Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 210–220

УДК 517.965+517.547.582+511.21
MSC2010 33E05+11B37

© А. А. Илларионов[1,2], М. А. Романов[1]

О связи между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций

Мы исследуем связь между 1-периодическими решениями функционального уравнения

$$f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = \sum_{j\,=\,1}^{N} \varphi_j(x)\psi_j(y)$$

относительно неизвестных $f, \mathrm{g}, \varphi_j, \psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и некоторыми последовательностями комплексных чисел, удовлетворяющих функциональным соотношениям билинейного типа. Полученные результаты используются для решения указанного уравнение в случае, когда $\mathrm{g} = \theta$ — тэта-функция Якоби.

Ключевые слова: *функциональное уравнение, сигма-функция Вейерштрасса, тэта-функция Якоби, формула сложения, эллиптические функции, нелинейные последовательности.*

1. Введение

Рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = \sum_{j\,=\,1}^{N} \varphi_j(x)\psi_j(y) \tag{1}$$

относительно неизвестных $f, \mathrm{g}, \varphi_j, \psi_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Оно тесно связано с эллиптическими функциями. Например, классическая формула сложения в терминах сигма-функции Вейерштрасса имеет вид

$$\sigma(x+y)\sigma(x-y) = \sigma^2(x)\sigma^2(y)(\wp(y) - \wp(x)), \tag{2}$$

где $\wp = -(\ln\sigma)''$ — эллиптическая функция Вейерштрасса. Поэтому пара $(f, \mathrm{g}) = (\sigma, \sigma)$ удовлетворяет соотношению (1), где

$$N = 2, \quad (\varphi_1, \varphi_2) = (\sigma^2, -\wp\sigma^2), \quad (\psi_1, \psi_2) = (\wp\sigma^2, \sigma^2).$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.
[2] Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
Электронная почта: illar_a@list.ru (А. А. Илларионов), romanov@iam.khv.ru (М. А. Романов).

Соотношение (1) также тесно связано с полилинейными функционально-дифференциальными уравнениями (см. [1,2]). Оно изучалось рядом авторов (см. [1–14]). Однако его общее решение известно только при $N=1,2$ (см. [2,3,9]) и $N=3$ (см. [1]). Вопрос об описании множества решений уравнения (1) при $N>3$ является открытым.

Будем также рассматривать дискретные аналоги соотношения (1)

$$A(m+n)B(m-n)=\sum_{j=1}^{N_0} a_j(m)b_j(n) \quad (m,n\in\mathbb{Z}), \tag{3}$$

$$A(m+n+1)B(m-n)=\sum_{j=1}^{N_1} \tilde{a}_j(m)\tilde{b}_j(n) \quad (m,n\in\mathbb{Z}) \tag{4}$$

относительно неизвестных последовательностей $A,B,a_j,b_j,\tilde{a}_j,\tilde{b}_j:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.

Как и в [12] (см. также [15–17]), будем использовать следующую терминологию.

Определение [12,15–17]. Пусть целые (голоморфные на всем $\mathbb{C}$) не равные тождественно нулю функции $f,\mathrm{g}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ удовлетворяют разложению (1) с некоторыми $\varphi_j,\psi_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ и минимально возможным N. Тогда пару (f,g) будем называть *гиперэллиптической системой функций ранга* $R(f,\mathrm{g})=N$.

Определение [12, 15–17]. Пусть не равные тождественно нулю последовательности $A,B:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ удовлетворяют разложениям (3), (4) с некоторыми $a_j,b_j,\tilde{a}_j,\tilde{b}_j:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ и минимально возможными N_0,N_1. Тогда пару (A,B) будем называть *гиперэллиптической системой последовательностей ранга* $R(A,B)$, где

$$R(A,B)=R_0(A,B)+R_1(A,B), \quad R_0(A,B)=N_0, \quad R_1(A,B)=N_1.$$

Пример. Пусть $f(z)=\sigma(z_0z+z_1)$, $\mathrm{g}(z)=\sigma(z_0z+z_2)$, причем $z_0\neq 0$. Тогда из формулы сложения (2) вытекает, что пара (f,g) есть гиперэллиптическая система функций ранга 2. Пусть $A(n)=\sigma(nz_0+z_1)$, $B(n)=\sigma(nz_0+z_2)$, $n\in\mathbb{C}$. Из той же формулы следует, что

$$R_0(A,B)=R_1(A,B)=2, \quad R(A,B)=4,$$

за исключением некоторых вырожденных случаев, в которых $R(A,B)<4$.

