

УДК 519.212.3+004.89

MSC2010 60J05

© М. А. Гузев^{1,2}; Г. Ш. Цициашвили^{1,2}; М. А. Осипова^{1,2};
М. С. Спорышев¹

Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами как решение задачи Бюффона

Для подводной робототехники рассматривается задача обнаружения объекта аппаратами. Предлагается вероятностная постановка проблемы, для решения которой используется редукция задачи обнаружения к классической задаче Бюффона. Эта постановка задачи естественным образом возникает при формулировке проблемы в системе координат, связанной с аппаратами. Показано, что задача допускает анализ при наличии асимптотического параметра, определяемого отношением локального размера области сканирования аппарата к глобальному размеру рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: *посторонний мобильный объект, автономный необитаемый подводный аппарат, вероятность обнаружения, задача Бюффона.*

Введение

В современной подводной робототехнике (underwater robotic technique) важной является задача вычисления вероятности обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами. В первоначальной постановке эта задача относится к задачам захвата цели, к дифференциальным играм погони [1]. Возможны различные варианты такой постановки задачи. Первый вариант основан на определении кратчайшей траектории, пройдя по которой робот или группа роботов покроют своей областью видимости всю заданную территорию [2]. Второй вариант предполагает поиск минимального количества роботов, обеспечивающих гарантию захвата [3]. Работы [1–3] формулируют задачу захвата цели в терминах случайных графов [4], а не в терминах случайных множеств, что приводит к исчезновению первоначальной геометрической постановки вопроса.

¹ Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (М. А. Гузев), guram@iam.dvo.ru (Г. Ш. Цициашвили), maol1975@list.ru (М. А. Осипова).

Этот недостаток может быть преодолен обращением к одной из ключевых задач геометрической теории вероятностей — задаче Бюффона. Задача Бюффона (см. рис. 1) состоит в определении вероятности пересечения иглы длиной l , бросаемой случайным образом на плоскость, разлинованную равноотстоящими (на расстоянии L) параллельными прямыми, с какой-либо из этих прямых. Эта задача легла в основу стохастической геометрии и получила широкое распространение в прикладной статистике.

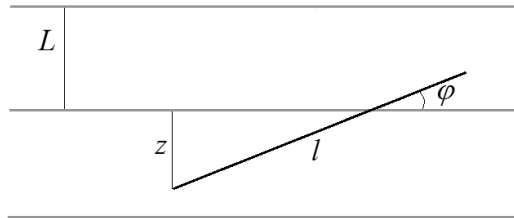


Рис. 1. Задача Бюффона.

Основным элементом вероятностной модели в задаче Бюффона являются случайные величины, определяющие взаимное расположение занимаемого иглой на плоскости отрезка и равноотстоящих горизонтальных прямых [5], [6]. Такими случайными величинами являются расстояние z от нижнего конца отрезка до первой выпележащей прямой и угол φ между этой прямой и отрезком. Зная закон распределения случайного вектора (z, φ) , образованного этими случайными величинами, можно определить вероятность события $P(l \sin \varphi \geq z)$ пересечения иглы с одной из параллельных прямых. Для наступления этого события необходимо и достаточно, чтобы отрезок пересекался с прямой, лежащей непосредственно над его нижним концом.

По аналогии с [7] представим задачу вычисления вероятности обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами в терминах задачи Бюффона следующим образом. Пусть n аппаратов движутся по окружности радиуса R с фиксированной линейной скоростью v . Расстояния между соседними вдоль окружности аппаратами одинаковы. Каждый аппарат снабжен локатором кругового обзора с радиусом обзора r . Локатор кругового обзора можно понимать как устройство, вращающее луч с угловой скоростью достаточно большой, чтобы линейная скорость движения луча заметно превосходила линейную скорость движения аппаратов.

Требуется вычислить вероятность обнаружения мобильного объекта с помощью локаторов, установленных на аппаратах (см. рис. 2). Здесь под обнаружением понимается попадание объекта в круг, обозреваемый каким-либо из аппаратов.

Данная работа является расширенным вариантом доклада на седьмой Всероссийской научно-технической конференции «Технические проблемы освоения мирового океана» [8].

