Дальневосточный математический журнал. 2017. Т. 17. № 2. С. 246–256

УДК 517.54
MSC2010 31B99

© Е. Г. Прилепкина[1]

О n-гармоническом радиусе областей в n-мерном евклидовом пространстве

Неравенство Лаврентьева для произведения внутренних радиусов плоских неналегающих областей распространено на случай областей в евклидовом пространстве. При этом вместо внутренних радиусов рассмотрены n-гармонические радиусы Левицкого и требование неналегания областей заменено более слабым геометрическим условием. Техника доказательства основана на методе модулей семейств кривых. Существенную роль в доказательстве играет конформная инвариантность n-модуля семейств кривых в n-мерном евклидовом пространстве. Для внутренних радиусов плоских областей, лежащих в единичном круге, доказано усиление результата Куфарева. Установлено неравенство для n-гармонических радиусов звездообразной области.

Ключевые слова: *конформный радиус, гармонический радиус, модуль семейства кривых, экстремальные разбиения, звездообразная область.*

1. Введение и предварительные сведения о конформном модуле семейств кривых

История задач об экстремальном разбиении восходит к неравенству Лаврентьева

$$r(D_1, a_1) \cdot r(D_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2, \tag{1}$$

где $r(D_1,a_1)$ и $r(D_2,a_2)$ — конформные (внутренние) радиусы плоских неналегающих областей, $a_i \in D_i$, $i=1,2$. Равенство достигается, например, для двух полуплоскостей с общей границей, причем точки a_1 и a_2 симметричны относительно этой границы. Указанная конфигурация и образует “экстремальное разбиение” комплексной плоскости. Большой интерес к задачам об экстремальном разбиении на плоскости вызван многочисленными приложениями в геометрической теории функций.

В дальнейшем неравенство (1) обобщалось в различных направлениях. В частности, условие неналегания областей D_1, D_2 было заменено Дубининым [1, с. 189] на требование непустого пересечения границы $\partial(D_1 \cup D_2)$ и любой дуги окружности, соединяющей точки a_1, a_2. Подобное неравенство справедливо также и для

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: pril-elena@yandex.ru

областей, расположенных на римановых поверхностях и используется при доказательстве неравенства Крауса для многолистных функций [2].

Для областей размерности $n \geqslant 2$ и $p > 1$ Левицкий ввел понятие p-гармонического радиуса, которое в случае плоской области и $p = 2$ совпадает с внутренним радиусом [3]. В [4] изучались свойства гармонического радиуса при $p = 2$ и даны приложения этого понятия в теории уравнений с частными производными. Случай, когда p совпадает с размерностью пространства, был рассмотрен в работе [5].

В наших предыдущих работах [6–9] получен ряд теорем об экстремальном разбиении для p-гармонического радиуса. В частности, в [8] было доказано, что неравенство (1) при условии неналегания областей справедливо и в евклидовом пространстве при замене внутреннего радиуса на n-гармонический (n — размерность пространства). Сейчас мы показываем, что так же, как в плоском случае, требование неналегания можно ослабить (теорема 1). При этом в качестве метода доказательства выбрана другая (по сравнению с плоским случаем) техника — техника модулей семейства кривых. Ключевую роль в доказательстве играет тот факт, что модуль семейства кривых сохраняется при конформных отображениях в случае, когда p совпадает с размерностью пространства. Для $n = 2$ нам удалось также усилить неравенство Куфарева [1, Теорема 6.2], говорящее о произведении внутренних радиусов плоских областей, лежащих в единичном круге (теорема 2). К сожалению, в пространстве конформные отображения ограничены только мебиусовыми отображениями, и это сужает возможности описания экстремальных семейств кривых.

Понятие конформного радиуса на плоскости используется, в частности, при оценке решений нелинейных эллиптических уравнений [4]. При этом важную роль играют точки наибольшего конформного радиуса (так называемые конформные центры). Чтобы установить расположение конформных центров используют методы симметризации. С помощью симметризации нетрудно установить, например, что конформный центр эллипса либо прямоугольника совпадает с центром указанных фигур. Различные способы симметризации (симметризация Шварца, сферическая симметризация, симметризация Штейнера, радиальная симметризация, симметризация относительно гиперсферы, разделяющее преобразование, диссиметризация) широко освещены в литературе (см. например, [1, 10–12]).

