Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 135–146

УДК 517.9
MSC2010 05-XX + 34A35 + 34A38 + 45A05 + 45B05 + 45J05

© О. В. Бондрова[1], Н. И. Головко[1], Т. А. Жук[1]

Вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с интегральным оператором

В работе получены дифференциальные уравнения типа Колмогорова – Чепмена с интегральным оператором, имеющие теоретическое и прикладное значение как в теории дифференциальных уравнений, так и в различных прикладных областях, например, в теории массового обслуживания, в теории эволюции популяций, в теории игр, исследования операций и т.д. Уравнения получены для класса систем массового обслуживания (СМО) с экспоненциальным обслуживанием, входным дважды стохастическим пуассоновским потоком заявок, интенсивность которого является скачкообразным процессом с интервалами постоянства, распределенными по экспоненциальному закону. Модели СМО могут иметь как бесконечный, так и конечный накопитель, в том числе с нулевой емкостью (СМО с отказами).

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения типа Колмогорова – Чепмена, интегральный оператор, дважды стохастический пуассоновский поток, скачкообразный процесс, система массового обслуживания.*

Введение

Дифференциальные уравнения Колмогорова – Чепмена находят широкое применение в различных областях: при моделировании популяций, в теории массового обслуживания, в физических процессах прохождения частиц через марковскую среду, в прикладных игровых задачах теории вероятностей и исследования операций и т.д. [1–7]. Особую значимость имеет методика вывода уравнений Колмогорова – Чепмена, которую часто называют Δt-методом, или динамикой Колмогорова – Чепмена [8]. В нашей работе применяется Δt-метод для вывода уравнений типа Колмогорова – Чепмена с интегральным оператором в прикладной области — в теории массового обслуживания [9].

В настоящее время широко развиваются информационные системы, следовательно, моделирование информационных систем является актуальной технической и научной проблемой.

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: `bondrova.ov@dvfu.ru` (О. В. Бондрова), `golovko.ni@dvfu.ru` (Н. И. Головко), `Tatyana_zhukdv@mail.ru` (Т. А. Жук).

Функционирование узлов сетей описывается системами массового обслуживания. Большинство авторов изучают СМО предполагая, что параметры СМО не изменяются с течением времени [10, 11]. Для реальных моделей информационных сетей такое предположение не всегда выполняется. Параметры потоков сообщений в этих сетях претерпевают с течением времени случайные или детерминированные изменения по ряду причин. Нестационарность входных потоков сети изучали А. И. Ляхов, C. Baiocchi, P. A. W. Lewis, A. Svoronos, R. A. Upton и другие авторы. Результаты изучения отражены в работах [12–16]. Возникновение и исчезновение потоков сообщений в узлах информационных сетей в силу изменения маршрутов сообщений или выхода из строя отдельных элементов сети показано в работе [17]. Функционирование узлов локальных, а также глобальных информационных сетей типа Интернет (провайдерских узлов связи, proxy- и web-серверов, передающих станций и т.д.), описываемых СМО с параметрами, изменяющимися в случайные моменты времени, рассмотрено в работе [18]. На узлах локальных и глобальных компьютерных сетей имеется специфика потока сообщений. Системы обслуживания со скачкообразной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании узлов локальных вычислительных сетей, а системы обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока удобно использовать при моделировании узлов глобальных вычислительных сетей [19], [20].

Для СМО с изменяющимися параметрами в литературе принято название “СМО, функционирующие в случайной среде” [21]. В некоторых случаях на вход таких СМО поступает пуассоновский поток заявок со случайной интенсивностью, то есть так называемый дважды стохастический (ДС) поток. В нашей работе в качестве интенсивности входного потока рассматривается скачкообразный процесс. СМО, функционирующую в случайной среде с входным ДС пуассоновским потоком, будем называть для краткости дважды стохастической (ДС) СМО. В настоящей работе для класса ДС СМО со скачкообразной интенсивностью входного потока с одним обслуживающим прибором получены системы интегро-дифференциальных уравнений типа Колмогорова – Чепмена относительно распределения числа заявок. Эти системы уравнений имеют важное прикладное значение в теории случайных процессов и теории массового обслуживания (ТМО).

В ТМО для построения моделей СМО можно использовать следующие методы: математические, имитационные, аналоговые и другие. Так как при использовании имитационных, аналоговых методов возникают затруднения, поэтому в данной работе используются математические методы, которые заключаются в выводе интегро-дифференциальных уравнений и исследовании полученных уравнений.

