-универсальным решением задачи (1)–(3).

*Замечание.* 1) Отметим, что выбор различных показателей $p \geqslant 1$ и различных метрик в $L^p(\nu_1, \nu_2)$ приводит к различным алгоритмам решения интервальной задачи (5), (6). В случае $p = +\infty$ задача (7) сводится к минимизациии чебышевской нормы.

2) Ниже показано, что решение эстремальной задачи (7) фактически принадлежит пространству $V$.

## 2. Нахождение р-универсального решения интервальной задачи оптимального управления

### 2.1. Универсальное решение при $p = +\infty$

Задача (7) при $p = +\infty$ принимает вид

$$\max_{\nu_1 \leqslant \nu \leqslant \nu_2} |\nu y - D(y_d - y)|^2 \to \inf, \quad y \in H. \tag{9}$$

Назовем решение задачи (9) *универсальным* оптимальным состоянием задачи (1)–(3). Тогда *универсальным* оптимальным управлением задачи (1)–(3) будем считать решение задачи

$$\max_{a_1 \leqslant a \leqslant a_2} \|Nau - B^* A^{-1}(y_d - y_*)\|_U^2 \to \inf, \quad u \in U, \tag{10}$$

где $y_*$ — *универсальное* оптимальное состояние. Пару $\{y_*, u_*\}$ назовем *универсальным* решением задачи (1)–(3).

Для фиксированного элемента $y\in H$ рассмотрим функцию, зависящую от интервального параметра $\nu$:

$$\varphi(\nu) = \nu^2(y,y) - 2\nu(Dy,(y_d - y)) + (D(y_d - y), D(y_d - y)).$$

Функция $\varphi$ при $\nu\in[\nu_1,\nu_2]$ является выпуклой как сумма выпуклых функций, поэтому максимум функции $\varphi$ достигается либо в точке $\nu_1$, либо в точке $\nu_2$. Тогда задача (9) эквивалентна следующей задаче на экстремум:

$$\max\left\{|(\nu_1 I + D)y - Dy_d|^2, |(\nu_2 I + D)y - Dy_d|^2\right\} \to \inf, \quad y \in H. \tag{11}$$

Отметим, что задача (11) является задачей минимизации строго выпуклой непрерывной коэрцитивной функции. Следовательно, решение $y_*$ задачи (11) существует и единственно.

**Лемма 2.** *Пусть $y_* \in H$ — решение задачи* (11). *Тогда*

$$((D_1 + D_2)y_*, y_*) - 2(y_*, z_d) = 0, \tag{12}$$

*где $z_d = Dy_d$, а $D_1 = (\nu_1 I + D)$, $D_2 = (\nu_2 I + D)$.*

Доказательство. Рассмотрим квадратичные функции:

$$\Psi(y,\nu_i) = |\nu_i y - (z_d - Dy)|^2, \quad i = 1,2; \quad y \in H.$$

Так как $y_*$ — решение задачи (11), то

$$\max(\Psi(y_*,\nu_1), \Psi(y_*,\nu_2)) \leqslant \max(\Psi(y,\nu_1), \Psi(y,\nu_2)). \tag{13}$$

Допустим, $y_*$ не удовлетворяет условию (12). Тогда $\Psi(y_*,\nu_1)\neq\Psi(y_*,\nu_2)$. Пусть $\Psi(y_*,\nu_1)< <\Psi(y_*,\nu_2)$. Обозначим $h=y_*-\delta \mathrm{g}$, где $\mathrm{g}=2(\nu_2 I+D)\left((\nu_2 I+D)y-z_d\right)$ и $\delta>0$. Заметим, что $\mathrm{g}\neq 0$. Действительно, если $\mathrm{g}=0$, то есть $y_*=(\nu_2 I+D)^{-1}z_d$, значение $\Psi(y_*,\nu_2)=0$. Поэтому

$$\Psi(y_*,\nu_1) = \|\left((\nu_1 I + D)(\nu_2 I + D)^{-1} - I\right) z_d\|^2 < 0,$$

что неверно.

