Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 3–8

УДК 517.52+512.742.72
MSC2010 11B37 + 33E05

© М. О. Авдеева[1]

Последовательности Сомос-6 ранга 3

Невырожденные последовательности Сомос-4 имеют ранг 2. Ранг произведения двух таких последовательностей не превосходит 4 и при этом возникают последовательности Сомос-$2k$ с $k = 2, 3, 4$. В работе строятся пары последовательностей Сомос-4, произведения которыхявляются последовательностями Сомос-6.

Ключевые слова: *Сомос-последовательности, эллиптические функции, теоремы сложения.*

Введение

Пусть k — натуральное число и

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}, x_{-k+1}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_k$$

— формальные переменные. С помощью рекуррентного соотношения

$$S_k(n+k)S_k(n-k) = \alpha_{k-1}S_k(n+k-1)S_k(n-k+1) + \ldots + \alpha_0 S(n)$$

определим последовательность рациональных функций Сомос-$2k$ (n — целое)

$$S_k(n) = S_k(n; \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}) = S_k(n; \alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}; x_{-k+1}, \dots, x_k).$$

В частности, при $k=2$ возникает последовательность Сомос-4, определяемая соотношением

$$S_2(n+2)S_2(n-2) = \alpha_1 S_2(n+1)S_2(n-1) + \alpha_0 S_2^2(n) \tag{1}$$

с коэффициентами α_0, α_1 и начальными значениями

$$S_2(-1) = x_{-1}, \quad S_2(0) = x_0, \quad S_2(1) = x_1, \quad S_2(2) = x_2.$$

При $k=3$ возникает последовательность Сомос-6, определяемая рекуррентным соотношением

$$S_3(n+3)S_3(n-3) = \alpha_2 S_3(n+2)S_3(n-2) + \alpha_1 S_3(n+1)S_3(n-1) + \alpha_0 S_3^2(n) \tag{2}$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `avdeeva@iam.khv.ru`

с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и начальными значениями

$$S_3(-2) = x_{-2},\ S_3(-1) = x_{-1},\ S_3(0) = x_0,\ S_3(1) = x_1,\ S_3(2) = x_2,\ S_3(3) = x_3.$$

Для любой последовательности $A(n)$ (n — целое) пусть

$$\mathcal{D}_A^{(0)}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_{k_0} \\ n_0, \ldots, n_{k_0} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A(m_0+n_0)A(m_0-n_0) & \ldots & A(m_0+n_{k_0})A(m_0-n_{k_0}) \\ \ldots & A(m_i+n_j)A(m_i-n_j) & \ldots \\ A(m_{k_0}+n_0)A(m_{k_0}-n_0) & \ldots & A(m_{k_0}+n_{k_0})A(m_{k_0}-n_{k_0}) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_A^{(1)}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_{k_1} \\ n_0, \ldots, n_{k_1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)A(m_0-n_0) & \ldots & A(1+m_0+n_{k_1})A(m_0-n_{k_1}) \\ \ldots & A(1+m_i+n_j)A(m_i-n_j) & \ldots \\ A(1+m_{k_1}+n_0)A(m_{k_1}-n_0) & \ldots & A(1+m_{k_1}+n_{k_1})A(m_{k_1}-n_{k_1}) \end{pmatrix}.$$

Назовем рангом последовательности $A(n)$, отличной от нулевой, минимальное натуральное k, для которого при всех целых $m_0,\ldots,m_k,n_0,\ldots,n_k$ выполняются равенства

$$\mathcal{D}_A^{(0)}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \mathcal{D}_A^{(1)}\begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = 0.$$

Если такого k не существует, то мы будем называть A последовательностью бесконечного ранга.

Из результатов работ [1–3] и других следует, что последовательность $S_2(n)$ имеет ранг 2. А из результатов работы [4] следует, что $S_3(n)$ имеет ранг не превосходящий 4. Большой интерес представляет собой задача построения целочисленных последовательностей Сомоса (см. например [5,6]). Если $A(n)$ и $B(n)$ две целочисленные последовательности Сомос-4, то их произведение, последовательность $A(n)B(n)$ имеет ранг, не превышающий 4. В настоящей работе предлагается критерий для того, чтобы произведение двух последовательностей Сомос-4 имело ранг 3.

Автор благодарит Быковского В. А. за постановку задачи.