В данной работе рассматриваются СМО с различной емкостью накопителя N_0, скачкообразной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$, экспоненциальным обслуживанием интенсивности μ на одном приборе. Интенсивность $\lambda(t)$ меняется на промежутке $[a,b]$, интервалы постоянства Т имеют экспоненциальное распределение с параметром α.

Интенсивность $\lambda(t)$ имеет в точках разрыва t_0 справа условную плотность распределения $\varphi(x\,|\,y) = P\{x < \lambda(t_0+0) < x+dx\,|\,\lambda(t_0-0) = y\}/dx, x \in [a,b]$. В настоящей работе приводится вывод уравнений типа Колмогорова – Чепмена с интегральным оператором в рассматриваемой СМО в случае, когда значения процесса $\lambda(t)$ в точках разрыва t_0 слева и справа — независимы, то есть выполняется $\varphi(x\,|\,y)\equiv\varphi(x)=$ $=P\{x<\lambda(t_0+0)<x+dx\}/dx$. Заметим, что плотность $\varphi(x)$ по своему определению удовлетворяет условию нормировки $\int\limits_a^b\varphi(x)dx=1$.

Обозначим через N максимальное число заявок в СМО, $N=N_0+1$, $0\leqslant N\leqslant\infty$. Обозначим через $\mathrm{f}(t,x)=\mathsf{P}\{x<\lambda(t)<x+dx\}/dx$ нестационарную плотность $\lambda(t)$, а через $\mathrm{f}(x)=\mathsf{P}\{x<\lambda<x+dx\}/dx$ — стационарную плотность $\lambda(t)$, где через λ обозначен процесс $\lambda(t)$ в стационарном режиме. Обозначим через $\nu(t)$ число заявок в СМО в момент t, через ν — число заявок в стационарном режиме, через $\mathrm{Q}_k(t,x), 0\leqslant k\leqslant N$, — совместное нестационарное распределение числа заявок $\nu(t)$ и интенсивности $\lambda(t)$ входного потока: $\mathrm{Q}_k(t,x)=\mathsf{P}\{\nu(t)=k,\ x<\lambda(t)<x+dx\}/dx$. Обозначим через $q_k(x), 0\leqslant k\leqslant N$, совместное стационарное распределение числа заявок ν и интенсивности λ входного потока в стационарном режиме: $q_k(x)=\mathsf{P}\{\nu=k, x<\lambda<x+dx\}/dx$.

1. Основные результаты

Теорема 1. *Нестационарные характеристики числа заявок $Q_k(t,x)$, $k\geqslant 0$, в СМО с бесконечным накопителем удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(t,x) = -(x+\alpha)Q_0(t,x)+\mu Q_1(t,x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_0(t,y)\,dy, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x) = xQ_{k-1}(t,x)-(x+\mu+\alpha)Q_k(t,x)+\\ +\mu Q_{k+1}(t,x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_k(t,y)\,dy, \qquad k\geqslant 1;\end{gathered} \tag{2}$$

2) начальным условиям с начальными плотностями $\tilde{Q}_k(x)$

$$Q_k(0,x)=\tilde{Q}_k(x),\ k\geqslant 0; \tag{3}$$

3) условию нормировки

$$\sum_{k\geqslant 0}Q_k(t,x)=\mathrm{f}(t,x),\ t\geqslant 0,\ x\in[a,b]. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя динамику Колмогорова–Чепмена (Δt-метод) [8], получим уравнения, связывающие между собой функции $Q_k(t,x)$, $k\geqslant 0$.

Рассмотрим временной интервал $(t,t+\Delta t)$. Пусть в момент времени t выполняется $x<\lambda(t)<x+dx$. Так как $\lambda(t)$ — скачкообразный процесс, то в течении промежутка времени $(t,t+\Delta t)$ значение $\lambda(t)$ остается неизменным с вероятностью $1-\alpha\Delta t+$ $+\,o(\Delta t)$ и лишь с вероятностью $\alpha\Delta t+o(\Delta t)$ может претерпевать изменение. При этом считается, что вероятность более чем одного изменения $\lambda(t)$ за промежуток Δt есть величина $o(\Delta t)$.

