Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 152–157

УДК 511.384
MSC2010 11F67

© В. А. Быковский[1]

Соотношения Эйхлера – Шимуры для тэта-функций

В работе трехчленное тождество тэта-функций Якоби от двух переменных интерпретируется как соотношение Эйхлера – Шимуры. Это позволяет с помощью операторов Гекке построить новые классы тождеств подобного типа.

Ключевые слова: *тэта-функции Якоби, соотношения Эйхлера – Шимуры, операторы Гекке, модули Эйхлера – Шимуры.*

Пусть z и q — комплексные числа с $|q|<1$. Нечётная по z тэта-функция Якоби

$$\vartheta_1(z)=\vartheta_1(z;q)=\,-i\sum_{n\,=\,-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)iz}=$$

$$=2\sum_{n\,=\,0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z.$$

Для $u\in(-\infty,+\infty)$ и $t\in(0,+\infty)$ функция $\vartheta_1(u;e^{-4t})$ удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\qquad(\text{Фурье},1822).$$

Пусть z,w,τ — комплексные числа с $\max\{|Im(z)|,|Im(w)|\}<\pi\cdot Im(\tau)$ и $q=e^{\pi i\tau}$. В работе “Sur la rotation d'un corps” (“О вращении тела”), опубликованной в 1848 (см. [1] и [2]), Якоби ввёл функцию

$$\tilde{H}(z,w)=\tilde{H}(z,w;q)=4\sum_{m\,=\,1}^{\infty}\sum_{n\,=\,1}^{\infty}q^{2mn}\sin(2mz+2nw).$$

При этом для $u,v\in(-\infty,+\infty)$ и $t\in(0,+\infty)$ функция $\tilde{H}(u,v;e^{-2t})$ — решение уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}.$$

В той же работе Якоби доказал, что

$$H(z,w)=H(z,w;q)=\,\mathrm{ctg}\;z+\mathrm{ctg}\;w+\tilde{H}(z,w;q)=\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)},$$
$$\vartheta_1'=\frac{\partial}{\partial z}\vartheta_1(z)|_{z\,=\,0}. \qquad (1)$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

В работе “Vorlesungén über die Theorie der ellptischen Functionen” (“Лекции по теории эллиптических функций”, 1874–1875) Вейерштрасс доказал трёхчленное тождество

$$\begin{gathered}\vartheta_1(z+w)\vartheta_1(z'+w')\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(-w+w')+\\ +\vartheta_1(z+z'+w')\vartheta_1(z+w-w')\vartheta_1(z')\vartheta_1(w)+\\ +\vartheta_1(-z'+w-w')\vartheta_1(w+z+z')\vartheta_1(z)\vartheta_1(w')=0.\end{gathered}$$

Очевидно, что

$$H(z_1,z_4;q)\cdot H(z_2,-z_3;q)+H(z_2,-z_3;q)\cdot H(-z_1,-z_4;q)=0. \tag{2}$$

С помощью (1) трёхчленное тождество преобразуется к виду (см. [3])

$$\begin{gathered}H(z,w)H(z',w')+H(z+z',w')H(-z,-w+w')+\\ +H(-z',w-w')H(z+z',w)=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Рассмотрим пространство мероморфных функций

$$f:\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$

с правым действием группы $f\to f\circ M$ матриц $M\in SL_2(\mathbb{Z})$ по правилу

$$\begin{gathered}\left(f\circ\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right),\\ \begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C}),\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbb{Z}).\end{gathered}$$

Пусть

$$G\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}=H(z_1,z_4;q)H(z_2,-z_3;q).$$

Тогда (2) и (3) преобразуются в

$$\begin{gathered}G+G\circ S=0,\qquad G+G\circ U+G\circ U^2=0,\\ S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}.\end{gathered}$$

Опираясь на теорию Эйхлера – Шимуры – Манина (см. [4] и [5]), мы получим обобщение этого результата.

Напомним, что проективная рациональная прямая $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ состоит из классов

$$(u:v)=\big\{(ru,rv)\mid r\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}\big\};\qquad(u,v)\in\mathbb{Q}\setminus\{(0,0)\}.$$

Класс $(u{:}v)=(u/v{:}1)$ с $v\neq0$ соответствует рациональному числу $\alpha=u/v$. Класс $(u{:}0)$ с $u\neq0$ соответствует ∞. Пусть

$$\Gamma=PSL_2(\mathbb{Z})=SL_2(\mathbb{Z})\Big/\left\{\pm\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

— мультипликативная полная модулярная группа, состоящая из пар целочисленных матриц
$$M=\pm\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a & -b\\ -c & -d\end{pmatrix}\right\}$$

