УДК 517.54
MSC2010 30C10 + 30C15 + 30C85

© В. Н. Дубинин[1], А. С. Афанасьева-Григорьева[2]

О лемнискатах рациональных функций

Рассматривается влияние связности некоторых лемнискат рациональной функции на величину модуля производной этой функции, а также роль лемнискат в задачах об экстремальном разбиении сферы Римана.

Ключевые слова: *рациональная функция, лемниската, экстремальное разбиение, емкость конденсатора, симметризация.*

Введение

Пусть t — произвольное число, $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Под лемнискатой рациональной функции f будем понимать множество

$$E_f(t) = \{z\colon |f(z)| = t\}.$$

В данной статье продолжаются исследования свойств лемнискат полиномов и рациональных функций, начатые в работах [1–5]. В 1967 году Эрдеш поставил задачу о нахождении верхней оценки модуля производной монома f на связной лемнискате $E_f(1)$ (см. [6, 7]). Решение задачи Эрдеша дано Еременко и Лэмпертом [8]. Точная оценка модуля производной полинома при фиксированной связной лемнискате в любой точке плоскости (не только на лемнискате) приводится в [4]. В недавней статье [5] доказывается теорема искажения для рациональных функций с учетом связных лемнискат этой функции. Продолжая это исследование, мы вводим в первой части данной статьи понятие пояса лемнискат рациональной функции и рассматриваем двуточечную теорему искажения, зависящую от величины этого пояса. Там же показывается существование рациональных функций f с “узким” поясом лемнискат и сколь угодно большим значением модуля $|f'|$ на этих лемнискатах. Во второй части обсуждается связь лемнискат рациональной функции с некоторыми задачами об экстремальном разбиении комплексной сферы (см. [9, 10]).

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru` (В. Н. Дубинин), `a.s.afanasevagrigoreva@yandex.ru` (А. С. Афанасьева-Григорьева).

1. Связность лемнискат и теорема искажения

Прежде всего заметим, что лемниската $E_f(t)$ рациональной функции f является линией уровня гармонической функции

$$h(z) := \log |f(z)|.$$

Отсюда следуют известные геометрические свойства лемнискат. В дополнение к ним приведем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если для данной рациональной функции f степени $p \geqslant 2$ существует связная лемниската, то найдутся такие числа t_1 и t_2, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \infty$, что лемниската $E_f(t)$ является связной для всех $t \in [t_1, t_2]$ и несвязной при $t \notin [t_1, t_2]$.*

Доказательство. Если $E_f(t)$ — единственная связная лемниската функции f, то теорема 1, очевидно, верна, при этом $t_1 = t_2 = t$. Предположим теперь, что таких лемнискат более чем одна, и пусть $L(s)$ означает „линию" уровня функции h, т. е.

$$L(s) = \{z\colon h(z) = s\}, \ -\infty \leqslant s \leqslant +\infty.$$

Тогда существуют нижняя и верхняя грани

$$s_1 = \inf\{s\colon L(s) \text{ — связное множество}\},$$
$$s_2 = \sup\{s\colon L(s) \text{ — связное множество}\},$$

причем $-\infty \leqslant s_1 < s_2 \leqslant +\infty$. Покажем, что для любого $s \in [s_1, s_2]$ линии уровня $h(z) = s$ суть связные множества. Для этого достаточно убедиться в том, что если для некоторых конечных чисел $s', s'', s' < s''$, линии уровня $h(z) = s'$ и $h(z) = s''$ — связные множества, то для любого $s \in (s', s'')$ линия $h(z) = s$ также является связным множеством[3]. Из принципа максимума следует, что множество $G = \{z\colon s' < h(z) < s''\}$ является невырожденной двусвязной областью. Поэтому G есть образ кругового кольца (пусть K) при некотором конформном отображении $z = \varphi(\zeta)$. Функция $h(\varphi(\zeta))$ гармоническая на K и постоянная на каждой граничной компоненте кольца K. Следовательно, h — линейная функция логарифма, и её линии уровня — окружности. Поэтому линии уровня функции $h(z)$ являются связными как образы окружностей при отображении φ. Осталось положить $t_1 = e^{s_1}, t_2 = e^{s_2}$ и заметить, что линии уровня $h(z) = s$, $s \in [s_1, s_2]$, суть лемнискаты $E_f(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Теорема 1 доказана. □