Определим переходные вероятности

$$p_{j,k}(t+\Delta t,x) = P\{\nu(t)=j, \nu(t+\Delta t)=k\}.$$

Запишем теперь переходные вероятности:

$$\begin{aligned} p_{k-1,k}(t+\Delta t,x) &= x\Delta t + o(\Delta t), \qquad k\geqslant 1;\\ p_{k,k}(t+\Delta t,x) &= 1-(x+\mu)\Delta t + o(\Delta t), \qquad k\geqslant 0;\\ p_{k+1,k}(t+\Delta t,x) &= \mu\Delta t + o(\Delta t), \qquad k\geqslant 0;\\ p_{j,k}(t+\Delta t,x) &= o(\Delta t), \qquad |j-k|>0. \end{aligned}$$

При отсутствии скачка $\lambda(t)$ на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ выполняется $x<\lambda(t)<$ $<x+dx$, а при наличии скачка $\lambda(t)$ на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ выполняется $y<\lambda(t)<y+dy$. С учетом этого, а также переходных вероятностей, формулы полной вероятности следует:

$$Q_k(t+\Delta t,x)dx = \{\sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,x)\cdot p_{jk}(\Delta t,x)\}\cdot\{1-\alpha\Delta t+o(\Delta t)\}+$$
$$+\int_a^b \varphi(x)dx \sum_{j\geqslant 0} Q_j(t,y)\cdot p_{jk}(\Delta t,y)\cdot\{\alpha\Delta t+o(\Delta t)\}dy, \qquad k\geqslant 1.$$

Подставляя переходные вероятности $p_{jk}(\Delta t,x)$, получим

$$Q_k(t+\Delta t,x)dx = \{1-\alpha\Delta t\}\cdot\{x\Delta t Q_{k-1}(t,x)dx + [1-(x+\mu)\Delta t]Q_k(t,x)dx+$$
$$+\mu\Delta t Q_{k+1}(t,x)dx\} + \int_a^b \alpha\Delta t\varphi(x)dx\{y\Delta t Q_{k-1}(t,y)+[1-\Delta t(y+\mu)]Q_k(t,y)+$$
$$+\mu\Delta t Q_{k+1}(t,y)\}dy + o(\Delta t).$$

Перенесем в последнем уравнении $Q_k(t,x)$ из левой части в правую и разделим равенство на Δt

$$\frac{Q_k(t+\Delta t,x)-Q_k(t,x)}{\Delta t} = xQ_{k-1}(t,x)-(x+\mu+\alpha)Q_k(t,x)+$$
$$+\mu Q_{k+1}(t,x)+\varphi(x)\int_a^b \alpha Q_k(t,y)dy + o(\Delta t).$$

Из последнего уравнения в результате предельного перехода при $\Delta t\to 0$ вытекает уравнение для $Q_k(t,x)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x) = xQ_{k-1}(t,x)-(x+\mu+\alpha)Q_k(t,x)+\mu Q_{k+1}(t,x)+\varphi(x)\int_a^b \alpha Q_k(t,y)dy, \quad k\geqslant 1.$$

Получим уравнение при $k=0$. Запишем переходные вероятности

$$\begin{aligned} p_{0,0}(\Delta t,x) &= 1-x\Delta t+o(\Delta t);\\ p_{1,0}(\Delta t,x) &= \mu\Delta t+o(\Delta t). \end{aligned}$$

Из формулы полной вероятности следует

$$Q_0(t+\Delta t, x)dx = \{1 - \alpha\Delta t + o(\Delta t)\}\cdot\{Q_0(t,x)dx \cdot p_{0,0}(\Delta t, x) + Q_1(t,x)dx \cdot p_{1,0}(\Delta t, x)\} +$$

$$+\int\limits_a^b \varphi(x)dx\{Q_0(t,y)\cdot p_{0,0}(\Delta t, x) + Q_1(t,y)\cdot p_{1,0}(\Delta t, x)\}\cdot\{\alpha\Delta t + o(\Delta t)\}dy, \quad k=0,$$

$$Q_0(t+\Delta t, x)dx = [1-(x+\alpha)\Delta t]Q_0(t,x)dx + \mu\Delta t Q_1(t,x)dx +$$

$$+\varphi(x)\int\limits_a^b \alpha\Delta t dx Q_0(t,y)dy + o(\Delta t), \quad k=0.$$

Перенесем в последнем уравнении $Q_0(t,x)$ из левой части в правую и разделим равенство на Δt. Предельный переход при $\Delta t \to 0$ дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(t,x) = -(x+\alpha)Q_0(t,x) + \mu Q_1(t,x) + \int\limits_a^b \alpha\varphi(x)Q_0(t,y)dy, k=0.$$

Таким образом получена система разностных интегро-дифференциальных уравнений (1), (2).