В случае, когда мы сталкиваемся со звездообразной относительно нуля областью, мы не можем утверждать, что конформный центр достигается в нуле. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что круг с центром в точке 0.5 радиусом 1 является звездообразной областью относительно нуля и что конформный радиус в нуле равен 0.75, а конформный радиус в точке 0.5 равен 1 (см. формулу (3)). Используя поляризацию относительно гиперсферы [10], в теореме 3 мы установили монотонность отношения конформного n-гармонического радиуса звездообразной области к обычному радиусу точки при движении по лучу к началу.

Для удобства читателя в этом параграфе собраны необходимые нам в дальнейшем свойства n-модуля семейства кривых. Всюду ниже R^n обозначает n-мерное евклидово пространство, состоящее из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geqslant 2$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$, $< x, y > = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярное произведение x и y, а $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ — модуль вектора $x\in R^n$. Для шара и гиперсферы мы введем следующие обозначения: $B(a,r)=\{x\in R^n:|a-x|<r\}$, $E(a,r)=\overline{B(a,r)}$, $S(a,r)=\{x\in R^n:|a-x|=r\}$, $\quad a\in R^n$, $r>0$. Для $\tau\in R$ и $a\in R^n\setminus\{0\}$ через $L(a,\tau)=\{x\in R^n:<x,a>=\tau\}$ мы обозначим гиперплоскость, перпендикулярную вектору a.

Пусть Γ — семейство кривых в R^n. Тогда его *n-модулем*, $n>1$, называется величина

$$M_n(\Gamma)=\inf\int\limits_{R^n} f^n dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $f:R^n\to[0,\infty]$ таким, что неравенство $\int\limits_\gamma f ds\geqslant 1$ выполняется для каждой кривой $\gamma\in\Gamma$. Функция f, которая удовлетворяет упомянутым условиям, называется *допустимой* для семейства Γ, и множество всех таких функций обозначается через $\mathrm{Adm}\Gamma$.

Перечислим некоторые основные свойства n-модуля (см., например, [14, 15]).

Свойство 1. Если $\Gamma_1\subset\Gamma_2$, то $M_n(\Gamma_1)\leqslant M_n(\Gamma_2)$.

Свойство 2. $M_n\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Gamma_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}M_n(\Gamma_i)$.

Свойство 3. Если Γ_2 длиннее, чем Γ_1 (то есть каждая кривая $\gamma\in\Gamma_2$ содержит подкривую, принадлежащую Γ_1), то $M_n(\Gamma_1)\geqslant M_n(\Gamma_2)$.

Свойство 4. Если $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$ – разделенные семейства и Γ_i длиннее, чем Γ, $i=1,2,\ldots$, то $M_n(\Gamma)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}M_n(\Gamma_i)$ (Семейства кривых $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$ называются *разделенными*, если существуют непересекающиеся борелевские множества E_i в R^n такие, что $\int\limits_\gamma\chi_i ds=0$ для любой кривой $\gamma\in\Gamma_i$, где χ_i – характеристическая функция $R^n\setminus E_i$).

Свойство 5. Если $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots$ – разделенные семейства и Γ длиннее, чем Γ_i, $i=1,2,\ldots$, тогда $M_n(\Gamma)^{1/(1-n)}\geqslant\sum\limits_{i=1}^{\infty}M_n(\Gamma_i)^{1/(1-n)}$.

Свойство 6. С учетом равенства n-емкости и n-модуля соответствующего семейства кривых (см. [16]) модуль семейства кривых $\Gamma(r,R)$, соединяющих гиперсферы $S(0,r)$ и $S(0,R)$, $r<R$, вычисляется по формуле ([17, стр. 96])

$$M_n(\Gamma(r,R))=\lambda_n^{n-1}\left(\log\frac{R}{r}\right)^{1-n},$$

где $\lambda_n=(n\omega_n)^{\frac{1}{n-1}}$, а ω_n — объем единичного шара $B(0,1)$. При этом $M_n(\Gamma(r,R))$ совпадает с модулем семейства радиальных отрезков, соединяющих сферы $S(0,r)$ и $S(0,R)$.

Свойство 7 [9, Лемма 1]. Для любой области $D\subset R^n$ существует предел

$$\lim_{r\to 0}\left(\lambda_n M_n(r,a,D)^{\frac{1}{1-n}}+\log r\right), \tag{2}$$

где $M_n(r,a,D)$ – n-модуль семейства кривых $\Gamma(r,a,D)$, соединяющих гиперсферу $S(a,r)$ и ∂D по области D.