Покажем, что при малых $\delta$ справедливо неравенство

$$\Psi(y_*,\nu_2) > \Psi(h,\nu_2). \tag{14}$$

Поскольку $\Psi(y_*,\nu_2)-\Psi(h,\nu_2)=\delta|\mathrm{g}|^2-\delta^2\left((\nu_2 I+D)^2\mathrm{g},\mathrm{g}\right)^2$, то условие (14) выполняется, если $0<\delta<\frac{\left((\nu_2 I+D)^{-2}\mathrm{g},\mathrm{g}\right)}{|\mathrm{g}|^2}$. Кроме того, так как

$$\Psi(h,\nu_2) - \Psi(h,\nu_1) = \Psi(y_*,\nu_2) - \Psi(y_*,\nu_1) -$$
$$\delta(\nu_2-\nu_1)\left[2\left((D_1 + D_2)y_*, \mathrm{g}\right) + \delta\left((D_1+D_2)\mathrm{g},\mathrm{g}\right) + 2(\mathrm{g}, z_d))\right],$$

то при достаточно малых $\delta$ заключаем, что

$$\max(\Psi(h,\nu_1), \Psi(h,\nu_2)) = \Psi(h,\nu_2).$$

Теперь, учитывая условие (13), получаем

$$\Psi(h,\nu_2) < \Psi(y_*,\nu_2) \leqslant \max(\Psi(h,\nu_1),\Psi(h,\nu_2)) = \Psi(h,\nu_2).$$

Полученное противоречие означает, что выполняется равенство

$$\Psi(y_*,\nu_1) = \Psi(y_*,\nu_2),$$

из которого следует утверждение (12). □

В силу леммы 2 решение задачи (11) является также решением задачи условной минимизации:

$$\begin{cases} |D_1 y - z_d|^2 \to \inf, \quad y \in H; \\ \big((D_1+D_2)(y-(D_1+D_2)^{-1}z_d), y-(D_1+D_2)^{-1}z_d\big) = S_*. \end{cases} \tag{15}$$

Здесь $S_* = ((D_1+D_2)^{-1}z_d, z_d)$ не зависит от $y$.

Пусть $z = D_1 y \in H$, тогда задача (15) эквивалентна следующей задаче на экстремум:

$$\begin{cases} |z - z_d|^2 \to \inf, \quad z \in H; \\ \big(D_1^{-1}(D_1+D_2)D_1^{-1}(z-\tilde{z}_d), z-\tilde{z}_d\big) = S_*. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь $\tilde{z}_d = D_1(D_1+D_2)^{-1}z_d$.

Пусть $\{w_j\}$ — ортонормированный базис пространства $H$ из собственных элементов оператора $D$, то есть $(Dw_j,v)=\mu_j(w_j,v)$, где $\mu_j \geqslant 0$. Ограничение задачи (16) принимает вид

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\big((2\mu_j+\nu_1+\nu_2)z_j - (\mu_j+\nu_1)z_{d_j}\big)^2}{(\mu_j+\nu_1)^2(2\mu_j+\nu_1+\nu_2)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_{d_j}^2}{2\mu_j+\nu_1+\nu_2} = S_*. \tag{17}$$

Здесь $z_j = (z,w_j)$, $\quad z_{d_j} = (z_d, w_j)$ — коэффициенты Фурье элементов $z, z_d$. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu_j+\nu_2)^2 z_{d_j}^2}{(\mu_j+\nu_1)^2(2\mu_j+\nu_1+\nu_2)} > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_{d_j}^2}{2\mu_j+\nu_1+\nu_2}. \tag{18}$$

Поэтому элемент $z_d \in H$ не принадлежит выпуклому эллипсоиду

$$K = \{z \in H : \big(D_1^{-1}(D_1+D_2)D_1^{-1}(z-\tilde{z}_d), z-\tilde{z}_d\big) \leqslant S_*, \quad z_k = (z,w_k)\}$$