1. О ранге произведения двух последовательностей Сомос-4

Напомним, что (см. [7]) для последовательности A ранга k выполняется следующее свойство. Для любых целых m и n найдутся $4k$ другие последовательности

$$C_1^{(0)}(n), \ldots, C_k^{(0)}(n), D_1^{(0)}(n), \ldots, D_k^{(0)}(n),$$
$$C_1^{(1)}(n), \ldots, C_k^{(1)}(n), D_1^{(1)}(n), \ldots, D_k^{(1)}(n),$$

для которых

$$A(n+m)A(n-m) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n),$$

$$A(1+n+m)A(n-m) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n).$$

При этом k — минимально возможное.

В частности, при $k=2$ эти равенства имеют вид

$$A(n+m)A(n-m) = C_1^{(0)}(m)D_1^{(0)}(n) + C_2^{(0)}(m)D_2^{(0)}(n),$$
$$A(1+n+m)A(n-m) = C_1^{(1)}(m)D_1^{(1)}(n) + C_2^{(1)}(m)D_2^{(1)}(n),$$

и для другой последовательности $B(n)$ ранга 2

$$B(n+m)B(n-m) = E_1^{(0)}(m)F_1^{(0)}(n) + E_2^{(0)}(m)F_2^{(0)}(n),$$
$$B(1+n+m)B(n-m) = E_1^{(1)}(m)F_1^{(1)}(n) + E_2^{(1)}(m)F_2^{(1)}(n).$$

Переходя к произведениям, получим

$$A(n+m)B(n+m)A(m-n)B(m-n) = \sum_{i,j\,=\,1}^{2} C_i^{(0)}(m)E_j^{(0)}(m)D_i^{(0)}(n)E_j^{(0)}(n),$$
$$A(1+n+m)B(1+n+m)A(m-n)B(m-n) =$$
$$= \sum_{i,j\,=\,1}^{2} C_i^{(1)}(m)E_j^{(1)}(m)D_i^{(1)}(n)E_j^{(1)}(n).$$

Отсюда следует, что ранг произведения $A(n)B(n)$ не превосходит 4. Поэтому для любого целого n

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} n,3,2,1,0 \\ n,3,2,1,0 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_C^{(1)}\begin{pmatrix} n,3,2,1,0 \\ n,3,2,1,0 \end{pmatrix} = 0,$$

где $C(n)=A(n)B(n)$. Заметим, что

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} n,3,2,1,0 \\ 4,3,2,1,0 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} C(n+4)C(n-4) -$$
$$- \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix} C(n+3)C(n-3) + \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,1,0 \end{pmatrix} C(n+2)C(n-2) -$$
$$- \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,0 \end{pmatrix} C(n+1)C(n-1) + \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,1 \end{pmatrix} C^2(n).$$

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $A(n)$ и $B(n)$ — последовательности Сомос-4. Положим $C(n) = A(n)B(n)$. Если*

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

то $C(n)$ — последовательность Сомос-6.

2. Примеры

Пусть $\sigma_\Gamma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса для некоторой решетки Γ на комплексной плоскости. В работах [1–3] и др. было доказано, что, за исключением вырожденных случаев, последовательность Сомос-4 имеет вид

$$A(n) = \exp(an^2 + bn + c)\sigma_\Gamma(z_0 + nz_1), \tag{3}$$

где a, b, c, z_0 и $z_1 \neq 0$ — комплексные числа, а Γ — решетка из $\mathbb{C}$. Из теорем сложения для сигма-функция Вейерштрасса следует, что ранг $A(n)$ равен 2.

В работе [8] было доказано, что для любых комплексных a, b, c, z_1 и z_2 с

$$z_1 - z_2 \notin \frac{1}{2}\Gamma \setminus \Gamma$$

функция

$$f(z) = \exp(az^2 + bz + c)\sigma_\Gamma(z + z_1)\sigma_\Gamma(z + z_2)$$

имеет ранг 3. Поэтому для произведения двух последовательностей Сомос-4 вида (4) с одинаковыми Γ и z ранг их произведения не превосходит 3. В частности, если $A(n)$ — последовательность Сомос-4, то для любого целого n_0 последовательность