Назовем "почти" шаром $\tilde{E}(a,r)$ произвольное замкнутое множество в R^n, удовлетворяющее условию

$$E(a,r_1(r))\subset\tilde{E}(a,r)\subset E(a,r_2(r)),\ r_1(r)\sim r_2(r)\sim r,\quad r\to 0.$$

“Почти гиперсферой” $\widetilde{S}(a,r)$ назовем границу $\partial\tilde{E}(a,r)$. Из свойства 3 модуля семейства кривых легко установить, что предел (2) не изменится при замене гиперсферы $S(a,r)$ на “почти гиперсферу” $\widetilde{S}(a,r)$ в определении модуля $M_n(r,a,D)$.

Свойство 8. Пусть множество $A\subset R^n$, $S(0,\rho)$ — гиперсфера радиуса ρ с центром в точке 0. Обозначим

$$A^+ = A^+(\rho) = \{x \in A :\mid x \mid\leqslant \rho\}$$

$$A^- = A^-(\rho) = \{x \in A :\mid x \mid\geqslant \rho\}$$

$$A^* = \{x \in R^n : x^* \in A\},$$

где x^* симметрична точке x относительно гиперсферы $S(0,\rho)$, то есть $x^* = \rho^2 x/|x|^2$.

$$P^+{}_\rho A = (A \cap A^*)^- \cup (A \cup A^*)^+$$

$$P^-{}_\rho A = (A \cap A^*)^+ \cup (A \cup A^*)^-$$

Аналогично определяется поляризация относительно гиперплоскости.

Пусть E, F — непересекающиеся замкнутые подмножества R^n, $\triangle(E,F)$ — семейство кривых, соединяющих E, F в пространстве R^n. Вновь учитывая равенство модуля и емкости и принцип поляризации [10, 13], получаем

$$M_n(\triangle(E,F)) \geqslant M_n(\triangle(P^-{}_\rho E, P^+{}_\rho F)).$$

Свойство 9. Пусть D и D' — области в R^n, $f\colon D\mapsto D'$ — конформное отображение, Γ — семейство кривых в D. Тогда

$$M_n(f(\Gamma)) = M_n(\Gamma),$$

где $f(\Gamma) = \{f\circ\gamma : \gamma\in\Gamma\}$.

2. Основные результаты

Согласно свойству 7 определим n-гармонический (конформный) радиус $R_n(D,a)$ области D в точке a с помощью равенства

$$R_n(D,a) = \lim_{r\to 0} \exp\left(\lambda_n M_n(r,a,D)^{\frac{1}{1-n}} + \log r\right).$$

Применяя свойство 6, легко увидеть, что n-гармонический радиус шара $B(0,R)$ в центре данного шара совпадает с радиусом R. В силу конформной инвариантности модуля [5, стр. 160]

$$R_n(B(0,\rho),x) = \rho - \frac{|x|^2}{\rho}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть области D_1, D_2 пространства R^n содержат точки a_1, a_2 соответственно, и пусть любая дуга кривой вида*

$$x(t) = a_1 + \frac{tv|a_2-a_1| + a_2 - a_1}{|tv|a_2-a_1| + a_2 - a_1|^2}|a_2-a_1|^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant \infty, \tag{4}$$

соединяющая a_1, a_2, *пересекает границу* $\partial(D_1 \cup D_2)$ (*здесь* $v \in S(0,1)$ — *произвольный фиксированный вектор*). *Тогда*

$$R_n(D_1, a_1) \cdot R_n(D_2, a_2) \leqslant |a_1 - a_2|^2. \tag{5}$$

Знак равенства в (5) *достигается, например, для полупространств с общей границей* L, *проходящей перпендикулярно вектору* $a_2 - a_1$ *через точку* $(a_2 + a_1)/2$.

Доказательство. Рассмотрим семейство кривых Γ, состоящее из радиальных отрезков вида $\{tv : r \leqslant t \leqslant 1/r\}, v \in S(0,1)$, соединяющих $S(0,r)$ и $S(0,1/r)$. Здесь r — достаточно малое число. Согласно свойству 6 модуль семейства Γ равен

$$M_n(\Gamma) = \lambda_n^{n-1} \left(-2 \log r\right)^{1-n}.$$

Построим конформное отображение $f(x) = f(w(x))$, переводящее ∞ в a_1 и 0 в a_2 как суперпозицию инверсии

$$w = w(x) = -e_1 + \frac{2(x + e_1)}{|x + e_1|^2}, \; e_1 = \frac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|}$$