В настоящей работе мы изучаем связь между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций. В качестве приложения мы описываем все 1-периодические решения уравнения (1) вида (f,θ), где θ — тэта-функция Якоби.

Замечание 1. В [12, 15–17] ранг гиперэллиптической системы последовательностей определялся как $R(A,B)=\max\{R_0(A,B),R_1(A,B)\}$.

2. Связь между гиперэллиптическими системами последовательностей и функций

Если $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ — функции со значениями в поле $\mathbb{C}$, то через $\operatorname{rank}\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ обозначим ранг системы $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ (максимальное число линейно независимых функций из $\varphi_1,\dots,\varphi_N$).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi_j, \psi_j : X \to \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$, *где* X *— некоторое множество, причем*

$$\forall x, y \in X \quad \sum_{j\,=\,1}^{N} \varphi_j(x)\psi_j(y) = 0.$$

Тогда

$$\operatorname{rank}\{\varphi_j\}_{j\,=\,1}^{N} + \operatorname{rank}\{\psi_j\}_{j\,=\,1}^{N} \leqslant N.$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{rank}\{\varphi_j\}_{j\,=\,1}^{N} = r$. Не умаляя общности, считаем, что $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ линейно независимы. Тогда существуют такие не равные тождественно нулю наборы $(c_{l1}, \ldots, c_{lr}) \in \mathbb{C}^r$, $l = \overline{r+1, N}$, что

$$\varphi_l = \sum_{j\,=\,1}^{r} c_{lj}\varphi_j, \qquad l = \overline{r+1, N}.$$

Следовательно,

$$0 = \sum_{j\,=\,1}^{r} \varphi_j\psi_j + \sum_{l\,=\,r+1}^{N} \varphi_l\psi_l = \sum_{j\,=\,1}^{r} \varphi_j \left(\psi_j + \sum_{l\,=\,r+1}^{N} c_{lj}\psi_l \right).$$

Поскольку $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ линейно независимы, то

$$\psi_j = -\sum_{l\,=\,r+1}^{N} c_{lj}\psi_l, \quad j = \overline{1, r} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank}\{\psi_j\}_{j\,=\,1}^{N} \leqslant N - r.$$

□

Будем использовать следующее обозначение:

$$e(z) = \exp(2\pi i z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 2. *Пусть* $R(A, B) = N$ *и выполняются соотношения* (3), (4). *Тогда существуют* $m_s, n_s \in \mathbb{Z}$, $t_{js}, h_{js} \in \mathbb{C}$, $j, s = \overline{1, N_0}$ *и* $\tilde{m}_s, \tilde{n}_s \in \mathbb{Z}$, $\tilde{t}_{js}, \tilde{h}_{js} \in \mathbb{C}$, $j, s = \overline{1, N_1}$ *такие, что*

$$a_j(m) = \sum_{s\,=\,1}^{N_0} t_{js} A(m + n_s) B(m - n_s), \quad j = \overline{1, N_0},$$

$$b_j(n) = \sum_{s\,=\,1}^{N_0} h_{js} A(m_s + n) B(m_s - n), \quad j = \overline{1, N_0},$$

$$\tilde{a}_j(m) = \sum_{s\,=\,1}^{N_1} \tilde{t}_{js} A(m + \tilde{n}_s + 1) B(m - \tilde{n}_s), \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$\tilde{b}_j(n) = \sum_{s\,=\,1}^{N_1} \tilde{h}_{js} A(\tilde{m}_s + n + 1) B(\tilde{m}_s - n), \quad j = \overline{1, N_1}.$$