Множество

$$L_f(t_1, t_2) = \bigcup_{t \in [t_1, t_2]} E_f(t),$$

где t_1 и t_2 из теоремы 1, будем называть *поясом лемнискат*. Пояс лемнискат представляет собой двусвязную область, модуль которой (в случае $t_1 \neq 0$, $t_2 \neq \infty$) равен $2\pi p/\log(t_2/t_1)$, где p — степень рациональной функции f. В случае когда f — полином степени не меньше двух, пояс лемнискат равен $L_f(t_1, \infty)$, где

$$t_1 = \max\{|f(z)|\colon f'(z) = 0\}.$$

[3]Это наблюдение было подсказано авторам Л. Ковалевым.

При фиксированных натуральном $p>1$ и $0<\varkappa<1$ понадобится рациональная функция $Z_p(z)\equiv Z_p(z;\varkappa)$, заданная параметрически:

$$Z_p(\operatorname{sn}(u;k);\varkappa) := \operatorname{sn}(u\mathbf{K}(\varkappa)/\mathbf{K}(k);\varkappa), \quad u\in\mathbb{C},$$

где модуль k определяется из условия

$$\mathbf{K}'(k)\mathbf{K}(\varkappa) = p\mathbf{K}'(\varkappa)\mathbf{K}(k), \quad 0<k<1,$$

$\mathbf{K}(\cdot),\mathbf{K}'(\cdot)$ — полные эллиптические интегралы первого рода [11]. Функцию $Z_p(z)$, а также композиции $Z_p(z)$ с дробно-линейными преобразованиями как в области аргумента, так и в области значений $Z_p(z)$ принято называть *дробями Золотарёва* [12,13]. Хорошо известна роль дробей Золотарёва в теории рациональной аппроксимации и расчетах электрических фильтров [11].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p>1,\tau>1$, и пусть f — рациональная функция степени p с поясом лемнискат $L_f(1,\tau)$. Тогда для любых конечных точек z_1 и z_2, отличных от полюсов f, выполняется неравенство*

$$|f'(z_1)f'(z_2)(z_1-z_2)^2| \leqslant |F'(\zeta_1)F'(\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2)^2|, \tag{1}$$

где $F(z)\equiv F(z;p,\tau)=\Phi(Z_p(z;\varkappa))$,

$$\Phi(v)=\sqrt{\tau}\frac{v\sqrt{\varkappa}+1}{1-v\sqrt{\varkappa}}, \quad \sqrt{\varkappa}=\frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1},$$

значение $\zeta_1=F^{-1}((-1)^p|f(z_1)|)$ берется из множества $(-\infty,\alpha]\cup[-\alpha,+\infty)$, а значение $\zeta_2=F^{-1}(|f(z_2)|)$ — из промежутка $[\beta,-\beta)$. Здесь $\alpha(\beta)$ — наименьшее (наибольшее) значение прообраза $Z_p^{-1}(-1/\sqrt{\varkappa})$. Равенство в (1) достигается, например, в случае $f(z)=F(z)$ и $z_1\in(-\infty,\alpha]\cup[-\alpha,+\infty)$, $z_2\in[\beta,-\beta)$.

Доказательство. Случай равенства в соотношении (1) проверяется непосредственным вычислением, исходя из определения функции F. Для доказательства неравенства (1) достаточно рассмотреть ситуацию, когда $z_1\neq z_2$ и $f'(z_1)\neq 0$, $f'(z_2)\neq 0$. Обозначим через $\mathscr{F}^{-1}$ аналитическую функцию, обратную функции f и рассматриваемую как однозначную функцию на своей римановой поверхности $\mathscr{R}(f)$. Пусть $\mathscr{F}:\overline{\mathbb{C}}_z\to\mathscr{R}(f)$ — отображение, обратное $\mathscr{F}^{-1}$ в этом представлении. В случае $f=F$ указанные функции будем обозначать через $\mathscr{F}_e^{-1}$ и $\mathscr{F}_e$, $\mathscr{F}_e:\overline{\mathbb{C}}_z\to\mathscr{R}(F)$.