и линейного отображения

$$f(w) = \frac{|a_2 - a_1|}{2} w + \frac{a_2 + a_1}{2}.$$

После элементарных преобразований $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = a_1 + \frac{x|a_2 - a_1| + a_2 - a_1}{|x|a_2 - a_1| + a_2 - a_1|^2} |a_2 - a_1|^2. \tag{6}$$

В процессе отображения $f(x)$ сферы $S(0,r)$ и $S(0,1/r)$ переходят в "почти" сферы $\widetilde{S}(a_2,\rho)$, $\widetilde{S}(a_1,\rho)$, $\rho = r|a_2 - a_1|$. Действительно,

$$|f(x) - a_2|^2 = |a_2 - a_1|^2 \left(1 - \frac{2 < x|a_2 - a_1|, a_2 - a_1 > + |a_2 - a_1|^2}{|x|a_2 - a_1| + a_2 - a_1|^2}\right) =$$
$$= \frac{|a_2 - a_1|^4 |x|^2}{|x|a_2 - a_1| + a_2 - a_1|^2} \sim r^2 |a_2 - a_1|^2, \qquad |x| = r, \quad r \to 0;$$

$$|f(x) - a_1|^2 = \frac{|a_2 - a_1|^4}{|x|a_2 - a_1| + a_2 - a_1|^2} = \frac{|a_2 - a_1|^2}{|x|^2} \left(1 + \frac{2 < x, a_2 - a_1 >}{|x|^2 |a_2 - a_1|} + \frac{1}{|x|^2}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{|a_2 - a_1|^2 r^2}{1 + 2r \cos\varphi + r^2} \sim r^2 |a_2 - a_1|^2, \quad \cos\varphi = \frac{< x, a_2 - a_1 >}{|x||a_2 - a_1|}, \; |x| = \frac{1}{r}, \; r \to 0.$$

Из (6) следует, что семейство кривых $f(\Gamma)$ состоит из частей дуг одномерных окружностей вида (4), соединяющих $\widetilde{S}(a_2,\rho)$, $\widetilde{S}(a_1,\rho)$. В силу конформной инвариантности модуля

$$M_n(f(\Gamma)) = \lambda_n^{n-1} \left(\log \frac{|a_2 - a_1|^2}{\rho^2}\right)^{1-n}.$$

Пусть $\gamma \in f(\Gamma)$. Обозначим через γ_i наименьшую дугу γ, соединяющую $\widetilde{S}(a_i,\rho)$ и ∂D_i, $i=1,2$. Так как, по условию теоремы, γ содержит точку на $\partial(D_1 \cup D_2)$, то γ_1 и γ_2 не имеют общих внутренних точек. Поэтому семейства кривых $\Gamma_i=\{\gamma_i\}$, $i=1,2$ разделены и $f(\Gamma)$ длиннее Γ_i. Применяя свойство 5, получаем неравенство

$$M_n(f(\Gamma))^{1/(1-n)} \geqslant \sum_{i=1}^{2} M_n(\Gamma_i)^{1/(1-n)}.$$

Так как $\Gamma_i \subset \Gamma(\rho,a_i,D_i)$, из предыдущего неравенства и свойства 1 следует соотношение

$$M_n(f(\Gamma))^{1/(1-n)} \geqslant \sum_{i=1}^{2} M_n(\Gamma(\rho,a_i,D_i)^{1/(1-n)}.$$

Вычисляя $M_n(f(\Gamma))^{1/(1-n)}$, получаем

$$\lambda_n^{-1}(\log|a_2-a_1|^2 - 2\log\rho) \geqslant \sum_{i=1}^{2} M_n(\Gamma(\rho,a_i,D_i)^{1/(1-n)}.$$

Остается перейти к пределу при $\rho \to 0$ и воспользоваться определением n-гармонического радиуса. Равенство проверяется непосредственно. □

В плоском случае (n=2) указанный в теореме 1 подход позволяет усилить известное неравенство Куфарева [1, Теорема 6.2], говорящее о произведении внутренних радиусов неналегающих областей в единичном круге. Для формулировки результата нам сперва понадобится построить “экстремальное” семейство кривых.