с определителем 1. Она действует слева на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ по правилу

$$\alpha=(u\ :\ v)\to M(\alpha)=\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=(au+bv\ :\ cu+dv).$$

Для некоторых элементов из Γ мы будем пользоваться специальными обозначениями:

$$E=\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad S=S^{-1}=\pm\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad T=\pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$U=TS=\pm\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad U^2=U^{-1}=ST^{-1}=\pm\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что Γ — свободное произведение циклических подгрупп порядка 2 и 3, порожденных S и U. Пусть

$$\Gamma_\infty=\bigl\{M\in\Gamma\bigm| M(\infty)=\infty\bigr\}=\left\{T^l=\pm\begin{pmatrix}1 & l\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ l\in\mathbb{Z}\right\}$$

— стабилизатор ∞ в Γ. Тогда $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ канонически отождествляется с Γ/Γ_∞ по правилу $M\cdot\Gamma_\infty\leftrightarrow\alpha=M(\infty)$.

При этом

$$S(\infty)=0,\quad S(0)=\infty,$$
$$U(\infty)=1,\quad U(0)=\infty,\quad U(1)=0,$$
$$U^2(\infty)=0,\quad U^2(0)=1,\quad U^2(1)=\infty.$$

Пусть Γ' — подгруппа конечного индекса в Γ. Обозначим через $S^{(0)}_{2k+2}(\Gamma')$ комплексное линейное пространство голоморфных параболических форм, инвариантных относительно Γ', с весом $2k+2$ $(k=0,1,2,\ldots)$, которые обращаются в нуль во всех параболических вершинах $\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ и

$$\left(f\middle|\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)_{2k+2}(z)=(cz+d)^{-2k-2}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=f(z),\qquad\forall\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma'.$$

Пусть $\mathbb{C}[\Gamma'\backslash\Gamma]$ — линейное комплексное пространство, порожденное линейно независимыми формальными элементами $[R]$ с $R\in\Gamma'\backslash\Gamma$ и правым действием Γ по формуле

$$\left(\sum_{R\in\Gamma'\backslash\Gamma}z_R[R]\right)\circ M=\sum_{R\in\Gamma'\backslash\Gamma}z_R[RM],\qquad z_R\in\mathbb{C},$$

а $\mathcal{P}_{2k}(\mathbb{C})$ — комплексное линейное пространство бинарных однородных форм степени $2k$

$$P(u,v) = \sum_{r=0}^{2k} z_r u^{2k-r} v^r, \qquad z_r \in \mathbb{C},$$

с правым действием Γ по формуле

$$P \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(u,v) = P(au+bv, cu+dv).$$

Соответствие

$$f \to \Phi_f(\alpha,\beta) = \sum_{R\in\Gamma'\backslash\Gamma} \left(\int_\alpha^\beta (u-vz)^{2k} \left(f|R\right)_{2k+2}(z) dz \right) [R]$$

с $\alpha,\beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ определяет отображение Эйхлера $S^{(0)}_{2k+2}(\Gamma')$ в тензорное произведение $\mathbb{C}[\Gamma'\setminus\Gamma] \otimes \mathcal{P}_{2k}(\mathbb{C})$. При этом интегрирование проводится в соответствии с контуром на рис. 1 (a).

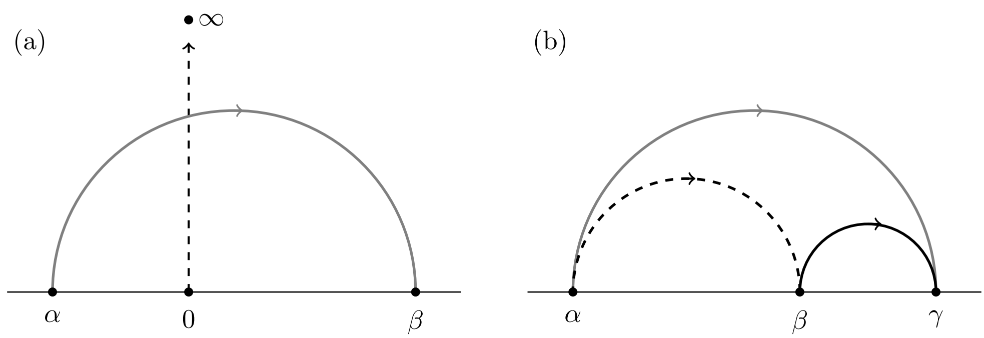

Рис. 1.

Так как значение интеграла не зависит от контура, соединяющего две заданные точки, то для любых $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ (см. рис. 1 (b)) выполняется равенство

$$\Phi_f(\alpha,\beta) + \Phi_f(\beta,\gamma) = \Phi_f(\alpha,\gamma).$$

Из определения $\Phi_f(\alpha,\beta)$ непосредственно следует, что

$$\Phi(M(\alpha), M(\beta)) \circ M = \Phi(\alpha,\beta), \quad \forall M \in \Gamma.$$

Пусть $\mathscr{L}$ — произвольный правый Γ-модуль.