в пространстве $H$. Следовательно, задача (16) состоит в нахождении проекции в пространстве $H$ элемента $z_d$ на множество $K$. Указанная проекция определяется единственным образом, и поэтому задача поиска универсального оптимального состояния равносильна задаче

$$|z - z_d|^2 \to \inf, \quad z \in K. \tag{19}$$

Если $z_*$ — решение (19), то в соответствии с принципом Лагранжа

$$(L'_z(z_*,\gamma), h) = 0, \quad \forall z \in K,$$

причем в силу выпуклости задачи указанное условие является необходимым и достаточным. Здесь функция Лагранжа имеет вид

$$L(z,\gamma) = |z - z_d|^2 + \gamma(D_1^{-1}(D_1 + D_2)D_1^{-1}(z - \tilde{z}_d, z - \tilde{z}_d) - S_*), \quad \gamma \in R.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} (I + \gamma D_1^{-1}(D_1 + D_2)D_1^{-1})z_* = (I + \gamma D_1^{-1})z_d; \\ \big(D_1^{-1}(D_1 + D_2)D_1^{-1}(z_* - \tilde{z}_d), z_* - \tilde{z}_d\big) = S_*. \end{cases}$$

Выразив $z_*$ из первого уравнения системы, получим

$$z_* = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\nu_1 + \mu_j)(\nu_1 + \mu_j + \gamma)}{(\nu_1 + \mu_j)^2 + \gamma_*(2\mu_j + \nu_1 + \nu_2)} z_{d_j} w_j.$$

Подставим полученное $z_*$ во второе уравнение системы, придем к уравнению для нахождения множителя Лагранжа $\gamma$:

$$S(\gamma) = 0, \quad S(\gamma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu_j + \nu_1)^2(\mu_j + \nu_2)^2 {z_{d_j}}^2}{(2\mu_j + \nu_1 + \nu_2)((\mu_j + \nu_1)^2 + \gamma(2\mu_j + \nu_1 + \nu_2))^2} - S_*. \tag{20}$$

**Лемма 3.** *Уравнение (20) имеет единственный положительный корень $\gamma_*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Функция $S(\gamma)$ монотонно убывает, при этом

$$\lim_{\gamma \to \infty} S(\gamma) = -S_* < 0.$$

Легко заметить, что $S(0) > S_*$. Тогда из теоремы Коши следует, что существует единственный положительный корень $\gamma_* > 0, \quad S(\gamma_*) = 0.$ □

**Теорема 1.** *Пусть $y_d \in H, \quad 0 < \nu_1 < \nu_2$. Тогда существует единственное универсальное оптимальное состояние для интервальной задачи* (1)–(3), *определяемое выражением*

$$y_* = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\nu_1 + \mu_j + \gamma_*)}{(\nu_1 + \mu_j)^2 + \gamma_*(2\mu_j + \nu_1 + \nu_2)} \mu_j y_{d_j} w_j,$$

*где $\mu_j$ — собственные значения оператора $D$, $y_{d_j} = (y_d, w_j)$ — коэффициенты Фурье элемента $y_d$, а $\gamma_* > 0$ — решение уравнения* (20).

Заметим, что найденное оптимальное состояние можно представить в виде

$$(\nu_1^2 + \gamma(\nu_1 + \nu_2))y_* = D((D + (\nu_1 + \gamma)I)y_d - (D + 2(\nu_1 + \gamma)I)y_*).$$

Отсюда мы можем сделать вывод, что любое найденное решение $y_* \in H$ будет фактически принадлежать пространству $V$.

Найдем универсальное оптимальное управление. При $p = +\infty$ задача (8) принимает вид

$$\max_{a_1 \leqslant a \leqslant a_2} \|Nau - B^* A^{-1}(y_d - y_*)\|_U^2 \to \inf, \quad u \in U,$$

где $y_*$ — универсальное оптимальное состояние.

Пусть $z_g = B^* A^{-1}(y_d - y_*)$. Рассуждая так же, как при анализе задачи (9), приходим к следующей задаче на экстремум:

$$\begin{cases} \|Na_1 u - z_g\|_U^2 \to \inf, \quad u \in U; \\ (u,u)_U = \frac{2}{N(a_1+a_2)}(u, z_g)_U. \end{cases} \tag{21}$$

Решив задачу (21) методом Лагранжа, получим универсальное оптимальное управление.