При достаточно малом $r>0$ рассмотрим конденсатор C на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$:

$$C=(\{z\colon |z-z_1|>r\},\{z\colon |z-z_2|\leqslant r\}).$$

Известно, что емкость этого конденсатора удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\operatorname{cap} C = -\frac{\pi}{\log r} - (\pi\log|z_1-z_2|)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r\to 0.$$

(см., например, [14, теорема 2.5])[4]. С другой стороны, конформная инвариантность емкости дает

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap}(\mathscr{B}, \mathscr{E}),$$

где $\mathscr{B} = \mathscr{F}(\{z\colon |z - z_1| > r\})$, $\mathscr{E} = \mathscr{F}(\{z\colon |z - z_2| \leqslant r\})$. Поскольку $L_f(1, \tau)$ — пояс лемнискат функции f, то конденсатор $(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ удовлетворяет условию теоремы 2 работы [5]. Согласно этой теореме

$$\operatorname{cap}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) \geqslant \operatorname{cap}(\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}, \operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E}).$$

Подробное описание множеств $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}$ и $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E}$ дано в [5]. Нетрудно увидеть, что множество $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}$ является дополнением до поверхности $\mathscr{R}(f)$ замкнутого почти круга, однолистно лежащего над почти кругом, центр которого расположен в точке $(-1)^p |f(z_1)|$, а радиус равен $|f'(z_1)|r$. Аналогично компакт $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E}$ представляет собой замкнутый почти круг, однолистно лежащий над почти кругом, центр которого расположен в точке $|f(z_2)|$, а радиус равен $|f'(z_2)|r$. Функция $\mathscr{F}_e^{-1}$ отображает конденсатор $(\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}, \operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E})$ на конденсатор $C^* = (B^*, E^*)$ с сохранением емкости:

$$\operatorname{cap}(\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}, \operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E}) = \operatorname{cap} C^*.$$

Множество B^* является дополнением до $\overline{\mathbb{C}}_z$ замкнутого почти круга с центром в точке ζ_1, а E^* есть почти круг с центром в ζ_2, причем радиус первого почти круга равен $|f'(z_1)/F'(\zeta_1)|r$, а радиус второго есть $|f'(z_2)/F'(\zeta_2)|r$. Теорема 2.5 из [14] дает

$$\operatorname{cap} C^* = -\frac{\pi}{\log r} + \pi \left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{f'(z_1) f'(z_2)}{F'(\zeta_1) F'(\zeta_2)} \right| - \log |\zeta_1 - \zeta_2| \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 +$$
$$+ o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \to 0.$$

Суммируя выписанные соотношения, получаем неравенство (1). Теорема 2 доказана. □

Неравенство (1) содержит неравенство (1.1) из [5] как частный случай и не вытекает из (1.1) с помощью мебиусовой замены переменных.

Можно показать, что при $\tau \to \infty$ оценка (1) стремится к двуточечной оценке для полиномов [4]. Естественным будет рассмотреть поведение правой части (1) в случае $\tau \to 1$. Прямое вычисление предела правой части затруднительно. Тем не менее, справедливо следующее (ожидаемое) утверждение.

Теорема 3. *Для любых фиксированных $p > 1$ и $M > 0$ существует число $\tau_0 > 1$ такое, что для всех τ, $1 < \tau < \tau_0$, найдется рациональная функция f степени p с поясом лемнискат $L_f(1, \tau)$, удовлетворяющая неравенству*

$$|f'(0) f'(1)| > M.$$

[4]В данной статье и в работе [5] используется обозначение конденсатора, отличное от обозначения, принятого в книге [14]

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(z) = F\left((z_2 - z_1)z + z_1\right),$$

где функция F из теоремы 2, $z_1 = -1/k - 2$, $z_2 = -1/k - 1$ и модуль k взят из определения дроби Золотарёва Z_p. Нетрудно увидеть, что степень рациональной функции f равна p и $L_f(1,\tau)$ является ее поясом лемнискат. Кроме того,

$$|f'(0)f'(1)| = |F'(z_1)F'(z_2)(z_2 - z_1)^2| = |F'(z_1)F'(z_2)|.$$

Поэтому для доказательства теоремы 3 достаточно получить равенство

$$\lim_{\tau\to 1} |F'(z_1)F'(z_2)| = \infty.$$

Заметим, что при $\tau \to 1$ выполняется

$$\varkappa \to 0, \ \ \mathbf{K}'(\varkappa)/\mathbf{K}(\varkappa) \to \infty.$$

