Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 170–179

УДК 517.927.2, 531
MSC2010 34A25, 34A30, 70B99

© М. А. Гузев[1], А. А. Дмитриев[1,2]

Осцилляционно-затухающее поведение температуры в кристалле

Построено аналитическое решение для уравнения, моделирующего одномерный гармонический кристалл. Решение используется при вычислении температуры как меры кинетической энергии. Для стохастических начальных условий получен закон распределения температуры, отличающийся от закона Фурье. Показано, что учет корреляций, связывающих положение частиц, приводит к появлению гармоник на удвоенной частоте по сравнению с основным колебанием, формируемым за счет корреляций между начальными скоростями.

Ключевые слова: *одномерный гармонический кристалл, распределение температуры, корреляция, скорость.*

Введение

Исследование переноса тепла в кристаллах является одной из центральных проблем статистической механики. В частности, поучение закона Фурье на основе микроскопической динамики частиц является актуальной задачей. Напомним, что по закону Фурье тепловой поток пропорционален градиенту температуры. В этом случае перенос тепла с достаточной степенью точности описывается параболическим уравнением теплопроводности. Несмотря на то, что закон Фурье является удобной математической моделью для описания передачи тепла, применение его приводит к ряду физических парадоксов - таких, например, как парадокс бесконечной скорости распространения тепла. Заметные отклонения от закона Фурье наблюдаются на малых временных и пространственных масштабах [1]. В простейших дискретных системах, таких, как одномерный гармонический кристалл (цепочка частиц, связанных линейными пружинами), распространение тепла не подчиняется закону Фурье [2].

С целью преодоления противоречий в теории теплового переноса были предложены новые модели теплового потока, учитывающие конечность скорости распространения тепла. В [3,4] и [5,6] авторы постулировали затухающую волновую модель теплопроводности в твердых телах, вводя параметр релаксации, который характеризует конечное время передачи тепла между материальными точками. Применение

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690043, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев), dmitriev@iam.dvo.ru (А. А. Дмитриев).

данной модели для рассмотрения процессов плавления представлено в [7], её связь с уравнением Больцмана указана в [8], построение для этой модели аналитического решения и численных схем можно найти в [9] и [10] соответственно.

В настоящее время вопрос о распространении тепла в идеальных кристаллических системах остается открытым. Но с развитием нанотехнологий расширяется возможность применения идеальных бездефектных кристаллов и их уникальных теплопроводящих свойств, поэтому получение конструктивных ответов на указанный выше вопрос является актуальной задачей как в теоретическом, так и прикладном плане. Следует указать на результаты работы [11], в которой получена замкнутая система уравнений, описывающая тепловые процессы в одномерном гармоническом кристалле. Решение системы дает уравнение связи теплового потока и температуры, отличающееся от закона Фурье. Использованный в [11] подход основан на комбинировании корреляционного анализа и длинноволнового приближения.

Авторы настоящей работы также рассматривали математические аспекты одномерной гармонической модели идеальной кристаллической системы при наличии внешнего воздействия на нее [12], что физически соответствует заданию температурных условий на концах кристаллического образца. Было построено фундаментальное решение и получены различные его формы представления. Продолжением этого исследования является изучение релаксационных свойств поведения температуры для бесконечного одномерного гармонического кристалла. В данной статье, определяя температуру как меру кинетической энергии частиц, мы используем [12] для вычисления энергии. В результате выполненной работы мы получили закон осцилляционно-затухающего поведения температуры.

1. Уравнения модели и её решения

Одномерный бесконечный кристалл является некоторой идеальной моделью, для которой характерный внутренний масштаб (например, равновесное расстояние a между соседними частицами) много меньше макроскопического размера системы — длины кристалла L. Это условие эквивалентно наличию большого числа частиц в системе ($n \gg 1$). Гармонический кристалл рассматривается как цепочка частиц с равной массой m, соединенных одинаковыми линейными пружинами с жесткостью k, а взаимодействие между частицами определяется ближайшими соседями. Для j-частицы её координата x_j представима в виде $x_j = ja + u_j$, где функция u_j определяет смещение частицы из положения равновесия, при этом $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant L$. Формулируя силовые условия для первой и последней частиц, будем полагать, что они упруго связаны с неподвижными точками. Тогда потенциальная энергия W такой системы частиц равна

$$W = k\frac{u_1^2}{2} + k\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(u_{j+1} - u_j)^2}{2} + k\frac{u_n^2}{2}. \qquad (1)$$