1. Задача Бюффона в системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами

Особенностью задачи вычисления вероятности обнаружения мобильного объекта в неподвижной системе координат, связанной с внешним наблюдателем, является тот факт, что и аппараты, и объект движутся, а поэтому требуется какой-то переход к задаче Бюффона, в которой по крайней мере параллельные прямые неподвижны.

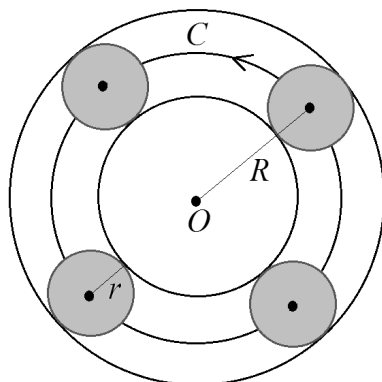


Рис. 2. Движение аппаратов по окружности в неподвижной системе координат.

Такой переход реализуется при рассмотрении движения исследуемых объектов в системе координат, связанной с аппаратами, вращающимися вокруг некоторой точки O по окружности C радиусом R . В этой системе координат неподвижными становятся круги обзора радиусом r локаторов, установленных на аппаратах. Чтобы мобильный объект был обнаружен аппаратами, необходимо, чтобы траектория движения объекта пересекла один из указанных кругов.

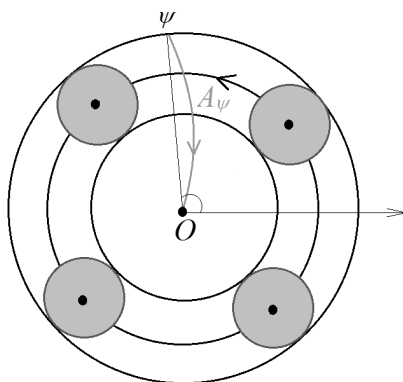


Рис. 3. Траектория движения объекта в декартовой системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами.

В целях упрощения исследования данной задачи предположим, что в неподвижной системе координат мобильный объект движется по отрезку, соединяющему начальную точку движения мобильного объекта с центром O окружности C .

Во вращающейся системе координат форма траектории A_ψ объекта отличается от отрезка (см. рис. 3): она будет представлять собой некоторую кривую, начинающуюся в случайной точке ψ окружности C_* , радиусом $R+r$ с центром в точке O . Таким образом, в системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами, круги радиусом r играют роль параллельных прямых, а кривые A_ψ — роль отрезка в задаче Бюффона.

Всюду далее полагаем, что случайный угол ψ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Переход от кривой $A_{\psi'}$ к кривой $A_{\psi''}$ осуществляется поворотом кривой $A_{\psi'}$ на угол $\psi'' - \psi'$ вокруг точки O . Следует отметить, что на окружности C_* каждый круг D_i радиусом r выделяет дугу F_i , ограниченную двумя кривыми $A_{\psi'_i}, A_{\psi''_i}$, касающимися снаружи круга $D_i, i=1, \dots, n$ (см. рис. 4).

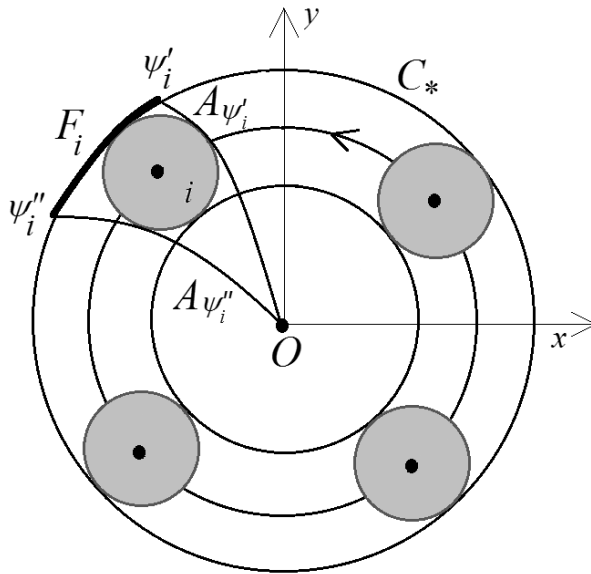


Рис. 4. Область контроля одного круга обзора в декартовой системе координат (x, y) , связанной с движущимися аппаратами.

