

УДК 517.956.45
MSC2010 35K58, 35Q79

© Г. В. Гренкин¹

Свойства решений нестационарной модели сложного теплообмена

Рассматривается нестационарная модель сложного теплообмена, включающая уравнение теплопроводности и нестационарное P_1 -приближение уравнения переноса излучения. Исследуется вопрос применимости стационарного уравнения для интенсивности излучения при моделировании процесса сложного теплообмена. Показано, что при большом значении параметра скорости света поле интенсивности излучения приближается за короткий промежуток времени к решению стационарного уравнения.

Ключевые слова: *радиационный теплообмен, диффузионное приближение.*

Введение

Задачи сложного (радиационно-кондуктивного) теплообмена представляют интерес для инженерных приложений, таких, как, например, моделирование теплообмена в камерах сгорания и котельных установках [1], моделирование процесса производства стекла [2]. Обширная библиография прикладных и теоретических работ по сложному теплообмену содержится в [3, 4].

Математически процесс сложного теплообмена моделируется системой, состоящей из дифференциального уравнения теплопроводности и интегродифференциального уравнения переноса излучения [5]. Для упрощения уравнения переноса излучения широко применяются приближения, например диффузионное P_1 -приближение. Нестационарное уравнение P_1 -приближения выведено в работах [6–8], модель сложного теплообмена имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0 \quad \text{в } \Omega \subset \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0 \quad \text{на } \Gamma = \partial\Omega, \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (4)$$

¹ Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: glebgrenkin@gmail.com

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, κ_a — коэффициент поглощения. Постоянные a , b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_p}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_p}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k — теплопроводность, c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана–Больцмана, n — показатель преломления, T_{\max} — максимальная температура в ненормализованной модели, c — скорость света в среде, $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$, κ_s — коэффициент рассеяния, $A \in [-1, 1]$ — параметр анизотропии рассеяния. Через ∂_n обозначаем производную по направлению внешней нормали к границе Γ . Неотрицательная функция θ_b имеет смысл нормализованной температуры на границе области, $\beta = \frac{h}{\rho c_p}$, $\gamma = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$, где h — коэффициент теплоотдачи границы области, ε — коэффициент излучения границы области.

Как правило, вместо нестационарного уравнения (2) используют стационарное уравнение

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta| \theta^3) = 0. \quad (5)$$

Такая замена основана на предположении, что при большом значении c скорость стабилизации интенсивности излучения значительно выше, чем скорость стабилизации температуры. Однако вычислительные эксперименты свидетельствуют о том, что интенсивность излучения и температура стабилизируются примерно с одинаковой скоростью [9]. Тем не менее, вычислительные эксперименты показывают, что при большом значении c поле $\varphi(x, t)$ становится при малом $t \approx 0$ близким к решению уравнения (5), в котором функция $\theta(x, t)$ берется из решения задачи (1)–(4). Цель настоящей работы — объяснить такое поведение решения и тем самым показать, что для приближенного описания поля интенсивности излучения можно использовать стационарное уравнение.

1. Формализация задачи

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область. Через L^p обозначаем пространство Лебега, через H^1 — пространство Соболева W_2^1 , а через $L^p(0, T; X)$ — пространство Лебега функций со значениями в банаховом пространстве X . Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

- (i) $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $\beta \geq \beta_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $\beta_0, \gamma_0 = \text{const}$, $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma)$;
- (ii) $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, через V' обозначим пространство, сопряженное с пространством V . Отметим, что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в H , а через (f, v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H , если $f \in H$. Определим пространство $W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V')\}$. Здесь и далее $y' = dy/dt$.

Определим операторы и функционалы $A_{1,2}: V \rightarrow V'$, $f_{1,2} \in V'$, используя следующие равенства, справедливые для любых $\theta, \varphi, v \in V$:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v \, d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v \, d\Gamma,$$

$$(f_1, v) = \int_{\Gamma} \beta\theta_b v \, d\Gamma, \quad (f_2, v) = \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v \, d\Gamma.$$

Определение 1. Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ называется слабым решением задачи (1)–(4) на интервале $(0, T)$, если

$$\theta' + A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f_1 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (6)$$

$$\frac{1}{c}\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = f_2 \quad \text{п.в. на } (0, T), \quad (7)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (8)$$

Теорема 1. [10] Пусть выполняются условия (i), (ii). Существует единственное решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (6)–(8), причем $0 \leq \theta \leq M$, $0 \leq \varphi \leq M^4$, где $M = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4} \right\}$.