Начальные условия (3) заданы. Условие нормировки (4) выполняется по определению нестационарных характеристик $Q_k(t,x)$ и следует из формулы полной вероятности

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}\{\nu(t)=k,\ x<\lambda(t)<x+dx\}/dx =$$

$$= \mathsf{P}\{x<\lambda(t)<x+dx\}/dx = \mathrm{f}(t,x),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 2. *Нестационарная плотность* $\mathrm{f}(t,x)$ *скачкообразного процесса* $\lambda(t)$ *при постоянном параметре* α *и переходной плотности* $\varphi(x)$ *удовлетворяет уравнению Колмогорова – Феллера [22] с заданным начальным условием и условием нормировки:*

1) интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова – Феллера

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(t,x) = -\alpha\mathrm{f}(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathrm{f}(t,v)dv; \tag{5}$$

2) начальному условию

$$\mathrm{f}(0,x) = \mathrm{f}_0(x); \tag{6}$$

3) условию нормировки

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(t,v)dv = 1. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данная теорема может быть доказана с применением рассуждений предыдущей теоремы. Для краткости воспользуемся результатами теоремы 1 и получим уравнение (5).

Просуммировав уравнения (1) и (2), получим

$$- (x+\alpha)Q_0(t,x) + \mu Q_1(t,x) + \int\limits_a^b \alpha\varphi(x)Q_0(t,y)dy + \sum_{k=1}^{\infty} xQ_{k-1}(t,x) -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}(x+\mu+\alpha)Q_k(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty}\mu Q_{k+1}(t,x) + \varphi(x)\int\limits_a^b \alpha\sum_{k=1}^{\infty}Q_k(t,y)dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}Q_0(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x),$$

или

$$- \alpha\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(t,y)dy = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x).$$

С учетом $\sum\limits_{k=0}^{\infty}Q_k(t,x)=\mathrm{f}(t,x)$ уравнение относительно нестационарной плотности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(t,x) + \alpha\mathrm{f}(t,x) = \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathrm{f}(t,v)dv.$$

Начальное условие (6) задается по условию теоремы. Условие нормировки 7 выполняется по определению плотности распределения $\mathrm{f}(t,x)$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Решение задачи Коши уравнения* (5) *с начальным условием* (6) *имеет вид*

$$\mathrm{f}(t,x) = \varphi(x) + [\mathrm{f}(0,x) - \varphi(x)]e^{-\alpha t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом условия нормировки (7) уравнение (5) является линейным неоднородным уравнением первого порядка по переменной t. В уравнении x рассматривается как параметр. Найдем общее решение уравнения с помощью метода вариации произвольной постоянной. Получим

$$\mathrm{f}(t,x) = \varphi(x) + c_1e^{-\alpha t}, \mathrm{f}(0,x) = \varphi(x) + c_1, \mathrm{f}(t,x) = \varphi(x) + [\mathrm{f}(0,x) - \varphi(x)]e^{-\alpha t}.$$

СМО может перейти в стационарный режим различными способами. В частности, если в качестве начального распределения числа заявок в СМО задано стационарное распределение числа заявок $Q_k(0,x) = q_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant N$, то для любого $t \geqslant 0$ будет выполняться $\mathrm{f}(t,x) = \mathrm{f}(0,x) = \mathrm{f}(x)$, $0 \leqslant k \leqslant N$. В другом случае, при произвольном начальном распределении числа заявок, СМО может перейти в стационарный режим при $t \to \infty$. Следовательно $\lim \mathrm{f}(t,x) = \mathrm{f}(x) = \varphi(x)$ при $t \to \infty$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Стационарные характеристики числа заявок* $q_k(x)$, $k \geqslant 0$, *в СМО с бесконечным накопителем удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегральных уравнений

$$-(x+\alpha)q_0(x)+\mu q_1(x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b q_0(y)\,dy=0, \qquad k=0; \tag{8}$$

$$xq_{k-1}(x)-(x+\mu+\alpha)q_k(x)+\mu q_{k+1}(x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b q_k(y)\,dy=0,\ k\geqslant 1; \tag{9}$$