Следовательно,

$$\mathbf{K}'(k)/\mathbf{K}(k) \to \infty \ \text{ и } \ k \to 0.$$

Функция $z = \operatorname{sn}(u;k)$ конформно и однолистно отображает прямоугольник

$$|\operatorname{Re} u| < \mathbf{K}(k), \ \ 0 < \operatorname{Im} u < \mathbf{K}'(k)$$

на верхнюю полуплоскость так, что точки $\pm\mathbf{K}(k)$, $\pm\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}'(k)$ переходят в точки ± 1, $\pm 1/k$ соответственно. При $\tau \to 1$ $(k \to 0)$ функция $\operatorname{sn}(u;k)$ стремится к отображению полуполосы

$$|\operatorname{Re} u| < \mathbf{K}(k), \ \ \operatorname{Im} u > 0$$

на верхнюю полуплоскость. Поэтому дробь Золотарёва Z_p стремится внутри $\operatorname{Im} z > 0$ к отображению верхней полуплоскости на себя. Указанное отображение переводит точки ± 1, ∞ в точки ± 1, ∞ соответственно и, следовательно, является тождественным. Обозначим через D_p односвязную область в z-плоскости, которая содержит бесконечно удаленную точку и которую функция Z_p конформно и однолистно отображает на плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$. В силу вышесказанного эта область стягивается к бесконечности при $\tau \to 1$. Следовательно,

$$r(D_p, z_k) \to 0 \ \text{ при } \ \tau \to 1, \ \ k = 1, 2.$$

Функция F отображает область D_p на плоскость с разрезом по отрезку $[1, \tau]$ так, что $F(z_k) \in [-\tau, -1]$, $k = 1, 2$. Отсюда вытекает

$$r\left(F(D_p), F(z_k)\right) \geqslant \mathrm{const}$$

при ограниченном τ. Осталось заметить, что

$$r\left(F(D_p), F(z_k)\right) = |F'(z_k)| r(D_p, z_k), \ \ k = 1, 2.$$

Теорема 3 доказана. □

В связи с теоремой 3 возникает задача об исследовании рациональных функций с одной связной лемнискатой, в частности, функций с критическими значениями на окружности.

2. Лемнискаты и задачи об экстремальном разбиении

Задачи об экстремальном разбиении плоских областей имеют богатую историю (см., например, [9, 10, 14]). В данном разделе рассматриваются лишь некоторые аспекты экстремального разбиения сферы Римана, связанные с лемнискатами рациональных функций. Всюду ниже f — рациональная функция, отличная от постоянной, для которой бесконечно удаленная точка не является ни нулем, ни полюсом. В этом случае функция f представима в виде

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{\delta_k}, \tag{2}$$

где $c \neq 0$, $z_k \neq z_l$, $k \neq l$, $k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, и $\delta_k \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, — целые числа $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_k = 0$. Любая другая рациональная функция сводится к виду (2) с помощью дробно-линейной замены переменной. Для функции (2) определим коэффициенты $c_k(f)$ с помощью соотношений

$$|f(z)| \sim c_k(f)|z - z_k|^{\delta_k}, \quad z \to z_k, \quad \text{при } \delta_k > 0;$$
$$|f(z)| \sim \frac{1}{c_k(f)}|z - z_k|^{\delta_k}, \quad z \to z_k, \quad \text{при } \delta_k < 0,$$

$k = 1, \ldots, n$. Если z_k — простой ноль функции f, то $c_k(f) = |f'(z_k)|$. В случае простого полюса z_k полагаем $f'(z_k) := \lim_{z \to z_k} (1/f(z))'$, и тогда вновь $c_k(f) = |f'(z_k)|$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим через $g_{B_f(t)}(z_k, z_l)$ функцию Грина связной компоненты множества $B_f(t)$, содержащей точку z_k, а через $r(B_f(t), z_k)$ — внутренний радиус этой компоненты относительно точки z_k, $k = 1, \ldots, n$.