Доказательство. Так как N_0 — наименьшее натуральное, для которого разложение (3) возможно, то $b_1, \ldots, b_{N_0}$ — линейно независимы. Поэтому найдутся такие точки $n_1, \ldots, n_{N_0} \in \mathbb{Z}$, что матрица B с элементами $(B)_{sj} = b_j(n_s)$ $(j, s = \overline{1, N_0})$ является невырожденной. Тогда $a_1(m), \ldots, a_{N_0}(m)$ можно выразить как решение следующей системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{N_0} a_j(m) b_j(n_s) = A(m+n_s)B(m-n_s), \quad s = \overline{1, N_0}.$$

Отсюда вытекают формулы для $a_j(m)$. Остальные соотношения выводятся аналогичным образом. □

Теорема 1. *Пусть f, g — целые, не равные тождественно нулю 1-периодические функции $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Пусть $A, B : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — последовательности коэффициентов Фурье из разложений*

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} A(m) e(mz), \quad \mathrm{g}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} B(n) e(nz). \tag{5}$$

Тогда

$$R(f, \mathrm{g}) = R(A, B).$$

Доказательство. Согласно (5)

$$f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y).$$

Представим сумму из правой части в виде $S_1 + S_2$, где S_1 состоит из слагаемых таких, что $m \equiv n \pmod 2$, а S_2 — $m \equiv n+1 \pmod 2$. Учитывая равенства

$$\mathbb{Z}^2 = \left\{ \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2} \right) : \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \equiv n \pmod 2 \right\} =$$
$$= \left\{ \left(\frac{m+n-1}{2}, \frac{m-n-1}{2} \right) : \quad m, n \in \mathbb{Z}, \quad m \equiv n+1 \pmod 2 \right\},$$

преобразуем сумму S_1 (замена $(m', n') = \left(\frac{m+n}{2}, \frac{m-n}{2}\right)$) и сумму S_2 (замена $(m', n') = \left(\frac{m+n-1}{2}, \frac{m-n-1}{2}\right)$) следующим образом:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{m \equiv n \pmod 2} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y) = \\
&= \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y), \\
S_2 &= \sum_{m \equiv n+1 \pmod 2} A(m)B(n)e((m+n)x)e((m-n)y) = \\
&= \sum_{m', n' \in \mathbb{Z}} A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m'+1)x)e((2n'+1)y).
\end{aligned}$$

Тогда

$$f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = \sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \Big(A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y) + \\ + A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m'+1)x)e((2n'+1)y) \Big). \tag{6}$$

Пусть $R(f,\mathrm{g})=N$. Тогда существуют φ_j,ψ_j, $j=\overline{1,N}$, удовлетворяющие уравнению (1), причем $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$, $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ — линейно независимые системы функций. Нетрудно проверить, что эти функции имеют период 1. Действительно,

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j(x+1)-\varphi_j(x))\psi_j(y) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x+1)\psi_j(y) - \sum_{j=1}^N \varphi_j(x)\psi_j(y) = \\ = f(x+1+y)\mathrm{g}(x-y) - f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = 0.$$

Поскольку $\psi_1,\dots,\psi_N$ линейно независимы, то $\varphi_j(x+1)=\varphi_j(x)$. Периодичность ψ_j доказывается аналогичным образом. Так как φ_j,ψ_j целые (см. [2]), то их можно разложить в равномерно сходящиеся на любом компакте ряды Фурье:

$$\varphi_j(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_j(s)e(sx), \qquad \psi_j(y) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_j(l)e(ly).$$

Подставляя эти разложения в (1) и учитывая (6), получаем

$$\sum_{m',n'\in\mathbb{Z}} \Big(A(m'+n')B(m'-n')e(2m'x)e(2n'y) + \\ + A(m'+n'+1)B(m'-n')e((2m+1)'x)e((2n'+1)y) \Big) = \\ = \sum_{s,l\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^N a_j(s)b_j(l) \right) e(sx)e(ly).$$