**Теорема 2.** *Пусть $u \in U$, $\quad 0 < a_1 < a_2$. Тогда существует единственное универсальное оптимальное управление для интервальной задачи* (1)–(3), *определяемое выражением*

$$u_* = \frac{2}{N(a_1+a_2)} B^* A^{-1}(y_d - y_*),$$

*где $y_*$ — универсальное оптимальное состояние.*

## 2.2. Существование *p-универсального* решения, $1 \leqslant p < +\infty$

Корректность введенного понятия *p-универсального* оптимального состояния задачи (1)–(3) вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 3.** *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда существует единственное p-универсальное оптимальное состояние интервальной задачи* (1)–(3).

Доказательство. Нахождение *p-универсального* оптимального состояния сводится к задачи минимизации функционала

$$F(y) = \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(\nu)(\eta,\eta)^p d\nu \to \inf. \tag{22}$$

Здесь $\eta = (\nu I + D)y - Dy_d$.

Вычислим дифференциал Гато функционала $F$:

$$F'(y,\varphi) = 2p \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(\nu)(\eta,\eta)^{p-1}((\nu I + D)\eta, \varphi)d\nu, \quad \varphi \in H.$$

Отображение $F'(y,\varphi)$ является линейным и непрерывным по $\varphi \in H$, так как справедлива оценка

$$|F'(y,\varphi)| \leqslant C|\varphi|,$$

где $C = 2p\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(\nu)(\eta,\eta)^{p-1}|(\nu I + G)\eta| d\nu$ не зависит от $\varphi$.

Для доказательства строгой выпуклости функционала $F$ вычислим второй дифференциал Гато:

$$F''(y,\varphi,\varphi) = 2p \int\limits_{\nu_1}^{\nu_2} \rho(\nu)(2p-2)(\eta,\eta)^{p-2}((\nu I + D)\eta,\varphi)^2 + (\eta,\eta)^{p-1}((\nu I + D)^2\varphi,\varphi)d\nu \geqslant 0.$$

Предположим, что существуют $y_0 \in H$, $\varphi \in H$, $\varphi \neq 0$, такие, что $F''(y_0,\varphi,\varphi)=0$. Тогда $\eta_0=0$, то есть $(\nu I+D)y_0-Dy_d=0$, что неверно для любых $\nu$ из допустимого интервала. Поэтому $F$ — строго выпуклый функционал.

Функционал $F$ полунепрерывен снизу, так как является выпуклым и дифференцируемым по Гато. Покажем, что функционал $F$ является коэрцитивным. Заметим, что

$$|\eta| \geqslant |(\nu I+D)y|-|Dy_d|, \quad |(\nu I+D)y|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(\nu+\mu_j)^2 w_j^2 \geqslant \nu_1^2|y|^2.$$

Следовательно, $F(y)\to+\infty$, при $|y|\to+\infty$. Из указанных свойств $F$ вытекает, что *p-универсальное* решение интервальной задачи (1)–(3) существует и единственно. □

Обратим внимание, что решение задачи (22) фактически принадлежит пространству $V$. Действительно, условие оптимальности для задачи (22) дает равенство $F'(y,\varphi)=0, \forall\varphi\in H$. Поэтому, учитывая, что $\mathrm{Im}(D)\subset V$, заключаем $\alpha(\nu,y)y+\tilde{z}=0$, где $\tilde{z}\in V$, $\alpha(\nu,y)=\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\nu^2\rho(\nu)(\eta,\eta)^{p-1}d\nu>0$. Следовательно, $y\in V$.

## 2.3. *1-универсальное* решение

Найдем *p-универсальное* решение для $p=1$ с весовой функцией $\rho\equiv 1$. Тогда задача (7) сводится к следующей:

$$\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}(\nu y-D(y_d-y))^2\,d\nu\to\inf. \tag{23}$$

Вычислив интеграл, нетрудно проверить, что единственное решение задачи (23) определяется уравнением

$$\left(\frac{(\nu_1^2+\nu_1\nu_2+\nu_2^2)}{3}I+(\nu_1+\nu_2)D+D^2\right)y_1=\frac{(\nu_1+\nu_2)I+2D}{2}z_d. \tag{24}$$

Под *1-универсальным* оптимальным состоянием задачи (1)–(3) будем понимать элемент $y_1\in V$, который определяется выражением (24).