Таким образом, на окружности C_* круг обзора D_i с центром в точке, где находится аппарат i , выделяет дугу $F_i, i=1, \dots, n$. Теперь можно вычислить вероятность обнаружения мобильного объекта аппаратами с установленными на них локаторами кругового обзора. Пусть множество \mathcal{F} является объединением дуг $F_i: \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Это множество является объединением конечного числа непересекающихся дуг (может быть, меньшего, чем n , числа). Тогда суммарная угловая длина этих дуг $s(\mathcal{F})$, деленная на $2\pi: \frac{s(\mathcal{F})}{2\pi}$ — является искомой вероятностью обнаружения мобильного объекта локаторами кругового обзора, установленными на аппаратах.

Отсюда следует, что если дуги $F_i, i = 1, \dots, n$, не пересекаются, то вероятность обнаружения объекта аппаратами равна $P = \frac{ns(F_i)}{2\pi}$, где $s(F_i)$ — угловая длина дуги F_i . В общем случае $P = \min\left(1, \frac{ns(F_i)}{2\pi}\right)$.

2. Задача Бюффона в полярной системе координат

Задача определения кривых A_ψ и нахождения дуг F_i , как правило, решается численно. Однако при наличии некоторых дополнительных предположений возможно получение аналитических формул. Перейдем от прямоугольной системы координат (x, y) , связанной с вращающимися вокруг точки O аппаратами, к полярной системе координат (см. рис. 5) с вертикальной координатой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и горизонтальной координатой $\varphi = \arctg x/y$.

В прямоугольной системе координат (x, y) окружность радиусом r с центром в точке $(0, R)$ описывается уравнениями

$$x = x(\psi) = r \cos \psi, \quad y = y(\psi) = R + r \sin \psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

дающими параметрическое задание окружности: ψ — параметр. В полярной системе координат (ρ, φ) эта окружность задается параметрически уравнениями

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi + \left(1 + \frac{r}{R} \sin \psi\right)^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{r}{R} \cos \psi}{1 + \frac{r}{R} \sin \psi},$$

т.к. ψ остается параметром. Типичный вид образа окружности радиусом r в этой полярной системе координат имеет вид яйцеобразной фигуры с заостренным верхним концом (см. рис. 5).

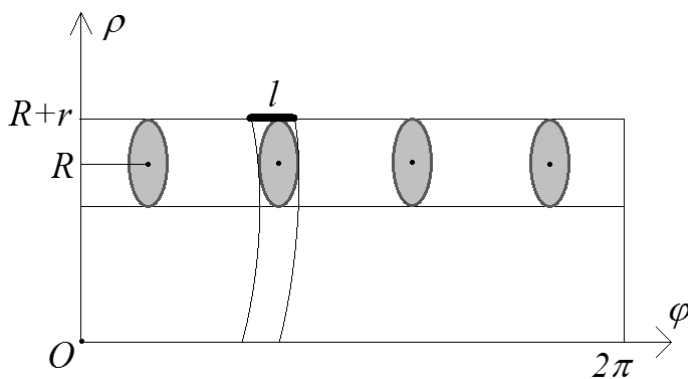


Рис. 5. Область контроля одним кругом обзора в полярной системе координат, связанной с движущимися аппаратами.

При малом значении параметра $r/R \ll 1$ можно приближенно последнюю систему уравнений переписать в виде

$$\frac{\rho}{R} \approx 1 + \frac{r}{R} \sin \psi, \quad \varphi \approx \frac{r}{R} \cos \psi.$$

Таким образом, круг радиусом r в системе координат (x, y) , вращающейся вместе с аппаратами, переходит в нормированной полярной системе координат $(\rho/R, \varphi)$ приблизительно в круг радиусом r/R (см. рис. 6).