Сравнивая коэффициенты Фурье в обеих частях последнего равенства, приходим к соотношениям

$$A(m'+n')B(m'-n') = \sum_{j=1}^N a_j(2m')b_j(2n'), \tag{7}$$

$$A(m'+n'+1)B(m'-n') = \sum_{j=1}^N a_j(2m'+1)b_j(2n'+1), \tag{8}$$

$$0 = \sum_{j=1}^N a_j(2m')b_j(2n'+1), \tag{9}$$

$$0 = \sum_{j=1}^N a_j(2m'+1)b_j(2n').$$

Пусть $a_j^+(m)=a_j(2m)$, $b_j^-(n)=b_j(2n+1)$. Вследствие (7), (8),

$$R_0(A,B) \leqslant r_0 = \operatorname{rank}\{a_j^+\}_{j=1}^N, \quad R_1(A,B) \leqslant r_1 = \operatorname{rank}\{b_j^-\}_{j=1}^N.$$

Согласно лемме 1 из (9) следует, что $r_0+r_1\leqslant N$. Поэтому

$$R(A,B)=R_0(A,B)+R_1(A,B)\leqslant r_0+r_1\leqslant N.$$

Таким образом, $R(A,B)\leqslant R(f,\mathrm{g})$. Осталось доказать, что $R(f,\mathrm{g})\leqslant R(A,B)$.

Пусть $R(A,B)=N$. Тогда существуют последовательности $a_j,b_j,\tilde{a}_j,\tilde{b}_j:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющие (3), (4), причем $N_0+N_1=N$. Положим

$$\begin{aligned}
\varphi_j(x)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_j(m)e(2mx),\quad j=\overline{1,N_0},\\
\varphi_{j+N_0}(x)&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\tilde{a}_j(m)e((2m+1)x),\quad j=\overline{1,N_1},\\
\psi_j(y)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}b_j(n)e(2ny),\quad j=\overline{1,N_0},\\
\psi_{j+N_0}(y)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{b}_j(n)e((2n+1)y),\quad j=\overline{1,N_1}.
\end{aligned}$$

Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте. Действительно, вследствие (6), ряды

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}A(m+n_s)B(m-n_s)e(2mx),\quad s=\overline{1,N_0}$$

сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте. Поэтому, используя лемму 2, получаем, что ряд

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_j(m)e(2mx)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{s=1}^{N_0}t_{js}A(m+n_s)B(m-n_s)\right)e(2mx)$$

также сходится абсолютно и равномерно на любом компакте. Сходимость остальных рядов доказывается аналогичным образом.

Используя (6) и (3), (4), получаем

$$\begin{aligned}
f(x+y)\mathrm{g}(x-y)&=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\Big(A(m+n)B(m-n)e(2mx)e(2ny)+\\
&+A(m+n+1)B(m-n)e((2m+1)x)e((2n+1)y)\Big)=\\
&=\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=1}^{N_0}a_j(m)b_j(n)e(2mx)e(2ny)\right)+\\
&+\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j=1}^{N_1}\tilde{a}_j(m)\tilde{b}_j(n)e((2m+1)x)e((2n+1)y)\right)=\sum_{j=1}^{N}\varphi_j(x)\psi_j(y).
\end{aligned}$$

Значит, $R(f,\mathrm{g})\leqslant N=R(A,B)$. □

Замечание 2. Неравенство $R(f,\mathrm{g})\leqslant R(A,B)$, в сущности, уже содержалось в работе [17].

3. Гиперэллиптические системы функций вида (f,θ)

Пусть $\tau\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau>0$ и

$$\theta(z)=\theta(z;\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}e\left(nz+\frac{n^2\tau}{2}\right)$$

— тэта-функция Якоби.