Для потенциала (1) уравнения движения системы частиц имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_1 &= k(u_2 - 2u_1), \\ m\ddot{u}_i &= k(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\ m\ddot{u}_n &= k(u_{n-1} - 2u_n). \end{aligned} \tag{2}$$

Перейдем к безразмерном переменным в (2), выбирая расстояние a в качестве масштаба длины, энергию нормируем величиной $ka^2/2$, а масштаб времени полагаем равным $\sqrt{m/k}$. Тогда (2) редуцируется к системе

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= (u_2 - 2u_1), \\ \ddot{u}_i &= u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n-1, \\ \ddot{u}_n &= u_{n-1} - 2u_n \end{aligned} \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u_i\big|_{t\,=\,0} = u_{i0}, \qquad \dot{u}_i\big|_{t\,=\,0} = \dot{u}_{i0}. \tag{4}$$

Уравнения (3) можно представить в виде

$$\ddot{u}_i = A_{ij} u_j, \tag{5}$$

где компоненты $A_{ij} = \delta_{(i+1)j} - 2\delta_{ij} + \delta_{(i-1)j}$ являются элементами трехдиагональной матрицы $\mathbf{A}$, в которой δ_{ij} — символ Кронекера — доопределен требованиями $\delta_{0j} = 0$, и $\delta_{(n+1)j} = 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Общая идея построения решения системы (3)–(4) состоит в разложении его по базису, образованному собственными векторами $\boldsymbol{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ матрицы $\mathbf{A}$. Собственные числа $-\omega_i^2$ и векторы $\boldsymbol{\alpha}_i$ матрицы были вычислены в [12], где мы полагали, что начальные условия являются однородными, так как решали задачу построения решения, порождаемого внешним воздействием на кристалл. В данной работе мы воспользуемся результатами [12] для формулировки решения системы (3)–(4).

Справедливо утверждение: компоненты u_i определяются соотношениями

$$u_i = \sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{ij} \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right), \tag{6}$$

где $\omega_j = 2\sin\dfrac{z_j}{2}$, $\alpha_{ij} = \sqrt{\dfrac{2}{n+1}} \sin i z_j$, $z_j = \dfrac{\pi j}{n+1}$ и $q_{0i} = \sum\limits_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{ij}\, u_j\big|_{t\,=\,0}$, $v_{0i} = \sum\limits_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{ij}\, \dot{u}_j\big|_{t\,=\,0}$.

Убедимся, что функции u_i (6) удовлетворяют системе (3) при начальных условиях (4). Действительно, дифференцируя (6) по времени, получаем

$$\ddot{u}_i = -\sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{ij} \omega_j^2 \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right). \tag{7}$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \alpha_{(i-1)j} - 2\alpha_{ij} + \alpha_{(i+1)j} &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} (\sin(i-1)z_j - 2\sin i z_j + \sin(i+1)z_j) = \\ &= -4\sin^2 \frac{z_j}{2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin i z_j = -\omega_j^2 \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Тогда отсюда и из (7) следует, что

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \sum_{j\,=\,1}^{n} (\alpha_{(i-1)j} - 2\alpha_{ij} + \alpha_{(i+1)j}) \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) =$$

$$= -\sum_{j\,=\,1}^{n} \omega_j^2 \alpha_{ij} \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) = \ddot{u}_i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

то есть справедливы уравнения (3) для внутренних частиц. После подстановки решения (6) в первое уравнение системы (3) нетрудно установить, что оно является тождеством, если использовать соотношения

$$\ddot{u}_1 = -\sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{1j} \omega_j^2 \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right),$$

$$\alpha_{2j} - 2\alpha_{1j} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} (\sin 2iz_j - 2\sin z_j) = -4\sin^2 \frac{z_j}{2} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin z_j = -\omega_j^2 \alpha_{1j}.$$

Подставляя решение (6) в последнее уравнение системы (3), получим

$$\ddot{u}_n = -(-1)^j \sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{1j} \omega_j^2 \left(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t \right). \tag{8}$$