$$C(n) = A(n)A(n + n_0)$$

имеет ранг, не превосходящий 3. Поэтому для любого целого n

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} n,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} = \\
&= \det\begin{pmatrix} C(n+3)C(n-3) & C(n+2)C(n-2) & C(n+1)C(n-1) & C^2(n) \\ C(5)C(-1) & C(4)C(0) & C(3)C(1) & C^2(2) \\ C(4)C(-2) & C(3)C(-1) & C(2)C(0) & C^2(1) \\ C(3)C(-3) & C(2)C(-2) & C(1)C(-1) & C^2(0) \end{pmatrix} = \\
&= \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 2,1,0 \\ 2,1,0 \end{pmatrix} C(n+3)C(n-3) - \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 2,1,0 \\ 3,1,0 \end{pmatrix} C(n+2)C(n-2) + \\
&+ \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 2,1,0 \\ 3,2,0 \end{pmatrix} C(n+1)C(n-1) - \mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix} 2,1,0 \\ 3,2,1 \end{pmatrix} C^2(n) = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Пример 1. *Пусть $A(n)$ — последовательность Сомос-4, заданная начальными значениями*

$$A(-1) = A(0) = A(1) = 1, \qquad A(2) = 2$$

и рекуррентным соотношением

$$A(n+2)A(n-2) = A(n+1)A(n-1) + A^2(n).$$

Положим $C(n) = A^2(n)$. Тогда

$$C(-2) = C(-1) = C(0) = C(1) = 1, \quad C(2) = 4, \quad C(3) = 9, \quad C(4) = 49$$

и

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\2,1,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}49 & 9 & 16\\ 9 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix} = -10,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,1,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}529 & 9 & 16\\ 49 & 4 & 1\\ 36 & 1 & 1\end{pmatrix} = -50,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,2,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}529 & 49 & 16\\ 49 & 9 & 1\\ 36 & 4 & 1\end{pmatrix} = -40,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,2,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}529 & 49 & 9\\ 49 & 9 & 4\\ 36 & 4 & 1\end{pmatrix} = -200.$$

В результате с помощью (4) *для* $C(n)$ *получаем рекуррентное соотношение*

$$C(n+3)C(n-3) = 5\,C(n+2)C(n-2) - 4\,C(n+1)C(n-1) + 20\,C^2(n).$$

Пример 2. *Положим* $C(n) = A(n)A(n-1)$ *при условии, что* $A(n)$ *— последовательность, заданная в примере 1. Тогда*

$$C(-2) = C(-1) = C(0) = 1, \quad C(1) = 2, \quad C(2) = 6, \quad C(3) = 21, \quad C(4) = 161$$

и

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\2,1,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}161 & 42 & 36\\ 21 & 6 & 4\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix} = 20,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,1,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1357 & 42 & 36\\ 161 & 6 & 4\\ 42 & 2 & 1\end{pmatrix} = 100,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,2,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1357 & 161 & 36\\ 161 & 21 & 4\\ 42 & 6 & 1\end{pmatrix} = 80,$$

$$\mathcal{D}_C^{(0)}\begin{pmatrix}2,1,0\\3,2,0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1357 & 161 & 42\\ 161 & 21 & 6\\ 42 & 6 & 2\end{pmatrix} = 400.$$

Для $C(n)$ *получаем рекуррентное соотношение*

$$C(n+3)C(n-3) = 5\,C(n+2)C(n-2) - 4\,C(n+1)C(n-1) + 20\,C^2(n).$$

Список литературы

[1] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **37**:2, (2005), 161–171.

[2] R. Shipsey, *Elliptic Divisibility Sequences*, PhD Thesis, Goldsmith's University of London, 2000.

[3] C. Swart, “Elliptic curves and related sequences”, *PhD thesis, Royal Holloway and Bedford New College, University of London*, 2003.

[4] Y. N. Fedorov, A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties”, *Journal of Integrable Systems*, **1**:1, (2016), 1–34.

[5] M. Somos, “Problem 1470”, *Crux Mathematicorum*, **15**, (1989), 208.

[6] A. N. W. Hone, C. S. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Mathematical Proceedings of the Cabrige Philosophical Society*, **145**, (2008), 65–85.

[7] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:2, (2016), 115–122.

[8] А. А. Илларионов, “Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса”, *Функциональный анализ и его приложения*, **50**:4, (2016), 43–54.

Поступила в редакцию
27 апреля 2018 г.

Avdeeva M. O. The Somos-6 sequences of rank 3. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 3–8.

ABSTRACT

Nondegenerate Somos-4 sequences have rank 2. The rank of the product of two such sequences does not exceed 4, and then the Somos-$2k$ sequences with $k = 2, 3, 4$ arise. In this paper we construct pairs of Comos-4 sequences such that them products are the Comos-6 sequences.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, addition theorems.*