Пусть U — единичный круг плоскости C_z, a_1, $a_2 \in U$. Обозначим $\zeta=\zeta(z)$ дробно-линейное отображение круга $U \subset C_z$ на круг $U \subset C_\zeta$, переводящее a_1, a_2 в симметричные точки $-bi$, bi, $b>0$. Используя стандартные конформное отображения круга на круг, получаем

$$\zeta(z)=i\frac{w(z)-b}{1-w(z)b}, \quad \text{где} \quad w(z)=\frac{e^{-i\alpha}(z-a_1)}{1-\overline{a_1}z}, \quad b=\frac{1-\sqrt{1-\tau^2}}{\tau},$$

$$\alpha=arg\frac{a_2-a_1}{1-\overline{a_1}a_2}, \quad \tau=\frac{|a_2-a_1|}{|1-\overline{a_1}a_2|}.$$

Через $\zeta_1(\eta)$ обозначим конформное и однолистное отображение круга U плоскости C_η на верхнюю половину круга $U \cap (\mathrm{Im}\zeta>0)$ плоскости C_ζ так, что $\zeta_1(0)=bi$. Функцию $\zeta_1(\eta)$ можно записать как

$$\zeta_1(\eta)=f^{-1}(\omega(\eta)),$$

где

$$\omega(\eta)=\frac{ih(1+\eta)}{1-\eta},\ h=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b}-b\right)$$

отображает круг U на верхнюю полуплоскость и $\omega(0)=ih$, а функция

$$\omega=f(\zeta)=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\zeta^2+\frac{1}{\zeta^2}\right)+1} \tag{7}$$

переводит верхнюю половину круга $U\cap(\mathrm{Im}\zeta>0)$ в верхнюю полуплоскость и $f(bi)=$ $=hi$, $h=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{b}-b\right)$.

Рассмотрим в плоскости C_η радиальные отрезки $O(\varphi)=\{\eta=te^{i\varphi}:0\leqslant t\leqslant 1\}$, соединяющие 0 и ∂U. Образом этих отрезков при отображении $\zeta_1(\eta)$ являются кривые, соединяющие точку bi или с ∂U или с отрезком $[-1,1]$. Пусть $\widehat{\Gamma}$ — семейство тех образов радиальных отрезков, которые соединяют bi с отрезком $[-1,1]$, $\Gamma^*=$ $=\{\gamma\cup\gamma^*:\gamma\in\widehat{\Gamma}$, γ^*- кривая, симметричная γ относительно вещественной оси$\}$. Через $\Gamma(a_1,a_2)$ обозначим $\zeta^{-1}(\Gamma^*)$ — образ семейства Γ^* при отображении, обратном к $\zeta(z)$.

Теорема 2. *Пусть $n=2$, области D_1, D_2 лежат в единичном круге U, содержат точки a_1, a_2 соответственно, и любая кривая описанного выше семейства $\Gamma(a_1,a_2)$ пересекает границу $\partial(D_1\cup D_2)$. Тогда*

$$R_2(D_1,a_1)\cdot R_2(D_2,a_2)\leqslant|a_1-a_2|^2\left(1-\frac{|a_2-a_1|^2}{|1-\overline{a}_1a_2|^2}\right). \tag{8}$$

Если $\overline{D_1}\cup\overline{D_2}=\overline{U}$ и расположенная в круге общая часть ∂D_1 и ∂D_2 описывается уравнением

$$\left|\frac{1-\overline{a_1}z}{z-a_1}\right|=\left|\frac{1-\overline{a_2}z}{z-a_2}\right|,$$

то в (8) *выполняется равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в плоскости C_η семейство Γ радиальных отрезков $\{te^{i\varphi}:r\leqslant t\leqslant 1\}$, соединяющих окружности $S(0,r)$ и $S(0,1)$, r достаточно мало. По свойству 6

$$M_2(\Gamma)=-\frac{2\pi}{\log r}. \tag{9}$$

При отображении $\zeta_1(\eta)$, построенном выше, круг $B(0,r)$ переходит в "почти" круг $\widetilde{B}(bi,\rho)$, $\rho=|\zeta_1'(0)|r$. В силу конформной инвариантности модуля

$$M_2(\zeta_1(\Gamma))=-\frac{2\pi}{\log\rho-\log|\zeta_1'(0)|}.$$

Пусть $\widetilde{\Gamma}=\{\gamma\cup\gamma^*:\gamma\in\zeta_1(\Gamma)$, γ^* — кривая, симметричная γ относительно вещественной оси$\}$. Ясно, что $\widetilde{\Gamma}$ — семейство составных кривых $\widetilde{\gamma}$ двух типов. Кривые первого типа $\widetilde{\gamma}$ непрерывно соединяют в единичном круге $\widetilde{S}(bi,\rho)$ и $\widetilde{S}(-bi,\rho)$. Кривые второго типа состоят из двух непрерывных кривых, одна из которых лежит в верхнем полукруге и соединяет $\widetilde{S}(bi,\rho)$ с $S(0,1)$, а вторая симметрична ей относительно вещественной оси и лежит в нижнем полукруге. Согласно лемме 2, [8]

$$M_2(\widetilde{\Gamma}))=\frac{1}{2}M_2(\zeta_1(\Gamma))=-\frac{\pi}{\log\rho-\log|\zeta_1'(0)|}.$$