С другой стороны,

$$\alpha_{(n-1)j} - 2\alpha_{nj} = (-1)^j \sqrt{\frac{2}{n+1}} (\sin 2iz_j - 2\sin z_j) =$$
$$= (-1)^j (\alpha_{2j} - 2\alpha_{1j}) = -(-1)^j \omega_j^2 \alpha_{1j}.$$

Тогда

$$u_{n-1} - 2u_n = \sum_{j\,=\,1}^{n} (\alpha_{(n-1)j} - 2\alpha_{nj})(q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t) =$$

$$= -\sum_{j\,=\,1}^{n} (-1)^j \alpha_{1j} \omega_j^2 (q_{0j} \cos \omega_j t + \frac{v_{0j}}{\omega_j} \sin \omega_j t).$$

Отсюда и из (8) видно, что последнее уравнение системы (3) справедливо для построенного решения (6). Выполнение начальных условий (4) обеспечивается благодаря свойству полноты собственных векторов $\boldsymbol{\alpha}_i$ ([12, формула (15)]).

2. Вычисление кинетической энергии частицы

Интересующая нас величина — средняя кинетическая энергия частиц T_v на некотором интервале :

$$T_v = \frac{1}{N} \sum_{i\,=\,N_1}^{N_2} T_i, \qquad T_i = \left\langle \frac{v_i^2}{2} \right\rangle_P, \tag{9}$$

где $N = N_2 - N_1 + 1$ — число частиц, $v_i^2/2$ — кинетическая энергия i -частицы, скобки $\langle\rangle_P$ обозначают усреднение по распределению начальных смещений и скоростей

$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = (u_{01}, \ldots, u_{0n}, v_{01}, \ldots, v_{0n})$. Именно T_v определяет температуру на интервале, который при условии $N << n$ можно рассматривать как точку.

Относительно распределения начальных смещений и скоростей предполагаем, что оно задается плотностью вероятности $P = P(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$. Поскольку частицы являются одинаковыми, то естественно полагать, что они подчиняются статистике Бозе – Эйнштейна. Конкретный вид распределения не важен в данной работе, а принципиальным выводом, следующим из этой гипотезы является положение о том, что функционально переменные $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ входят в $P = P(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ через энергию системы $H(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$:

$$P = F(H(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)), \qquad H(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = \frac{|\mathbf{v}_0|^2}{2} + W(\mathbf{u}_0). \tag{10}$$

Переходя к вычислению (9), сначала находим скорость частицы из (6)

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{u}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \sin iz_j \left(- q_{0j}\omega_j \sin\omega_j t + v_{0j}\cos\omega_j t\right). \tag{11}$$

Подставляя (11) в T_j (9), получаем соотношение $T_i = T_{i,uu} + T_{i,uv} + T_{i,vv}$, в котором

$$T_{i,uu} = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} \alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2} \langle u_{0j_1} u_{0j_2}\rangle_P \, \omega_{j_1}\omega_{j_2} \sin\omega_{j_1} t \sin\omega_{j_2} t, \tag{12}$$

$$T_{i,uv} = -\sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} \alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2} \langle u_{0j_1} v_{0j_2}\rangle_P \, \omega_{j_1} \sin\omega_{j_1} t \cos\omega_{j_2} t, \tag{13}$$

$$T_{i,vv} = \frac{1}{2} \sum_{j_1, j_2 = 1}^{n} \alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2} \langle v_{0j_1} v_{0j_2}\rangle_P \cos\omega_{j_1} t \cos\omega_{j_2} t. \tag{14}$$

Функция распределения (10) является четной относительно переменных v_{0j_1}, тогда $\langle u_{0j_1} v_{0j_2}\rangle_P = 0$, следовательно, $T_{i,uv} = 0$ и $T_i = T_{i,uu} + T_{i,vv}$. Так как $\langle v_{0j_1} v_{0j_2}\rangle_P = = 0$ для $j_1 \neq j_2$, то обозначая $\frac{1}{2}\langle v_{0j_1} v_{0j_2}\rangle_P = T_0\delta_{j_1 j_2}$, где T_0 имеет смысл кинетической температуры кристалла в начальной момент времени, и используя (6), запишем (14) в следующей форме:

$$T_{i,vv} = T_0 \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n} (\sin iz_j)^2 (\cos\omega_j t)^2. \tag{15}$$