Определение. Модулем Эйхлера $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ называется множество всех отображений

$$\Phi: \ \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathscr{L}$$

таких, что для любых $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ и любого $M \in \Gamma$ выполняются соотношения

1) $\Phi(\alpha,\beta)+\Phi(\beta,\gamma)=\Phi(\alpha,\gamma)$;

2) $\Phi\bigl(M(\alpha),M(\beta)\bigr)\circ M=\Phi(\alpha,\beta)$.

Определение. Модуль Эйхлера–Шимуры $\mathfrak{M}(\mathscr{L})$ состоит из всех элементов Φ модуля $\mathscr{L}$, для которых выполняются соотношения (Эйхлера–Шимуры)

$$\Phi+\Phi\circ S=0,\qquad \Phi+\Phi\circ U+\Phi\circ U^2=0.$$

Теорема 1 (Шимура–Манин [4]). *Соответствие* $\Phi\to\Phi(\infty,0)$ *определяет изоморфизм между* $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ *и* $\mathfrak{M}(\mathscr{L})$.

Пусть $\widetilde{\Gamma}(d)$ с $d\in\mathbb{N}$ — множество целочисленных матриц

$$Q=\pm\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\qquad \det Q=d.$$

При этом $\widetilde{\Gamma}(1)=\Gamma=PSL_2(\mathbb{Z})$ — подгруппа мультипликативной полугруппы

$$\widetilde{\Gamma}=\bigcup_{d=1}^{\infty}\widetilde{\Gamma}(d).$$

Предположим, что на модуле $\mathscr{L}$ действует справа $\widetilde{\Gamma}$. В соответствии с разложением

$$\widetilde{\Gamma}(d)=\bigcup_{j=1}^{\sigma(d)}\{\Gamma Q_j\}$$

на непересекающиеся классы относительно левого действия Γ с представителями Q_j для любой функции Φ из $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ определим гомоморфизм

$$H(d)*\Phi:\ \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})\longrightarrow\mathscr{L}$$

по формуле

$$\bigl(H(d)*\Phi\bigr)(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{\sigma(d)}\Phi\bigl(Q_j(\alpha),Q_j(\beta)\bigr)\circ Q_j.$$

Теорема 2 (Шимура–Манин [4] и [5]). *Для любого натурального* d *и любого* Φ *из* $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ *функция* $H(d)*\Phi$ *также будет элементом* $\mathscr{E}(\mathscr{L})$.

Гомоморфизм $H(d):\mathscr{E}(\mathscr{L})\to\mathscr{E}(\mathscr{L})$ называется оператором Гекке, и для него

$$H(d_1)H(d_2)=\sum_{\substack{d\backslash d_1\\ d\backslash d_2}} d\begin{pmatrix} d & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}H\left(\frac{d_1d_2}{d^2}\right).$$

Изоморфизм $\mathscr{E}(\mathscr{L})$ на $\mathfrak{M}(\mathscr{L})$ индуцирует действие $H(d)$ на $\mathfrak{M}(\mathscr{L})$ по формуле

$$H(d)\bullet\Phi(\infty,0)=\sum_{j=1}^{\sigma(d)}\Phi\bigl(Q_j(\infty),Q_j(0)\bigr)\circ Q_j.$$

В итоге мы получаем обобщение тождеств (2) и (3) для

$$G\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = H(z_1, z_4; q)H(z_2, -z_3; q),$$

сформулированное в виде теоремы.

Теорема 3. *Для любого натурального* d

$$H(d) \bullet G\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

$$H(d) \bullet G\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

Список литературы

[1] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, v. 1, Berlin, 1881.

[2] H. M. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, v. 3, Braunschweig, 1908.

[3] А. Е. Полищук, *Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье*, МЦНМО, М., 2010.

[4] Ю. И. Манин, "Параболические точки и дзета-функции модулярных кривых", *Изв. АН СССР, серия матем.*, **36**, (1972), 19–66.

[5] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press., NJ, 1971.

Поступила в редакцию
24 октября 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225.)

Bykovskii V. A. Eichler – Shimura relations for theta functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 152–157.

ABSTRACT

In this paper, the three-term identity of the Jacobi theta functions in two variables is interpreted as the Eichler-Shimura relation. This allows us to construct new classes of identities of this type with the help of Hecke operators.

Key words: *Jacobi theta functions, Eichler – Shimura relations, Hecke operators, Eichler – Shimura moduli.*