Обозначим $\widetilde{D_k}$ образ D_k при отображении $\zeta(z)$, $k=1,2$, $b_1=-bi$, $b_2=bi$. Пусть $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}$, $\gamma_k(\widetilde{\gamma})$ — наименьшая непрерывная подкривая $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}$, соединяющая $\widetilde{S}(b_k,\rho)$ с $\partial\widetilde{D}_k$, $k=1,2$. Заметим, что кривые $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}$ первого типа являются частью образа кривой из семейства $\Gamma(a_1,a_2)$ при отображении $\zeta(z)$ и поэтому при достаточно малом r имеют точку пересечения с $\partial(\widetilde{D_1}\cup\widetilde{D_2})$. На кривых $\widetilde{\gamma}\in\widetilde{\Gamma}$ второго типа $\gamma_1(\widetilde{\gamma})$ лежит в нижнем полукруге, а $\gamma_2(\widetilde{\gamma})$ — в верхнем полукруге. Следовательно, $\gamma_k(\widetilde{\gamma})$ не имеют общих внутренних точек, и семейства кривых $\Gamma_k=\{\gamma_k(\widetilde{\gamma})\}$ разделены кроме того, $\widetilde{\Gamma}$ длиннее Γ_k, $\Gamma_k\subset\Gamma(b_k,\rho,\widetilde{D}_k)$, $k=1,2$. Применяя свойства 5 и 1 модуля семейства кривых, получаем

$$M_2^{-1}(\widetilde{\Gamma})\geqslant M_2^{-1}(\Gamma_1)+M_2^{-1}(\Gamma_2)\geqslant\sum_{k=1}^{2}M_2^{-1}(\Gamma(b_k,\rho,\widetilde{D}_k)).$$

Подстановка (9) в предыдущее неравенство приводит к соотношению

$$\log|\zeta_1'(0)|^2\geqslant\sum_{k=1}^{2}(2\pi M_2^{-1}(\Gamma(b_k,\rho,\widetilde{D}_k))+\log\rho).$$

Предельным переходом $\rho\to 0$ получаем

$$|\zeta_1'(0)|^2\geqslant R_2(\widetilde{D_1},b_1)R_2(\widetilde{D_2},b_2).$$

Последнее неравенство с учетом формулы $R_2(\widetilde{D_k},b_k)=|\zeta'(a_k)|R_2(D_k,a_k)$ равносильно

$$\frac{|\zeta_1'(0)|^2}{|\zeta'(a_1)||\zeta'(a_2)|}\geqslant R_2(D_1,a_1)R_2(D_2,a_2). \tag{10}$$

Остается найти значения производных. Для этого удобно представить отображение $f(\zeta)$ верхнего полукруга $U\cap(\mathrm{I}m\zeta>0)$ на верхнюю полуплоскость как суперпозицию

$$w_1=\zeta^2,\ w_2=\frac{1}{2}(w_1+1/w_1)+1,\ f=w_3=\sqrt{w_2}.$$

Отсюда

$$|f'(bi)|=|(w_3\circ w_2\circ w_1)'(bi)|=\frac{1+b^2}{\sqrt{2}b^2},$$

$$|\zeta_1'(0)|=|f'(bi)|^{-1}|\omega'(0)|=2h\frac{\sqrt{2}b^2}{1+b^2}=\frac{2b(1-b^2)}{1+b^2}.$$

Непосредственные вычисления дают

$$|\zeta'(a_1)|=\frac{1-b^2}{1-|a_1|^2},\ |\zeta'(a_2)|=\frac{|1-b^2||1-|a_1|^2|}{|1-\tau b|^2|1-\overline{a_1}a_2|^2}.$$

Таким образом, (10) принимает вид

$$R_2(D_1,a_1)R_2(D_2,a_2)\leqslant\frac{4b^2}{(1+b^2)^2}|1-\overline{a_1}a_2|^2|1-\tau b|^2.$$