Задача нахождения *1-универсального* оптимального управления принимает вид

$$\int\limits_{a_1}^{a_2}\|Nau-B^*A^{-1}(y_d-y_1)\|_U^2da\to\inf, \quad u\in U. \tag{25}$$

Решив задачу (25), получим *1-универсальное* оптимальное управление

$$u_1=\frac{3(a_1+a_2)}{2N(a_1^2+a_1a_2+a_2^2)}B^*A^{-1}(y_d-y_1).$$

## 3. Интервальная задача оптимального управления для дифференциального уравнения 2-го порядка

Рассмотрим интервальную краевую задачу

$$\begin{cases} -y_{xx} + y = 0, \quad x \in (0;1); \\ a y_x(0) = \, - u, y(1) = 0, \quad u \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $a \in [a_1, a_2]$ — интервальный параметр.

Задача оптимального управления состоит в минимизации следующего функционала:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y(x) - y_d(x))^2 dx + \frac{N}{2}u^2 \to inf, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

на решениях интервальной краевой задачи (26). Здесь $N > 0$, $y_d$ — заданная функция из пространства $L^2(0,1)$.

Задача (26) естественным образом сводится к операторному уравнению вида (1). Пусть $V = \{v \in H^1(\Omega), v(1) = 0\}$ — пространство Соболева, состоящее из функций $v$, принадлежащих вместе с производной $v_x$, классу $L^2(0,1)$ и равных 0 на правой границе. Положим $H = L^2(0,1)$. Нормы в пространствах $H$ и $V$ определяются следующим образом: $|v|^2 = \int\limits_0^1 v^2 dx, \|v\|^2 = \int\limits_0^1 v_x^2 dx$. Оператор $A : V \to V'$ задается следующим образом $(Ay, v) = (y_x, v_x) + (y, v), \forall y, v \in V$. Оператор $B : \mathbb{R} \to V'$ определяется с помощью равенства $(Bu, z) \equiv uz(0)$. Тогда $B^* : V \to \mathbb{R}$, $B^* z = z(0)$.

Найдем собственные значения и собственные функции оператора $D$,

$$(Dw, v) = \mu(w, v), \quad |w| = 1. \tag{28}$$

Пусть $f = A^{-1}w$. Тогда уравнение (28) сводится к виду

$$f(0)A^{-1}v(0) = \mu \int\limits_0^1 Af(x)v(x)\,dx.$$

Решение неоднородной краевой задачи

$$\begin{cases} -f_{xx} + f = w, \quad x \in (0;1); \\ f_x(0) = 0, f(1) = 0, \end{cases}$$

имеет вид

$$f(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)w(s)\,ds,$$

где

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{-1}{2(e^2+1)}(e^s - e^{2-s})(e^x + e^{-x}), \quad x < s; \\ \frac{-1}{2(e^2+1)}(e^x - e^{2-x})(e^s + e^{-s}), \quad x > s. \end{cases} \tag{29}$$

При $\mu=0$ уравнение для нахождения собственных функций (28) принимает вид

$$f(0)A^{-1}v(0) = 0, \quad \forall v \in H.$$

Пусть $v=cos(\frac{\pi x}{2})$. Тогда нетрудно проверить, что $A^{-1}v(0)\neq 0$. Поэтому $\{y\in H: \int\limits_0^1 (e^s - e^{2-s})y(s)ds\}$ — собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\mu=0$.

При $\mu>0$ задача нахождения собственных значений оператора $D$ сводится к виду

$$f(0)\int\limits_0^1 G(0,s)v(s)ds = \mu \int\limits_0^1 Af(s)v(s)\,ds, \quad \forall v \in H.$$

В таком случае $Af(s)=\frac{1}{\mu}f(0)G(0,s)$. Получаем следующую неоднородную краевую задачу:

$$\begin{cases} -f_{xx} + f = \frac{1}{\mu}f(0)G(0,x), \quad x \in (0;1); \\ f_x(0) = 0, f(1) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Для решения неоднородной краевой задачи (30) снова используем функцию Грина (29). Тогда решение принимает вид

$$f(x) = \frac{1}{\mu}f(0)\int\limits_0^1 G(x,s)G(0,s)\,ds.$$

Следовательно, $\mu=\int\limits_0^1 G^2(0,s)\,ds = \frac{e^4-4e^2-1}{2(e^2+1)^2}$. Тогда $w(x)=G(0,x), x\in(0;1)$. Таким образом, оператор $D$ в данном случае имеет ровно одно положительное собственное значение $\mu_1$. Нормированную собственную функцию $\frac{w}{|w|}$ обозначим через $w_1$.