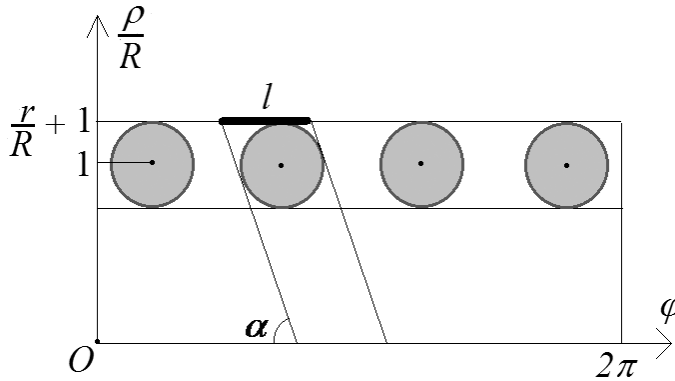


Рис. 6. Область контроля одним кругом обзора в нормированной полярной системе координат, связанной с движущимися аппаратами.

В свою очередь, при выполнении асимптотического условия $r/R \ll 1$ траектория A_ψ переходит в прямую. Если линейная скорость движения аппарата равна v , а скорость движения мобильного объекта в неподвижной системе координат равна u , то тогда в полярной системе координат, связанной с движущимися аппаратами, скорость движения мобильного объекта приблизительно равна $\sqrt{v^2/R^2 + u^2/R^2}$ и составляет угол $\alpha = \arctg u/v$ с горизонтальной прямой, являющейся образом окружности C_* . Поэтому каждый круг, изображающий зону контроля локатора кругового обзора, перекрывает для мобильного объекта отрезок длиной $l = \frac{2r}{R \sin \alpha}$ (см. рис. 6).

Перейдем от вероятности обнаружения объекта к минимальному числу аппаратов $M = \min \left(n : \frac{ns(F_i)}{2\pi} \geq 1 \right)$, при котором вероятность обнаружения мобильного объекта равна единице, тогда $M = \min \left(n : \frac{nr}{\pi R \sin \alpha} \geq 1 \right)$. Очевидно, что, если число аппаратов $n = M$, то расстояние между центрами соседних кругов обзора может быть меньше l .

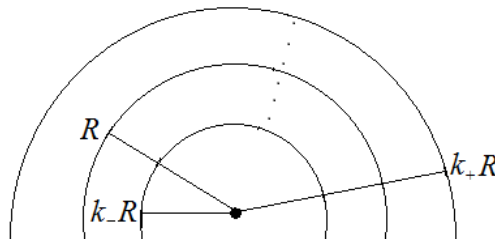


Рис. 7. Стохастизация радиуса движения аппаратов.

Пусть $k_- < 1 < k_+$, $\max(|1 - k_-|, |1 - k_+|) \ll 1$ и на отрезке $[k_-, k_+]$ задано вероятностное распределение $p(dk)$ такое, что $\int_{k_-}^{k_+} kp(dk) = 1$. Заменим радиус R на kR , тогда

в полярной системе координат в силу действия асимптотического условия $r/R \ll 1$ образом круга обзора приблизительно станет круг радиусом $\frac{r}{kR}$.

Функция $\frac{r}{kR}$ является выпуклой вниз по k , следовательно, из неравенства Йенсена [9, с. 207] получаем следующее неравенство

$$\frac{r}{R} \int_{k_-}^{k_+} \frac{p(dk)}{k} \geq \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{\int_{k_-}^{k_+} kp(dk)} = \frac{r}{R}. \tag{1}$$

Таким образом, вероятность обнаружения объекта при случайном распределении параметра k увеличивается по сравнению с вероятностью обнаружения объекта при среднем значении множителя k .

3. Возможные обобщения модели движения аппаратов

Предположим, что аппараты движутся с линейной скоростью v по траектории с переменным радиусом $k(t)R$, $k_- \leq k(t) \leq k_+$, галсами (см. рис. 8). Эта траектория состоит из отрезков, направленных вдоль радиуса, и дуг окружностей. Причем суммарная длина этих дуг мала по сравнению с суммарной длиной отрезков, направленных вдоль радиуса. Пусть процесс $k(t)$ подчиняется гипотезе эргодичности — “среднее по ансамблю совпадает со средним по траектории”, и имеет предельное при $t \rightarrow \infty$ распределение $p(dk)$, $k_- \leq k \leq k_+$. Тогда выполняется неравенство (1), характеризующее вероятность обнаружения при движении аппаратов по траектории с переменным радиусом.