Теорема 4. *Пусть функция f определена выше. Тогда для любого числа t, $0 < t < \infty$, лемниската $E_f(t)$ разбивает сферу Римана $\overline{\mathbb{C}}_z$ на связные компоненты открытого множества*

$$B_f(t) := \{z : |f(z)| \neq t\},$$

причем

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| \log c_k(f) = -\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log r(B_f(t), z_k) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l g_{B_f(t)}(z_k, z_l). \tag{3}$$

Кроме того, для любого другого открытого множества B, содержащего точки z_k, $k = 1, \ldots, n$, выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| \log c_k(f) \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log r(B, z_k) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l g_B(z_k, z_l). \tag{4}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что из теоремы 12 работы [15] следует равенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\delta_k| \log c_k(f) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l \log |z_k - z_l|. \tag{5}$$

Поэтому теорема 2.9 и формулы (2.16), (2.17) в [14] дают равенство (3). Неравенство (4) вытекает из (5) и теоремы 2.8 [14] с учетом тех же формул (2.16) и (2.17) из книги [14]. Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим простейшие следствия теоремы 4.

Следствие 1. *Предположим, что все нули a_k и полюса b_k рациональной функции f степени p простые, причем*

$$|a_k| < 1 < |b_k|, \quad k = 1, \ldots, p. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{p} |f'(a_k)f'(b_k)| \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}[(1-|a_k|^2)(|b_k|^2-1)]} \prod_{k=1}^{p} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} \left| \frac{(a_k - a_l)(b_k - b_l)}{(1-\overline{a}_k a_l)(1-\overline{b}_k b_l)} \right|.$$

Равенство достигается в случае $b_k = 1/\overline{a}_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Доказательство. Пусть $b_k = 1/\overline{a}_k$, $k = 1, \ldots, p$. Тогда окружность $|z| = 1$ является лемнискатой функции

$$f(z) = c \prod_{k=1}^{p} \frac{z - a_k}{z - b_k} = c \prod_{k=1}^{p} \left(a_k \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z} \right).$$

Равенство (3) дает

$$\sum_{k=1}^{p} \log |f'(a_k)f'(b_k)| = -\sum_{k=1}^{p} \log [r(U, a_k)(U^*, b_k)] -$$
$$-\sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} \mathrm{g}_U(a_k, a_l) + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} \mathrm{g}_{U^*}(b_k, b_l),$$

где $U = \{z\colon |z| < 1\}$, $U^* = \{z : |z| > 1\}$. Замечая, что

$$\mathrm{g}_U(z, a) = \log \left| \frac{1 - \overline{a}z}{z - a} \right|, \quad \mathrm{g}_{U^*}(z, b) = \log \left| \frac{1 - \overline{b}z}{z - b} \right|,$$
$$r(U, a) = 1 - |a|^2, \quad r(U^*, a) = |b|^2 - 1,$$

приходим к равенству в следствии 1. Для произвольных точек a_k, b_k, $k = 1, \ldots, p$, следствие 1 вытекает из неравенства (4), где в качестве множества B необходимо взять объединение $U \bigcup U^*$. Следствие доказано. $\square$

В силу соотношения (5) неравенство следствия 1 эквивалентно элементарному неравенству для комплексных чисел a_k, b_k, $k = 1, \ldots, p$, удовлетворяющих условиям (6):

$$\prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{p} |(1 - \overline{a}_k a_l)(1 - \overline{b}_k b_l)| \leqslant \prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{p} |a_k - b_l|^2.$$

Следствие 2. *Если все нули a_k и полюса b_k рациональной функции f степени p простые и если*

$$\operatorname{Im} a_k > 0 > \operatorname{Im} b_k, \quad k = 1, \ldots, p, \tag{7}$$

то

$$\prod_{k=1}^{p} |f'(a_k) f'(b_k)| \leqslant \frac{1}{\prod_{k=1}^{p} |4(\operatorname{Im} a_k) \operatorname{Im} b_k|} \prod_{k=1}^{p} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{p} \left| \frac{(a_k - a_l)(b_k - b_l)}{(a_k - \overline{a}_l)(b_k - \overline{b}_l)} \right|.$$

Равенство достигается в случае $b_k = \overline{a}_k$, $k = 1, \ldots, p$.