2) условию нормировки

$$\sum_{k\geqslant 0} q_k(x)=\mathrm{f}(x),\ x\in[a,b]. \tag{10}$$

Доказательство. Из уравнений (1), (2) с учетом того, что производные в стационарном режиме $\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x)=0, k\geqslant 0$, получим в стационарном режиме систему разностно-интегральных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок (8), (9). Условие нормировки (10) следует из того, что

$$\sum_{k\,=\,0}^{\infty} q_k(x)=\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\mathsf{P}\{\nu=k,\ x<\lambda<x+dx\}/dx=\mathsf{P}\{x<\lambda<x+dx\}/dx=\mathrm{f}(x),$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 5. *Стационарная плотность* $\mathrm{f}(x)$ *скачкообразного процесса* $\lambda(t)$ *при постоянном параметре* α *и переходной плотности* $\varphi(x)$ *удовлетворяет:*

1) условию нормировки

$$\int\limits_a^b \mathrm{f}(v)dv=1; \tag{11}$$

2) интегральному уравнению

$$-\alpha\mathrm{f}(x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b \mathrm{f}(v)dv=0, \tag{12}$$

решение которого равно $\mathrm{f}(x)=\varphi(x)$.

Доказательство. Учитывая, что в стационарном режиме $\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{f}(t,x)=0$, уравнение (5) для стационарного режима примет вид 12. Условие нормировки (11) выполняется по определению плотности распределения $\mathrm{f}(x)$. Подставляя в уравнение (12) вместо интеграла единицу, получим $\mathrm{f}(x)=\varphi(x)$. Теорема доказана. □

Теорема 6. *Нестационарные характеристики числа заявок* $Q_k(t,x)$, $0\leqslant k\leqslant N$, *в СМО с конечным накопителем удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(t,x)=-(x+\alpha)Q_0(t,x)+\mu Q_1(t,x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_0(t,y)\,dy, \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x) = xQ_{k-1}(t,x) - (x+\mu+\alpha)Q_k(t,x) + \\ +\mu Q_{k+1}(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_k(t,y)\,dy, \qquad 1 \leqslant k \leqslant N-1, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_N(t,x) = xQ_{N-1}(t,x) - (\mu+\alpha)Q_N(t,x) + \alpha\varphi(x)\int\limits_a^b Q_N(t,y)\,dy, \quad k = N; \tag{15}$$

2) начальным условиям с начальными плотностями $\pi_k(x)$

$$Q_k(0,x) = \pi_k(x),\ \pi_k(x) \geqslant 0,\ 0 \leqslant k \leqslant N; \tag{16}$$

3) условию нормировки

$$\sum_{k\,=\,0}^{N} Q_k(t,x) = \mathrm{f}(t,x),\ t \geqslant 0,\ x \in [a,b]. \tag{17}$$

Доказательство. Вывод уравнений (13) и (14) приведен в теореме 1.

Получим уравнение (15) при $k = N$. Переходные вероятности запишем следующим образом:

$$p_{N-1,N}(\Delta t,x) = x\Delta t + o(\Delta t);$$
$$p_{N,N}(\Delta t,x) = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Из формулы полной вероятности следует

$$Q_N(t+\Delta t,x)dx = \{1-\alpha\Delta t\}\cdot\{x\Delta t Q_{N-1}(t,x)dx + [1-\mu\Delta t]Q_N(t,x)dx\} + \\ + \int\limits_a^b \alpha\Delta t\varphi(x)dx\{y\Delta t Q_{N-1}(t,y) + [1-\mu\Delta t]Q_N(t,y)\}dy + o(\Delta t),$$

$$Q_N(t+\Delta t,x)dx = x\Delta t Q_{N-1}(t,x)dx + [1-(\mu+\alpha)\Delta t]Q_N(t,x)dx + \\ + \varphi(x)\int\limits_a^b \alpha\Delta t dx Q_N(t,y)dy + o(\Delta t), \qquad k = 0.$$

Перенесем в последнем уравнении $Q_N(t,x)$ из левой части в правую и разделим равенство на Δt, получим

$$\frac{Q_N(t+\Delta t,x) - Q_N(t,x)}{\Delta t} = xQ_{N-1}(t,x) - (\mu+\alpha)Q_N(t,x) + \\ + \varphi(x)\int\limits_a^b \alpha Q_N(t,y)dy + o(\Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ получаем уравнение относительно $Q_N(t,x)$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_N(t,x) = xQ_{N-1}(t,x) - (\mu+\alpha)Q_N(t,x) + \varphi(x)\int_a^b \alpha Q_N(t,y)dy, k = N.$$