Элементарные преобразования правой части с учетом равенств

$$\tau=\frac{|a_2-a_1|}{|1-\overline{a_1}a_2|},\ 1+b^2=\frac{2b}{\tau},\ (1-\tau b)^2=1-\tau^2$$

дают требуемое неравенство (8). Утверждение о равенстве известно [1]. □

Заметим, что теорема 2 вытекает из результата, полученного Дубининым В. Н. и говорящего о покрытии траекторий квадратичных дифференциалов (см. Следствие

6.3 монографии [1]), примененного к единичному кругу. Кроме того, в условиях теоремы 2 справедливо более сильное неравенство

$$R_2(D,a_1)\cdot R_2(D,a_2)\exp(2\mathrm{g}_D(a_1,a_2))\leqslant|a_1-a_2|^2\left(1-\frac{|a_2-a_1|^2}{|1-\overline{a}_1a_2|^2}\right),$$

где $D=D_1\cup D_2$, $\mathrm{g}_D(a_1,a_2)$ — функция Грина для оператора Лапласа области D с полюсом в точке a_2, вычисленная в точке a_1. Вместе с тем предложенное здесь доказательство теоремы 2 представляется более простым.

Теоремы 1, 2 приводят к некоторым оценкам конформного радиуса. Как было упомянуто во введении, другие оценки можно получить с помощью метода симметризации. В качестве примера рассмотрим единичный круг U плоскости C_z и точки $a=\tau i$, $b=ti\in U$, $0\leqslant\tau<t$. Заметим, что при поляризации относительно прямой $\mathrm{I}mz=$ $=(t+\tau)/2$ при достаточно малом r мы имеем $P^-E(b,r)=E(a,r)$, $P^+(C_z\backslash U)=C_z\backslash U$. По свойству 8 модуля семейств кривых

$$\lambda_2M_2(\Gamma(r,b,U)^{-1}+\log r\leqslant\lambda_2M_n(\Gamma(r,a,U)^{-1}+\log r.$$

Следовательно,

$$R_2(U,b)\leqslant R_2(U,a).$$

Иными словами, при движении вдоль радиуса к центру конформный радиус единичного круга возрастает и достигает максимума в центре. Данный факт вытекает также из формулы (3). Мы не можем утверждать, что аналогичный эффект сохраняется и для звездообразной области. Напомним, что область $D\subset R^n$ называется звездообразной относительно нуля, если $0\in D$ и пересечение D с любым лучом $K(v)=$ $=\{tv\in R^n:t>0\}$, $v\in S(0,1)$, является интервалом вида $(0,t_D(v)v)$, где $t_D(v)$ — некоторое положительное вещественное число. Поляризация относительно гиперсферы позволяет установить в случае звездообразной области D монотонность функции $f_v(t)=\frac{R_n(D,tv)}{t}$ на интервале $t\in(0,t_D(v))$.

Теорема 3. *Для звездообразной относительно нуля области D и для любых точек $a,b\in D$, лежащих на одном луче $K(v)$, $0<|a|<|b|$, справедливо неравенство*

$$\frac{R_n(D,b)}{R_n(D,a)}\leqslant\frac{|b|}{|a|}. \tag{11}$$

Доказательство. При поляризации относительно гиперсферы $S(0,\tau)$, $\tau=$ $=\sqrt{|a||b|}$, получим $P^+{}_\tau(R^n\backslash D)=R^n\backslash D$, $P^-{}_\tau(E(b,r))=E^*(b,r)$, ($E^*(b,r)$ — симметричное $E(b,r)$ множество относительно $S(0,\tau)$). Заметим, что симметричное $S(b,r)$ относительно $S(0,\tau)$ множество является "почти сферой" радиусом $|a|r/|b|$ с центром a. Действительно, пусть $|x-b|^2=r^2=|x|^2+|b|^2-2<x,b>$. Тогда

$$|x^*-b^*|^2=\tau^4\left|\frac{x}{|x|^2}-\frac{b}{|b|^2}\right|^2=\tau^4\left|\frac{1}{|x|^2}+\frac{1}{|b|^2}-2\frac{<x,b>}{|x|^2|b|^2}\right|=\frac{\tau^4r^2}{|x|^2|b|^2}\sim\frac{|a|^2}{|b|^2}r^2,\ r\to0.$$

Применяя свойство 7, запишем следующее соотношение

$$\lambda_nM_n(\Gamma(r,b,D)^{1/(1-n)}+\log\frac{|a|}{|b|}r\leqslant\lambda_nM_n(\Gamma((|a|/|b|)r,a,D)^{1/(1-n)}+\log\frac{|a|}{|b|}r.$$