*Универсальным* решением задачи оптимального управления (26), (27) назовем *универсальное* решение задачи (1)–(3).

Так как *универсальное* оптимальное состояние задачи (26), (27) зависит от $\gamma$, решим уравнение (20). Заметим, что $\mu_2=\mu_3=...=0$, тогда $\gamma$ сводится к виду

$$\gamma_* = \frac{(\nu_1+\mu_1)(\nu_2-\nu_1)}{(2\mu_1+\nu_1+\nu_2)}.$$

Тогда *универсальные* оптимальные состояние и управление имеют вид

$$y_* = \frac{2\mu_1 w_1 y_{d_1}}{2\mu_1+\nu_1+\nu_2}, \quad u_* = \frac{2}{N(a_1+a_2)}\int\limits_0^1 G(0,s)(y_d(s)-y_*(s))ds.$$

Следствием абстрактных теорем 1, 2 являются следующий результат.

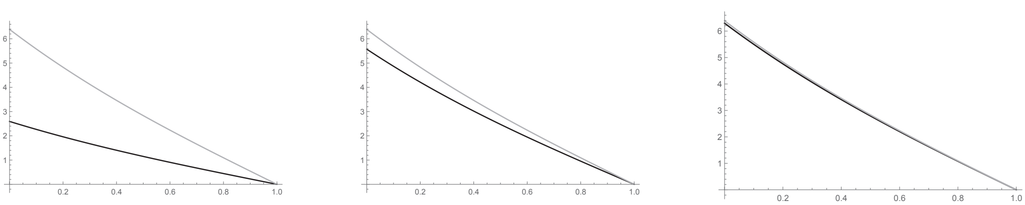
**Теорема 4.** *Пусть $y_d \in H, \quad 0 < a_1 < a_2$. Тогда существует единственное универсальное решение задачи* (26), (27)

$$\begin{cases} y_*(x) = \frac{\sqrt{2(e^4-4e^2-1)}y_{d_1}}{(\nu_1+\nu_2)(1+e^2)^2+e^4-4e^2-1}(e^{2-x}-e^x), \\ u_*(x) = \frac{2}{N(a_1+a_2)(1+e^2)}\int\limits_0^1 (e^{2-s}-e^s)(y_d(s)-y_*(s))ds, \end{cases} \tag{31}$$

*здесь* $y_{d_1} = (y_d, w_1)$.

Рассмотрим примеры решения интервальной задачи (26), (27) с заданной функцией $y_d = e^{(2-x)} - e^x$, для различных значений параметра регуляризации $N$ и различных длин интервала неопределенности.

**Пример 1.** *Пусть $a_1 = 1, a_2 = 2$. На рис. 1 приведены графики целевой функции $y_d$ и универсального оптимального состояния $y_*$ при различных значениях параметра $N$.*

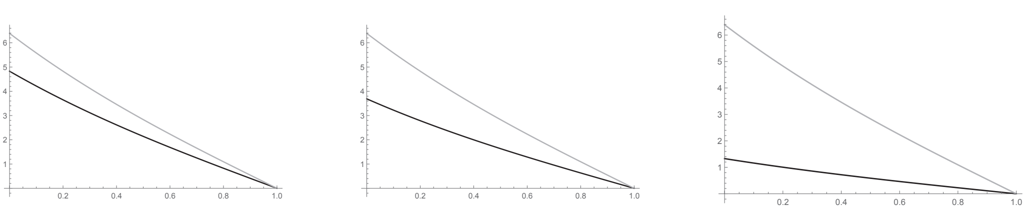


$N = 0.1$ $N = 0.01$ $N = 0.001$

Рис. 1. Функции $y_*$ и $y_d$ при различных $N$.