Доказательство следствия 2 повторяет доказательство предыдущего утверждения с той лишь разницей, что, вместо разбиения сферы на круг $|z| < 1$ и внешность круга $|z| < 1$, следует рассмотреть разбиение сферы на две полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. □

Отметим элементарное неравенство, вытекающее из следствия 2 для любых комплексных чисел a_k, b_k, $k = 1, \ldots, p$, удовлетворяющих соотношениям (7):

$$\prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{p} |(a_k - \overline{a}_l)(b_k - \overline{b}_l)| \leqslant \prod_{k=1}^{p} \prod_{l=1}^{p} |a_k - b_l|^2.$$

Оценивая правую часть (3) снизу методами теории потенциала [14], можно получить нижние оценки произведения модулей производных рациональных функций. В качестве примера рассмотрим следующее утверждение, вытекающее из результатов статьи [15].

Следствие 3. *Пусть точки z_k, $k = 1, 3 \ldots, 2p - 1$, являются простыми нулями, а точки z_k, $k = 2, 4 \ldots, 2p$, — полюсами рациональной функции f степени p, причем $|z_k| = 1$, $k = 1, \ldots, 2p$, и для непрерывной ветви аргумента выполняются*

$$\arg z_1 < \arg z_2 < \ldots < \arg z_{2p-1} < \arg z_{2p} < \arg z_1 + 2\pi.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{2p} |f'(z_k)| \geqslant \left(\frac{p}{2} \right)^{2p}.$$

Равенство достигается для функции $f(z) = [(z^p - 1)/(z^p + 1)]$.

Доказательство. Учитывая равенство (5), получаем

$$\prod_{k=1}^{2p} |f'(z_k)| = \prod_{k=1}^{2p} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{2p} |z_k - z_l|^{(-1)^{k+1}} \geqslant \left(\frac{p}{2} \right)^{2p}.$$

Последнее неравенство установлено в [15] с помощью разделяющего преобразования конденсаторов (см. также [14, §5.1]). Следствие доказано. □

Список литературы

[1] В. Н. Дубинин, “Лемниската и неравенства для логарифмической емкости континуума”, *Матем. заметки*, **80**:1, (2006), 33–37.

[2] В. Н. Дубинин, “О компонентах лемнискаты, не содержащих критических точек полинома, отличных от его нулей”, Аналитичская теория чисел и теория функций. 25, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **383**, (2010), 77–85.

[3] В. Н. Дубинин, “Некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций, связанные с лемнискатами”, Аналитичская теория чисел и теория функций. 27, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **404**, (2012), 83–99.

[4] В. Н. Дубинин, “Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:1, (2014), 79–89.

[5] В. Н. Дубинин, “Экстремальная задача для производной рациональной функции”, *Матем. заметки*, **100**:5, (2016), 732–738.

[6] W. K. Hayman, *Research Problems in Function Theory*, Univ. of London. The Athlone Press, London, 1967.

[7] P. Erdos, *Some of My Favorite Unsolved Problems. A Tribute to Paul Erdos*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[8] A. Eremenko, L. Lempert, “An extremal problem for polynomials”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:1, (1994), 191–193.

[9] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций”, *Алгебра и анализ*, **9**:3, (1997), 41–103, **9**:5, 1–50.

[10] G. V. Kuz’mina, “Geometric function theory. Jenkins results. The method of modules of curve families”, Аналитичская теория чисел и теория функций. 31, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **445**, (2016), 181–249.

[11] Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, М., 1970.

[12] А. Б. Богатырев, “Чебышёвское представление рациональных функций”, *Матем. сб.*, **201**:11, (2010), 19–40.

[13] A. B. Bogatyrev, “How Many Zolotarev Fractions are There?”, 2015, arXiv: 1511.05346.

[14] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[15] В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, “Приведенный модуль комплексной сферы”, Аналитичская теория чисел и теория функций. 15, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **254**, (1998), 76–94.

Поступила в редакцию
12 июня 2017 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00022).

Dubinin V. N., Afanaseva-Grigoreva A. S. On the lemniscates of rational functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 201–209.

ABSTRACT

The impact of the connectivity of some lemniscates of the rational function on the absolute value of its derivative is considered. The role of the lemniscates in the problems of the extremal decomposition of the Riemann sphere is discussed.

Key words: *rational function, lemniscate, extremal decomposition, condenser capacity, symmetrization.*