Переходя к пределу, получаем требуемое неравенство

$$\log\left(\frac{|a|}{|b|}R_n(D,b)\right) \leqslant \log R_n(D,a).$$

$\square$

Замечание 1. Как нетрудно увидеть в приведенном доказательстве, неравенство (11) выполняется и в более общем случае. А именно, пусть $\rho > 0$, $v \in S(0,1)$, пересечение области $D_1 \subset R^n$ с любым лучом $K(v)$ или пусто, или представляет собой симметричный относительно $S(0,\rho)$ интервал, множество G_2 лежит в замкнутом шаре $E(0,\rho)$ и область D есть объединение $D = D_1 \cup G_2$. Тогда для любых точек $a \in D \cap K(v)$, $b \in D \cap K(v)$, $\rho < |a| < |b|$, справедливо неравенство (11).

Список литературы

[1] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[2] В. Н. Дубинин, “Неравенство Крауса для многолистных функций”, *Матем. заметки*, **102**:4, (2017), 559—564.

[3] Б. Е. Левицкий, “Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус”, *Докл. АН СССР.*, **316**:4, (1991), 812–815.

[4] C. Bandle, M. Flucher, “Harmonic radius and concentration of energy, hyperbolic radius and Liouvilles equations $\Delta U = 0$ and $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$”, *SIAM Review*, **38**:2, (1996), 191–238.

[5] W. Wang, “N-Capacity, N-harmonic radius and N-harmonic transplantation”, *J. Math. Anal. Appl.*, **327**:1, (2007), 155–174.

[6] В. Н. Дубинин, Е. Г. Прилепкина, “Об экстремальном разбиении пространственных областей”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 15, Зап. научн. сем. ПОМИ*, **254**, (1998), 95–107.

[7] K. A. Gulyaeva, S. I. Kalmykov, E. G. Prilepkina, “Extremal decomposition problems in the Euclidean space”, *International Journal of Mathematical Analysis*, **9**:56, (2015), 2763–2773.

[8] S. Kalmykov, E Prilepkina, “Extremal decomposition problems for p-harmonic radius”, *Analysis Mathematica*, **43**:1, (2017), 49–65.

[9] С. И. Калмыков, Е. Г. Прилепкина, “О p-гармоническом радиусе Робена в евклидовом пространстве”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **449**, (2016), 196–213.

[10] V. N. Dubinin, “Capacities and geometric transformations of subsets in n-space”, *Geom. Funct. Anal.*, **3**, (1993), 342–369.

[11] A. Yu. Solynin, “Continuous symmetrization via polarization”, *Алгебра и анализ*, **24**:1, (2012), 157–222.

[12] J. Sarvas, “Symmetrization of condensers in n-space”, *Ann. Acad. Sci. Fenn, Ser AI*, **522**, (1972), 1–44.

[13] Е. В. Костюченко, Е. Г. Прилепкина, “О поляризации относительно гиперсферы”, *Дальневост. матем. журн.*, **5**:1, (2004), 22–29.

[14] B. Fuglede, “Extremal length and functional completion”, *Acta Mathematica*, **98**:1, (1957), 171–219.

[15] M. Vuorinen, “Conformal geometry and quasiregular mappings”, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, 1988.

[16] В. А. Шлык, “О равенстве p-емкости и p-модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:6, (1993), 216–221.

[17] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Из-во Ленинградского университета, Ленинград, 1985.

Поступила в редакцию
31 августа 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

Prilepkina E. G. On the n-harmonic radius of domains in the n-dimensional Euclidean space. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2017. V. 17. No 2. P. 246–256.

ABSTRACT

We extend a classical result by Lavrent'ev concerning the product of the conformal radii of planar non-overlapping domains to the case of domains in the n-dimensional Euclidean space. The conformal radius is then replaced by the n-harmonic Levitskii radius and the non-overlapping condition is replaced by a weaker geometric condition. The proofs are based on the technique of modulii of curve families. Conformal invariance of the module plays an important role in the proofs. Using the same method, we extend a classical result of Kufarev concerning the product of the conformal radii of planar non-overlapping domains in the unit disk. In addition, an inequality for n-harmonic radius of a star-shaped domain has been proved.

Key words: *conformal radius, harmonic radius, modulii of curve families, extremal decompositions, star-shaped domain.*