*Указанные графики иллюстрируют эффект уменьшения влияния неопределенности на универсальное оптимальное состояние за счет уменьшения параметра $N$.*

**Пример 2.** *Пусть $a_1 = 1, N = 0.05$. На рис. 2 приведены графики целевой функции $y_d$ и универсального оптимального состояния $y_*$ при различных значениях параметра $a_2$. Таким образом, решение интервальной задачи управления на основе предложенного понятия универсального оптимального состояния позволяет в соответствии с формулой (31) компенсировать влияние неопределенности за счет выбора регуляризирующего параметра $N$.*



$a_2 = 1.1$ $a_2 = 2$ $a_2 = 5$

Рис. 2. Функции $y_*$ и $y_d$ при различных $a_2$.

**Пример 3.** *Сравним значения функционала $J(y, u)$ на 1-универсальном и универсальном решениях. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 1.5, N = 1$. Проведя численный эксперимент,* *получим*

$$J(y_*, u_*) = 5.45948, \quad J(y_1, u_1) = 5.48994.$$

*Отсюда следует, что в данном случае предпочтительней использовать универсальное оптимальное решение. При увеличении интервала ситуация значительно не меняется, только значения функционалов становятся еще больше. Это иллюстрирует следующий пример. Пусть* $a_1, N$ *остаются неизменными, зато* $a_2 = 4$:

$$J(y_*, u_*) = 5.93386, \quad J(y_1, u_1) = 5.94929.$$

*Как мы заметили в первом эксперименте, для уменьшения погрешности при увеличении интервала нам следует уменьшать параметр* $N$. *Пусть* $a_1 = 1, a_2 = 4, N = 0.01$. *Получим*

$$J(y_*, u_*) = 2.47723, \quad J(y_1, u_1) = 2.35217.$$

*Интересно, что при уменьшении параметра* $N$ *значение функционала* $J(y_1, u_1)$ *становится меньше, чем* $J(y_*, u_*)$.

## Список литературы


[1] В. О. О, “Interval Optimal Control Problem in a Hilbert Space”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **53**:4, (2013), 389—395.

[2] В. О. Филиппова, “Минимизация интервальной квадратичной функции в гильбертовом пространстве”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**:2, (2014), 270—279.

[3] Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов, *Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления*, т. 151, Наука, М, 2006.

[4] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М, 1979.

[5] L. T. Aschepkov, D. V. Dolgy, *The universal solution of interval systems of linear algebraical equations*, v. 477–485, Intern. J. Software Eng. and Knowledge Eng., 1993.

[6] Л. Т. Ащепков, И. Б. Косогорова, “Минимизация квадратичной функции с интервальными коэффициентами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **42**:5, (2002), 653–664.

[7] Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов, “Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами”, *Математика, Изв. ВУЗов*, **2(477)**, (2002), 11–17.

[8] А.В. Захаров, Ю.И. Шокин, “Синтез систем управления приинтервальной неопределенности параметров и их математических моделей”, *Докл. АН СССР*, **299**:2, (1988).

[9] А. В. Лакеев, С. И. Носков, “О множестве решений линейного уравнения с интервально заданным оператором и правой частью”, *Сиб. мат. журн.*, **35**:5, (1994), 1074–1084.

[10] В. Н. Шашихин, “Оптимизация интервальных систем”, *Автоматика и телемеханика*, **11**, (2000), 94–103.

[11] Ж. Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, т. 2(477), Издательство "Мир", 1972, 416 с.


Поступила в редакцию
25 мая 2017 г.

*V. O. Filippova* An optimal control problem with an interval parameters. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 1. P. 110–123.

ABSTRACT

An optimal control problem for a system involving an interval parameter is considered. The concept of p-universal solution is introduced. The existence and uniqueness of a p-universal solution of the interval optimal control problem is proved, and an algorithm for its determination is presented. The interval optimal control problem for a system described by the boundary value problem for a second order differential equation is solved as an example.

Key words: *interval problems, optimal control in Hilbert space, optimality system, Lagrange principle, existence and uniqueness theorem.*