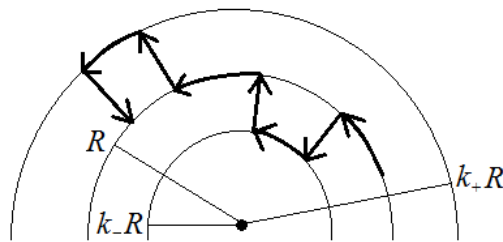


Рис. 8. Движение аппарата по траектории с переменным радиусом.

Пусть теперь аппараты движутся по некоторому отрезку BA длиной R в одном направлении и, дойдя до его конца, поворачивают и движутся в обратном направлении (см. рис. 9). Полагаем, что расстояние между соседними по движению аппаратами равно $2R/n$, подобная модель была рассмотрена в [10]. Тогда круги обзора,

связанные с локаторами на аппаратах, перемещаются по цилиндрической поверхности S с образующей A_*A_{**} длиной $2r$ и направляющей $B_*A_*B_*$ длиной $2R$. Строго говоря, эта поверхность представляет собой сильно вытянутый эллиптический цилиндр (механическим аналогом является металлическая заготовка после полного деформирования под прессом).

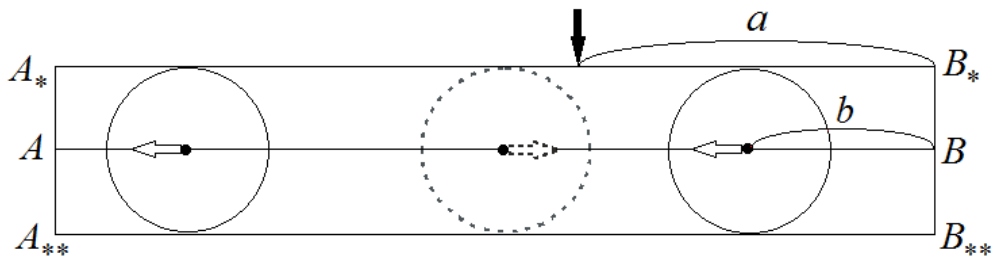


Рис. 9. Движение аппаратов и объекта в неподвижной системе координат (жирной стрелкой указано направление движения объекта).

Объект в неподвижной системе координат движется вертикально, и его горизонтальная координата в момент пересечения полосы равна a , $0 \leq a \leq R$. Перейдем в систему координат, связанную с аппаратами, движущимися по цилиндрической поверхности S . Обозначим через b расстояние от точки B до ближайшего по направлению движения (справа налево на рис. 9) аппарата.

Пусть вероятностное распределение случайного вектора (a, b) является равномерным на прямоугольнике $[0, R] \times [0, 2R/n]$. Тогда в системе координат, связанной с движущимися аппаратами, на отрезке A_*B_* можно указать подотрезки длиной $l = 2r/\sin\alpha$, при попадании в которые объект будет обнаружен (см. рис. 10).

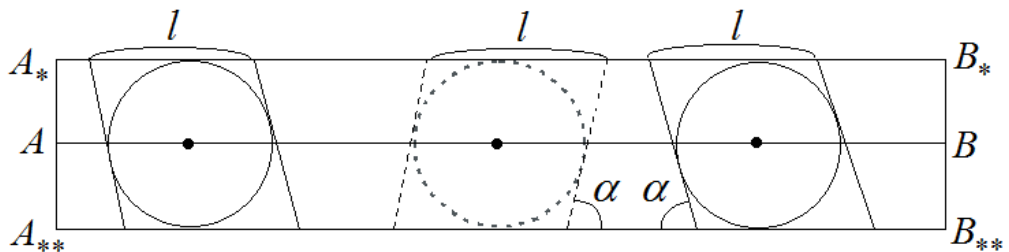


Рис. 10. Движение объекта в системе координат, связанной с движущимися аппаратами.