Преобразуем слагаемое суммы к виду

$$\left(\sin\frac{\pi ij}{n+1}\right)^2 (\cos\omega_j t)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - \cos\frac{2\pi ij}{n+1} + \cos 2\omega_j t - \cos\frac{2\pi ij}{n+1}\cos 2\omega_j t\right). \tag{16}$$

Поскольку $n \gg 1$, то при вычислении суммы перейдем к интегрированию, полагая $\Delta j \to dz\frac{2(n+1)}{\pi}$, что соответствует формальному переходу от $z_j/2$ к переменной z в формулах, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \cos 2\omega_j t = \sum_{j=1}^{n} \cos\left(4t \sin\frac{\pi ij}{2(n+1)}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2(n+1)}{\pi} \int_0^{\pi/2} dz \cos\left(4t\sin z\right) = (n+1) J_0(4t). \tag{17}$$

Поступая аналогичным образом, получаем следующее выражение для суммы:

$$\sum_{j=1}^{n} \cos\frac{2\pi ij}{n+1}\cos 2\omega_j t \approx \frac{2(n+1)}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz\cos(4iz)\cos(4t\sin z) = (n+1)J_{4i}(4t). \quad (18)$$

Подстановка (16)–(18) в (15) дает формулу

$$T_{i,vv} = \frac{T_0}{4}\left[1 + J_0(4t) - J_{4i}(4t)\right]. \quad (19)$$

Переходя к анализу (12), сначала выделим в рассматриваемой сумме вклады с $j_1 = j_2$ и $j_1 \neq j_2$, тогда $T_{i,uu} = \bar{T}_{i,uu} + \tilde{T}_{i,uu}$, где

$$\begin{aligned} \bar{T}_{i,uu} &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^2 B_{jj}(\omega_j\sin\omega_j t)^2, \\ \tilde{T}_{i,uu} &= \frac{1}{2}\sum_{j_1\neq j_2}^{n} \alpha_{ij_1}\alpha_{ij_2}B_{j_1j_2}\omega_{j_1}\omega_{j_2}\sin\omega_{j_1}t\sin\omega_{j_2}t, \qquad B_{j_1j_2} = \langle u_{0j_1}u_{0j_2}\rangle_P. \end{aligned} \quad (20)$$

Учитывая явное представление (6) для входящих в (20) объектов, запишем $\bar{T}_{i,uu}$ в виде

$$\bar{T}_{i,uu} = \frac{4}{n+1}\sum_{j=1}^{n} B_{jj}\sin^2 iz_j \sin^2\frac{z_j}{2}\sin^2\left(4t\sin\frac{z_j}{2}\right). \quad (21)$$

Переходя от суммирования в (21) к интегрированию $\Delta j \to dz\frac{2(n+1)}{\pi}$, получаем

$$\bar{T}_{i,uu} \approx \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz B(z)\sin^2(2iz)\sin^2 z\sin^2(4t\sin z), \quad (22)$$

где $B(z)$ обозначает B_{jj} при замене $j \to z\frac{2(n+1)}{\pi}$.

Теперь рассмотрим комплекс $\tilde{T}_{i,uu}$. В соответствующей ему формуле можно сразу перейти к континуальной записи, полагая $B_{j_1j_2} \to B(z_1, z_2)$. Это дает представление:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{i,uu} \approx \frac{16(n+1)}{\pi}\int_0^{\pi/2} & dz_1 \sin 2iz_1 \sin z_1 \sin(2t\sin z_1)\times \\ & \times\int_0^{\pi/2} dz_2 \sin 2iz_2 \sin z_2 \sin(2t\sin z_2) B(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя в (9) полученные выражения, запишем T_v в виде

$$T_v = \frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} T_{i,vv} + \frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} \bar{T}_{i,uu} + \frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} \tilde{T}_{i,uu}. \quad (24)$$

Первая сумма в (24), учитывая (19), равна

$$\frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} T_{i,vv} = \frac{T_0}{4}\left[1 + J_0(4t) - \frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} J_{4i}(4t)\right]. \quad (25)$$

При вычислении последнего вклада в (25) воспользуемся формулами

$$\sum_{i=1}^{N}\cos(4iz) = \cos(2(N+1)z)\frac{\sin(2Nz)}{\sin(2z)}, \qquad \sum_{i=N_1}^{N_2}\cos(4iz) = \cos(4zx)\frac{\sin(2Nz)}{\sin(2z)},$$