Для любого натурального N определим множество $\mathcal{F}_N(\theta)$, состоящее из функций f вида

$$f(z)=\sum_{l\,=\,1}^{s}(L_l\theta)(z+z_l), \tag{10}$$

где $z_l\in\mathbb{C}$, а L_l — линейные дифференциальные операторы порядка r_l с постоянными коэффициентами, причем

$$\sum_{l\,=\,1}^{s}(r_l+1)\leqslant\frac{N}{2}.$$

Теорема 2. *Множество, состоящее из 1-периодических целых функций f таких, что $R(f,\theta)\leqslant N$, совпадает с $\mathcal{F}_N(\theta)$.*

Доказательство. Пусть множество $\widetilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$ состоит из 1-периодических целых функций f, таких что $R(f,\theta)\leqslant N$. Докажем сначала, что $\mathcal{F}_N(\theta)\subset\widetilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$. Согласно классическим теоремам сложения $R(\theta,\theta)=2$, то есть

$$\theta(x+y)\theta(x-y)=\varphi_1(x)\psi_1(y)+\varphi_2(x)\psi_2(y).$$

Используя замену $u=x+y$, $v=x-y$, перепишем последнее соотношение в виде

$$\theta(u)\theta(v)=\varphi_1\left(\frac{u+v}{2}\right)\psi_1\left(\frac{u-v}{2}\right)+\varphi_2\left(\frac{u+v}{2}\right)\psi_2\left(\frac{u-v}{2}\right). \tag{11}$$

Пусть $L_l=L_l\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка r_l. Применяя этот оператор к (11), получаем уравнение

$$(L_l\theta)(u)\cdot\theta(v)=\sum_{j\,=\,0}^{r_l}\left(\varphi_1^{(j)}\left(\frac{u+v}{2}\right)\Psi_j\left(\frac{u-v}{2}\right)+\varphi_2^{(j)}\left(\frac{u+v}{2}\right)\widetilde{\Psi}_j\left(\frac{u-v}{2}\right)\right),$$

где $\varphi_1^{(j)}$ и $\varphi_2^{(j)}$ — производные j-го порядка функций φ_1 и φ_2, а $\Psi_j,\widetilde{\Psi}_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — некоторые функции, определяемые через линейные комбинации производных функций ψ_1 и ψ_2. Возвращаясь к исходным переменным x,y, приходим к выводу:

$$R(L_l\theta,\theta)\leqslant 2(r_l+1).$$

Очевидно, что для любых функций f_1,f_2,g

$$R(f_1+f_2,\mathrm{g})\leqslant R(f_1,\mathrm{g})+R(f_2,\mathrm{g}).$$

Кроме того, $R(f,\mathrm{g})=R(\tilde{f},\mathrm{g})$ при $\tilde{f}(z)=f(z+z_l)$. Значит, если функция f имеет вид (10), то

$$R(f,\theta) \leqslant \sum_{l=1}^{s} 2(r_l+1) \leqslant 2\cdot\frac{N}{2} = N.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_N(\theta)\subset\widetilde{\mathcal{F}}_N(\theta)$. Осталось доказать, что $\widetilde{\mathcal{F}}_N(\theta)\subset\mathcal{F}_N(\theta)$.

Пусть f — целая функция 1-периодическая, причем $R(f,\theta)\leqslant N$. Пусть

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A(m)e(mz), \quad \theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} B(n)e(nz).$$

По теореме 1

$$R(A,B)\leqslant N.$$

Кроме того, $B(n)=e(n^2\tau/2)$. Положим

$$\widetilde{A}(m) = A(m)e(-m^2\tau/2).$$

Нетрудно проверить (см. [17]), что $R(\widetilde{A},1)\leqslant N$, где 1 — последовательность, состоящая из одних единиц. Пусть

$$R_0(\widetilde{A},1) = N_0, \quad R_1(\widetilde{A},1) = N_1, \quad N' = \min\{N_0,N_1\}.$$