Начальные условия (16) задаются по условию теоремы. Условие нормировки (17) выполняется по определению характеристик $Q_k(t,x)$. □

Теорема 7. *Стационарные характеристики числа заявок $q_k(x)$, $0 \leqslant k \leqslant N$, с конечным накопителем в СМО удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегральных уравнений

$$-(x+\alpha)q_0(x) + \mu q_1(x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_0(y)\,dy = 0, \tag{18}$$

$$\begin{gathered} xq_{k-1}(x) - (x+\mu+\alpha)q_k(x) + \\ +\mu q_{k+1}(x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_k(y)\,dy = 0, \qquad 0 < k < N, \end{gathered} \tag{19}$$

$$xq_{N-1}(x) - (\mu+\alpha)q_N(x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b q_N(y)\,dy = 0; \tag{20}$$

2) условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{N} q_k(x) = \mathrm{f}(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{21}$$

Доказательство. Из уравнений (13)—(15) с учетом того, что производные в стационарном режиме $\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x) = 0$, получим в стационарном режиме систему разностно-интегральных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок (18)—(20). Условие нормировки (21) выполняется по определению стационарных характеристик $q_k(x)$. Теорема доказана. □

Теорема 8. *Нестационарные характеристики числа заявок $Q_k(t,x)$, $k = 0,1$, в СМО с отказами удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(t,x) = -(x+\alpha)Q_0(t,x) + \mu Q_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_0(t,y)\,dy, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_1(t,x) = xQ_0(t,x) - (\mu+\alpha)Q_1(t,x) + \alpha\varphi(x)\int_a^b Q_1(t,y)\,dy; \tag{23}$$

2) начальным условиям с начальными плотностями $\pi_k(x)$

$$Q_k(0,x) = \pi_k(x),\ \pi_k(x) \geqslant 0, \qquad k = 0,1; \tag{24}$$

3) условию нормировки

$$Q_0(t,x)+Q_1(t,x)=\mathrm{f}(t,x),\ t\geqslant 0,\ x\in[a,b]. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вывод уравнения (22) приведен в теореме 1. Получим уравнение (23). Переходные вероятности запишем следующим образом:

$$p_{0,1}(\Delta t,x)=x\Delta+o(\Delta t);$$
$$p_{1,1}(\Delta t,x)=1-\mu\Delta t+o(\Delta t).$$

Из формулы полной вероятности следует

$$Q_1(t{+}\Delta t,x)dx{=}\{1-\alpha\Delta t+o(\Delta t)\}\cdot\{Q_0(t,x)dx{\cdot}p_{0,1}(\Delta t,x)+Q_1(t,x)dx\cdot p_{1,1}(\Delta t,x)\}+$$
$$+\int\limits_a^b\varphi(x,y)dx\{Q_0(t,y)\cdot p_{0,1}(\Delta t,x)+Q_1(t,y)\cdot p_{1,1}(\Delta t,x)\}\cdot\{\alpha\Delta t+o(\Delta t)\}dy,\quad k=0,$$

$$Q_1(t+\Delta t,x)dx=x\Delta tQ_0(t,x)dx+[1-(\mu+\alpha)\Delta t]Q_1(t,x)dx+$$
$$+\varphi(x)\int\limits_a^b\alpha\Delta t dx Q_0(t,y)dy+o(\Delta t).$$

Перенесем в последнем уравнении $Q_1(t,x)$ из левой части в правую, разделим равенство на Δt, устремляя Δt к нулю, получим уравнение (23).

Начальные условия (24) задаются по условию теоремы. Условие нормировки (25) выполняется по определению характеристик $Q_k(t,x)$. Теорема доказана. □

Теорема 9. *Стационарные характеристики числа заявок $q_k(x)$, $k=0,1$, в СМО с отказами удовлетворяют следующим уравнениям:*

1) системе интегральных уравнений

$$-(x+\alpha)q_0(x)+\mu q_1(x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b q_0(y)\,dy=0, \tag{26}$$

$$xq_0(x)-(\mu+\alpha)q_1(x)+\alpha\varphi(x)\int\limits_a^b q_1(y)\,dy=0; \tag{27}$$