При движении аппаратов по прямой задача вычисления вероятности обнаружения объекта оказывается более сложной, чем при движении аппаратов по окружности. Получить относительно простое решение этой задачи удалось, перейдя от вероятности обнаружения объекта к минимальному числу M аппаратов, при котором вероятность обнаружения объекта равна единице, а именно, $M = \min\left(n : \frac{nr}{R\sin\alpha} \geq 1\right)$.

Подобный прием может быть использован при работе с мультиагентными системами, рассмотренными в [11].

В заключение надо подчеркнуть, что мы рассмотрели динамический вариант задачи Бюффона, в который включены такие характеристики, как траектории и скорости движения постороннего мобильного объекта и необитаемых подводных аппаратов. Это обстоятельство приводит к необходимости перехода к системам координат, связанным с движущимися аппаратами, и дополнительным, не всегда очевидным, геометрическим построениям и применению метода малого параметра.

Авторы благодарят чл.-корр. РАН А. Ф. Щербатюка за полезные обсуждения материалов статьи.

Список литературы

- [1] T. H. Chung, G. A. Hollinger, V. Isler, “Search and pursuit-evasion in mobile robotics”, *Autonomous Robots*, **31**:4, (2011), 299–316.
- [2] E. Galceran, M. Carreras, “A survey on coverage path planning for robotics?”, *Robotics and Autonomous Systems*, **61**:12, (2013), 1258–1276.
- [3] B. Alspach, “Searching and sweeping graphs: a brief survey”, *Le Matematiche*, **59**:1, 2, (2006), 5–37.
- [4] P. Kafka, J. Faigl, P. Vana, “Random Inspection Tree Algorithm in visual inspection with a realistic sensing model and differential constraints”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2016, 2782–2787.
- [5] M. G. Kendall, P. A. P. Moran, *Geometrical probabilities*, Griffin and Co., London, 1963.
- [6] R. V. Ambartzumian, *Combinatorial integral geometry*, J. Wiley and Sons, Chichester, 1982.
- [7] C. M. Monasterio, G. Oshanin, G. Schehr, “First passages for a search by a swarm of independent random searchers”, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2011**:6, (2011), 6–22.
- [8] М. А. Гузев, Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, “Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта необитаемыми подводными аппаратами”, *Материалы седьмой Всероссийской научно-технической конференции “Технические проблемы освоения мирового океана”*, 2017, 426–433.
- [9] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, Москва, 1989.
- [10] И. В. Кожемякин, Д. В. Никущенко, В. А. Рыжов, Н. Н. Семенов, М. Н. Чемоданов, “Развитие системы автономного группового управления разнородными надводными и подводными необитаемыми аппаратами”, *Материалы седьмой Всероссийской научно-технической конференции “Технические проблемы освоения мирового океана”*, 2017, 48–57.
- [11] M. Maggio, E. Bini, C. Georgios et al., “A Game-Theoretic Resource Manager for RT Application”, *Proceedings of the 25-th Euromicro Conference on Real-Time Systems*, 2013, 57–66.

Поступила в редакцию
18 октября 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проекты № 18-5-050, 18-5-083) и при частичной поддержке РФФИ (соглашение № 14-50-00034, подготовка обзора публикаций по теме исследования).

Guzev M. A., Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Sporishev M. S. Probability of detecting an extraneous mobile object by Autonomous unmanned underwater vehicles is as a solution of Buffon problem. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2017. V. 17. No 2. P. 191–200.

ABSTRACT

Underwater robotics addresses the problem of object detection apparatus. Offers a probabilistic formulation of the problem, which uses the reduction of the detection task to a classical task of Buffon. This formulation arises naturally in the formulation of the problem in the coordinate system associated with the apparatus. It is shown that the problem allows analysis in the presence of an asymptotic parameter, determined by the ratio of the local scan size of the apparatus to the global size of the problem under consideration.

Key words: *extraneous mobile object, Autonomous underwater vehicle, the probability of detection, the problem of Buffon.*