Тогда

$$\widetilde{A}(m+n) = \sum_{j=1}^{N'} \hat{a}_j(m)\hat{b}_j(n),$$

где

$$\begin{array}{lll} \hat{a}_j = a_j, & \hat{b}_j = b_j, & \text{если } N_0\leqslant N_1, \\ \hat{a}_j(n) = a_j(n+1), & \hat{b}_j = b_j, & \text{если } N_0 > N_1. \end{array}$$

Рассмотрим уравнения

$$\widetilde{A}(m+n) = \sum_{j=1}^{N'} \hat{a}_j(m)\hat{b}_j(n), \quad n=0,1,\ldots,N'.$$

Их правые части линейно зависимы как $N'+1$ линейные комбинации системы $\{\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_{N'}\}$, состоящей из N' функций. Значит,

$$\exists\,(c_0,\ldots,c_{N'})\in\mathbb{C}^{N'+1}\setminus\{0\}: \quad \forall m\in\mathbb{Z} \quad c_0\widetilde{A}(m)+c_1\widetilde{A}(m+1)+\ldots+c_{N'}\widetilde{A}(m+N') = 0.$$

Согласно теории линейных однородных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами (см. [18]), отсюда вытекает, что функция $\widetilde{A}:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ является квазимногочленом ранга не большего, чем N', то есть

$$\widetilde{A}(m) = \sum_{l=1}^{s} P_l(m)e(z_l m),$$

где P_l — многочлены степени $\deg P_l$, причем

$$\sum_{l=1}^{s}(1+\deg P_l)\leqslant N'.$$

Значит,

$$f(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A(m)e(mz) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widetilde{A}(m)e\left(mz + \frac{m^2\tau}{2}\right) = \sum_{l\,=\,1}^{s} f_l(z), \tag{12}$$

где

$$f_l(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} P_l(m)e\left(m(z+z_l) + \frac{m^2\tau}{2}\right).$$

Пусть

$$P_l(m) = \sum_{k\,=\,0}^{r_l} \alpha_{lk} m^k.$$

Определим дифференциальный оператор

$$L_l = \sum_{k\,=\,0}^{r_l} \frac{\alpha_{lk}}{(2\pi i)^k}\frac{d^k}{dz^k}.$$

Используя определение тэта-функции, получаем

$$(L_l\theta)(z+z_l) = \sum_{k\,=\,0}^{r_l} \frac{\alpha_{lk}}{(2\pi i)^k}\frac{d^k\theta(z+z_l)}{dz^k} = \sum_{k\,=\,0}^{r_l}\alpha_{lk}\sum_{m\in\mathbb{Z}} m^k e\left(m(z+z_l)+\frac{m^2\tau}{2}\right) =$$
$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} P_l(m)e\left(m(z+z_l)+\frac{m^2\tau}{2}\right) = f_l(z).$$

Поскольку

$$\sum_{l\,=\,1}^{s}(1+r_l) = \sum_{l\,=\,1}^{s}(1+\deg P_l) \leqslant N' \leqslant \frac{N}{2},$$

из (12) вытекает, что $f\in\mathcal{F}_N(\theta)$. Значит, $\widetilde{\mathcal{F}}_N(\theta)\subset\mathcal{F}_N(\theta)$. □

Если N — нечетное, то $\mathcal{F}_N(\theta)=\mathcal{F}_{N-1}(\theta)$. Поэтому из теоремы 2 вытекают следующие результаты.

Следствие. *Если N — нечетное, то не существует 1-периодических функций f, таких что $R(f,\theta)=N$.*

Замечание 3. Последнее следствие, по сути, является частным случаем теоремы 1 из [14].

Следствие. *Если N — четное, то множество 1-периодических функций f, таких что $R(f,\theta)=N$ совпадает с $\mathcal{F}_N(\theta)\setminus\mathcal{F}_{N-2}(\theta)$.*

Примеры. Выпишем все 1-периодические функции, удовлетворяющие условию $R(f,\theta)=N$ при $N=2,4,6$.