2) условию нормировки

$$q_0(x)+q_1(x)=\mathrm{f}(x),\ x\in[a,b]. \tag{28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (22), (23) с учетом того, что производные в стационарном режиме $\frac{\partial}{\partial t}Q_k(t,x)=0$, получим в стационарном режиме систему разностно-интегральных уравнений относительно стационарных характеристик числа заявок (26), (27). Условие нормировки (28) выполняется согласно определению характеристик $q_k(x)$. Теорема доказана. □

Заключение

В данной работе рассмотрен класс систем массового обслуживания с различной емкостью накопителя, экспоненциальным обслуживанием, входным дважды стохастическим пуассоновским потоком со скачкообразной интенсивностью. С применением метода Колмогорова – Чепмена выведены интегро-дифференциальные уравнения относительно нестационарных и стационарных характеристик числа заявок.

Список литературы

[1] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1976.

[2] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, ФИЗМАЛИТ, М, 2001.

[3] А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей*, Фазис, М., 1998.

[4] А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов*, Наука, М., 1996.

[5] С. Карл, *Основы теории случайных процессов*, Мир, М., 1973.

[6] Ю. Б. Гермейер, *Введение в теорию исследования операций*, Наука, М., 1971.

[7] А. Таха Хемди, *Введение в исследование операций*, Вильямс, М., 2007.

[8] Л. Клейнрок, *Теория массового обслуживания*, Машиностроение, М., 1979.

[9] В. В. Катрахов, Н. И. Головко, Д. Е. Рыжков, *Введение в теорию марковских дважды стохастических систем массового обслуживания*, Изд-во ДВГУ, Владивосток, 2005.

[10] И. Н. Коваленко, *Теория массового обслуживания*, Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1971.

[11] В. В. Рыков, *Управляемые системы массового обслуживания*, Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика, 1975.

[12] А. И. Ляхов, “Асимптотический анализ замкнутых сетей очередей, включающих устройства с переменной интенсивностью обслуживания”, *Автоматика и телемеханика*, **3**, (1997), 131–143.

[13] C. Baiocchi, C. Capolo, V. Comincioly, G. Seraggi, “A mathematical model for transient analysis of computer systems”, *Performance Evaluation*, **3**, (1992), 247–264.

[14] P. A. W. Lewis, G. S. Shedler, “Statistical analysis of non-stationary series of events in a data base system”, *IBM Journal of Research and Development*, **20**, (1976), 465–482.

[15] A. Svoronos, G. Linda, “A convexity result for single-server exponention loss systems with non-stationary arrivals”, *J. Appl. Probab.*, **25**, (1988), 224–227.

[16] R. A. Upton, S. K. Tripathi, “An approximate transient analysis of the $M(t)/M/1$ queue”, *Performance Evaluation*, **2**, (1982), 118–132.

[17] Л. А. Растригин, *Современные принципы управления сложными объектами*, Сов. радио, М., 1978.

[18] Я. А. Коган, В. Г. Литвин, “К вычислению характеристик систем массового обслуживания с конечным буфером, работающей в случайной среде”, *Автоматика и телемеханика*, **12**, (1976), 49–57.

[19] Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк, “Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях”, *Сибирский журнал индустриальной Математики*, **2(34)**, (2008), 50–64.

[20] Н. И. Головко, В. В. Катрахов, *Применение моделей СМО в информационных сетях*, Изд-во ТГЭУ, Владивосток, 2008.

[21] Н. И. Головко, В. В. Катрахов, *Анализ систем массового обслуживания, функционирующих в случайной среде*, Изд-во ДВГАЭУ, Владивосток, 2000, 400 с.

[22] Б. В. Гнеденко, *Курс теории вероятностей*, Едиториал УРСС, Москва, 2005, 448 с.

Поступила в редакцию
24 сентября 2017 г.

Bondrova O. V., Golovko N. I., Zhuk T. A. Derivation of Kolmogorov – Chapman type equations with integrated operator. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 135–146.

ABSTRACT

In the work the authors derived equations of Kolmogorov – Chapman type with the integral operator of theoretical and applied importance in the differential equations theory and various applications, for example, of the queueing theory, the population evolution theory, etc. In the work we consider a class of queueing systems with exponential service on one technician device, the input is supplied twice stochastic Poisson flow whose intensity is an spasmodic process at intervals of constancy, distributed according to the exponential law. Models of queueing systems can have the infinite or the final storage device including zero capacity (queueing system with refusals).

Key words: *equations of Kolmogorov – Chapman type, integral operator, spasmodic process, twice stochastic Poisson stream, queuing system.*