где $x=(N_2+N_1)/2$, что приводит к выражению суммы функций Бесселя в виде

$$\frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} J_{4i}(4t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz\frac{\sin(2Nz)}{N\sin(2z)}\cos(4zx)\cos\left(4t\sin z\right)$$

и представлению первой суммы в (24):

$$\frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} T_{i,vv} = \frac{T_0}{4}\left\{1 + J_0(4t) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz\frac{\sin 2Nz}{N\sin 2z}\cos 4zx\cos(4t\sin z)\right\}. \tag{26}$$

При вычислении второй суммы в (24) подставим $\sin^2(2iz)=(1-\cos 4iz)/2$ в (22), а необходимое вычисление по индексу i выполним, применяя вторую формулу из (26), тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{j=N_1}^{N_2} \bar{T}_{i,uu} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz B(z)\sin^2 z\sin^2(4t\sin z)\left[1 - \frac{\sin 2Nz}{N\sin 2z}\cos 4zx\right]. \tag{27}$$

При подстановке (23) в последнюю сумму (24) следует воспользоваться соотношениями

$$\sum_{i=1}^{N}\sin 2iz = \sin(N+1)z\frac{\sin Nz}{\sin z}, \qquad \sum_{i=N_1}^{N_2}\sin 2iz = \sin 2zx\frac{\sin Nz}{\sin z}, \qquad x = \frac{N_2+N_1}{2}.$$

В результате получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{i=N_1}^{N_2} \tilde{T}_{i,uu} = \frac{16(n+1)}{\pi}\int_0^{\pi/2} dz_1\sin(2z_1x)\sin Nz_1\sin(2t\sin z_1)\times$$
$$\times\int_0^{\pi/2} dz_2\sin 2z_2x\sin Nz_2\sin(2t\sin z_2)B(z_1,z_2). \tag{28}$$

3. Асимптотическое поведение кинетической энергии частицы

Из полученных соотношений для кинетической энергии частицы (24), (26)–(28) видно, что температура содержит несколько вкладов. Слагаемое $J_0(4t)$ в (26) определяет колебания с частотой 4 (в размерных переменных $4\sqrt{k/m}$) и уменьшающейся амплитудой при $t>>1$, поскольку

$$J_0(4t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\cos(4t-\pi/4) + \underline{O}(t^{3/2}). \tag{29}$$

Асимптотический характер поведения при $t \gg 1$ добавочного вклада в (26) можно оценить методом стационарной фазы [13]. В интеграле функция $\sin z$, которая является аргументом для $\cos(4t\sin z)$, имеет на отрезке $[0, {}^{\pi}\!/_{2}]$ единственную стационарную точку $z_* = {}^{\pi}\!/_{2}$, так что $\sin {}^{\pi}\!/_{2} = 1$, и значение второй производной $-\sin {}^{\pi}\!/_{2} = -1$. Оставшееся подынтегральное выражение в (26) не имеет сингулярностей в x_*, поскольку

$$\frac{\sin 2Nz}{N\sin 2z}\cos 4zx\,|_{z_*\to{}^{\pi}\!/_{2}} = \cos(4z_* x) = \\ = \cos 2\pi x = \cos\pi(N_2+N_1) = (-1)^{N_2+N_1} = (-1)^{2x}. \quad (30)$$

Следовательно, временное и пространственное поведение интеграла определяется (с точностью до множителя) функцией

$$\frac{(-1)^{2x}}{\sqrt{t}}\cos(4t - {}^{\pi}\!/_{4}). \quad (31)$$

Отсюда и из (29) виден одинаковый асимптотический характер поведения амплитуды. Однако, соотношение (30) содержит зависимость от точки наблюдения x (в общем случае не является целым числом).

Рассмотрим поведение интегрального выражения (27) при $t \gg 1$, используя метод стационарной фазы. Из равенства $2\sin^2(4t\sin z) = 1 - \cos(8t\sin z)$ в (27) выделяется вклад, не зависящий от времени, который мы не рассматриваем. Оставшееся выражение с точностью до коэффициента совпадает с

$$I_1 = \int_0^{{}^{\pi}\!/_{2}} dz B(z)\sin^2 z\cos(8t\sin z)\left[1 - \frac{\sin 2Nz}{N\sin 2z}\cos 4zx\right].$$

Метод стационарной фазы, с учетом (30), приводит к выражению

$$I_1 \sim \frac{(-1)^{2x}}{\sqrt{t}} B({}^{\pi}\!/_{2})\cos(8t - {}^{\pi}\!/_{4}). \quad (32)$$

Эта формула показывает, что первые два вклада в температуру (24) имеют одинаковый асимптотический характер поведения амплитуды. Однако, фазовые характеристики у них разные, поскольку временные колебания в (32) происходят на удвоенной частоте по сравнению с (31).