1. Если $N=2$, то $f(z)=c_0\theta(z+z_0)$, где $c_0\neq 0$.

2. Если $N=4$, то f имеет один из двух типов:

   1) $f(z)=c_0\theta(z+z_0)+c_1\theta'(z+z_0)$, где $c_1\neq 0$;

   2) $f(z)=c_1\theta(z+z_1)+c_2\theta(z+z_2)$, где $c_1c_2\neq 0$, $(z_1-z_2)\notin\mathbb{Z}$.

3. Если $N=6$, то f имеет один из трех типов:

   1) $f(z)=c_0\theta(z+z_0)+c_1\theta'(z+z_0)+c_2\theta''(z+z_0)$, где $c_2\neq 0$;
   2) $f(z)=c_0\theta(z+z_0)+c_1\theta(z+z_1)+c_2\theta'(z+z_1)$, где $c_0c_2\neq 0$, $(z_1-z_0)\notin\mathbb{Z}$;
   3) $f(z)=c_0\theta(z+z_0)+c_1\theta(z+z_1)+c_2\theta(z+z_3)$, где $c_0c_1c_2\neq 0$, $(z_j-z_l)\notin\mathbb{Z}$ при $j\neq l$.

Список литературы

[1] А. А. Илларионов, “Решение функциональных уравнений, связанных с эллиптическими функциями”, *Аналитическая теория чисел*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Тр. МИАН, **299**, МАИК, М., 2017 (в печати).

[2] В. А. Быковский, “Гиперквазимногочлены и их приложения”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.

[3] R. Rochberg, L. Rubel, “A Functional Equation”, *Indiana Univ. Math. J.*, **41**:2, (1992), 363–376.

[4] M. Bonk, “The addition theorem of Weierstrass's sigma function”, *Math. Ann.*, **298**:1, (1994), 591–610.

[5] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, I”, *Aequationes Math.*, **48**, (1994), 171–193.

[6] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, II”, *Aequationes Math.*, **49**, (1995), 122–152.

[7] M. Bonk, “The Characterization of Theta Functions by Functional Equations”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **65**, (1995), 29–55.

[8] P. Sinopoulos, “Generalized sine equations, III”, *Aequationes Math.*, **51**, (1996), 311–327.

[9] M. Bonk, “The addition formula for theta function”, *Aequationes Math.*, **53**:1–2, (1997), 54–72.

[10] P. Sinopoulos, “Contribution to the study of two functional equations”, *Aequationes Math.*, **56**, (1998), 91–97.

[11] A. Jarai, W. Sander, “On the characterization of Weierstrass's sigma function”, *in: Functional Equations – Results and Advances, Adv. Math.*, v. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002, 29–79.

[12] V. Bykovskii, *Elliptic systems of sequences and functions*, Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications February 16–21, 2015, SkolTech, Moscow, Russia, http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo_Bykovskii.pdf.

[13] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функц. анализ и его приложения*, **50**:4, (2016), 43–54.

[14] В. А. Быковский, “О ранге нечетных гиперквазимногочленов”, *Докл. РАН*, **470**:3, (2016), 255–256.

[15] М. Д. Монина, “О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневост. матем. журн.*, **15**:1, (2015), 70–75.

[16] М. Д. Монина, “Мультипликативный метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:1, (2016), 62–68.

[17] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **16**:2, (2016), 115–122.

[18] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 2, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1959, 400 с.

Поступила в редакцию
26 октября 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225.)

Illarionov A. A., Romanov M. A. On the connection between hyperelliptic systems of sequences and functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 210–220.

ABSTRACT

We study the connection between 1-periodic solutions of the functional equation

$$f(x+y)\mathrm{g}(x-y) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x)\psi_j(y) \quad (x, y \in \mathbb{C})$$

and some sequences of special kind. As an application we solve the equation in the case when g is Jacobi theta function.

Key words: *functional equation, Weierstrass sigma function, Jacobi theta function, addition formula, elliptic functions, nonlinear sequences.*