Асимптотический закон поведения выражения (28) при $t \gg 1$ можно получить способом, аналогичным тому, который использован при выводе соотношений (31) и (32). Для стационарных точек $z_1 = z_2 = z_* = {}^{\pi}\!/_{2}$ значение $\sin 2z_* x = 0$, поэтому выражение (28) имеет дополнительную малость по $1/t$. Таким образом, формулы (31) и (32) определяют ведущий характер поведения температуры при $t \gg 1$.

Заключение

Проведенный анализ показал, что затухание колебаний температуры определяется существованием корреляций между частицами. Кроме того, различные типы корреляций приводят к разным гармоническим колебаниям. Учет корреляций, связывающих движение частиц (вклад $T_{i,vv}$) и формирующих колебания с частотой 4, был выполнен в работе [11]. В нашей работе выявлен дополнительный эффект, учитывающий зависимость температуры от точки наблюдения.

Принципиальный результат состоит в том, что учет корреляций, связывающих положение частиц (вклад $T_{i,uu}$), порождает гармоники на удвоенной частоте.

Список литературы

[1] Chandrasekharaiah D. S., "Thermo-elasticity with second sound", *Appl. Mech. Rev.*, **39**:3, (1986), 355–376.

[2] Rieder Z., Lebowitz J. L., Lieb E., "Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State", *J. Math. Phys*, **8**:5, (1967), 1073–1078.

[3] Cattaneo C., "Sulla conduzione de calore", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, **3**, (1948), 3.

[4] Cattaneo C., "A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation", *Comptes Rendus*, **247**, (1958), 431.

[5] Vernotte P., "Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur", *Comptes Rendus*, **256**, (1958), 3154.

[6] Vernotte P., "Some possible complications in the phenomena of thermal conduction", *Comptes Rendus*, **252**, (1961), 2190.

[7] Sadd M. H., Didlake J. E., "Non-Fourier Melting of a Semi-Infinite Solid", *J. Heat Transfer*, **99**:1, (1977), 25–28.

[8] Abdulmuhsen Ali, "Statistical Mechanical Derivation of Cattaneo's Heat Flux Law", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **13**:4, (1999), 544–545.

[9] Bahrami A., Hoseinzadeh S., Ghasemiasl R., "Solution of Non-Fourier Temperature Field in a Hollow Sphere under Harmonic Boundary Condition", *Applied Mechanics and Materials*, **772**, (2015), 197–203.

[10] Polyanin A. D., Vyazmin A. V., "Differential-difference heat-conduction and diffusion models and equations with a finite relaxation time", *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, **47**:3, (2013), 217–224.

[11] Кривцов А. М., "Распространение тепла в бесконечном гармоническом кристалле", *ДАН*, **464**:2, (2015), 162–166.

[12] Гузев М. А., Дмитриев А. А., "Различные формы представления решения одномерной гармонической модели кристалла", *Дальневосточный матем. журнал*, **17**:1, (2017), 30–47.

[13] Федорюк М. В., *Асимпторика: интегралы и ряды (СМБ)*, Наука: ГРФМЛ, Москва, 1987.

Поступила в редакцию
30 октября 2017 г.

Guzev M. A., Dmitriev A. A. Oscillatory-damping temperature behavior in one-dimensional harmonic model of a perfect crystal. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 170–179.

ABSTRACT

We constructed an analytical solution for the equations modeling a one-dimensional harmonic crystal. The solution is used to calculate the temperature as a measure of kinetic energy. For stochastic initial conditions, we obtain a law of temperature distribution which differs from the Fourier law. It is demonstrated that the correlations linking the position of the particles leads to the appearance of harmonics at twice the frequency compared with the main oscillation generated due to correlations between the initial velocities.

Key words: *one-dimensional harmonic crystal, the temperature distribution, correlation, speed.*