2. Оценки решения

Обозначим через $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$ стационарное решение эволюционной системы (6)–(7), которое является решением задачи

$$A_1\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = f_1, \quad (9)$$

$$A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = f_2. \quad (10)$$

Теорема 2. [11] Пусть выполняется условие (i). Существует единственное решение $\{\theta_s, \varphi_s\}$ задачи (9), (10), причем $0 \leq \theta_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $0 \leq \varphi_s \leq \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}^4$.

Введем функцию $\zeta = \theta - \theta_s$, тогда

$$\zeta' + A_1\zeta = f, \quad (11)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 \equiv \theta_0 - \theta_s,$$

где $f = b\kappa_a((\varphi - \varphi_s) - (\theta^4 - \theta_s^4))$, $|f| \leq 2b\kappa_a M^4$. Из результатов [12, с. 72] следует, что $\zeta \in C([0, T]; V)$, поэтому корректно определен след $\zeta|_{t=t_0} \in V$.

Обозначим

$$k_1 = \inf_{v \in V, \|v\|_V = 1} (A_1 v, v), \quad k_2 = \inf_{v \in V, \|v\| = 1} (A_2 v, v).$$

Отметим, что $k_1, k_2 > 0$ [13, с. 238].

Лемма 1. Пусть выполняются условия (i), (ii). Для решения задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2 \leq C_1(t - t_0), \quad t > t_0,$$

где $C_1 = C_1(\|\zeta(t_0)\|_V) = \frac{1}{2k_1} \|A_1\|^2 \|\zeta(t_0)\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 |\Omega|$.

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (11) на $\zeta(t) - \zeta(t_0)$:

$$\begin{aligned} ((\zeta(t) - \zeta(t_0))', \zeta(t) - \zeta(t_0)) + (A_1(\zeta(t) - \zeta(t_0)), \zeta(t) - \zeta(t_0)) + (A_1\zeta(t_0), \zeta(t) - \zeta(t_0)) = \\ = (f, \zeta(t) - \zeta(t_0)). \end{aligned}$$

Проинтегрировав данное равенство по t от t_0 до t , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\zeta(t) - \zeta(t_0)\|^2 + k_1 \int_{t_0}^t \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V^2 d\tau \leq \\ \leq \int_{t_0}^t \left(\|A_1\zeta(t_0)\|_{V'} \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V + 2b\kappa_a M^4 \int_{\Omega} |\zeta(\tau) - \zeta(t_0)| dx \right) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами

$$\begin{aligned} \|A_1\zeta(t_0)\|_{V'} \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V \leq k_1 \|\zeta(\tau) - \zeta(t_0)\|_V^2 + \frac{1}{4k_1} \|A_1\zeta(t_0)\|_{V'}^2, \\ |\zeta(\tau) - \zeta(t_0)| = |\theta(\tau) - \theta(t_0)| \leq M, \end{aligned}$$

тогда

$$\frac{1}{2} \|\zeta(t) - \zeta(t_0)\|^2 \leq \left(\frac{1}{4k_1} \|A_1\|^2 \|\zeta(t_0)\|_V^2 + 2b\kappa_a M^5 |\Omega| \right) (t - t_0),$$

откуда следует утверждение леммы. \square

Определим функцию $\tilde{\varphi}(t) \in V$ как решение стационарного уравнения (10), в котором функция θ берется из решения задачи (6)–(8) в момент времени t . Указанная линейная задача имеет единственное решение в силу действия теоремы Лакса–Мильграма.

Следующая теорема показывает, что, если c велико, в некоторый момент времени $t_* \approx 0$ интенсивность излучения становится близкой к решению стационарного уравнения (10) при $\theta: = \theta_0$.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i), (ii), $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $d \geq \frac{C_2}{2k_2c}$. Для решения задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq g(t) \equiv de^{2k_2c(t_0-t)} + C_2(t - t_0), \quad t > t_0, \quad (12)$$

где $C_2 = C_2(\|\zeta(t_0)\|_V) = 4M^6\kappa_a C_1(\|\zeta(t_0)\|_V)/k_2$. Функция $g(t)$ убывает на (t_0, t_*) и достигает минимума в точке $t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{2k_2cd}{C_2}$, $g(t_*) = \frac{C_2}{2k_2c} + \frac{C_2}{2k_2c} \ln \frac{2k_2cd}{C_2}$.

Доказательство. Введем функцию $\psi(t) = \varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)$, тогда

$$\frac{1}{c}\psi'(t) + A_2\psi(t) + \kappa_a\psi(t) = \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0)), \quad \psi(t_0) = \varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0).$$

Умножив это равенство скалярно на ψ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}(\psi'(t), \psi(t)) + (A_2\psi(t), \psi(t)) + \kappa_a\|\psi(t)\|^2 &= \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0), \psi(t)), \\ \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|^2 + k_2\|\psi(t)\|^2 + \kappa_a\|\psi(t)\|^2 &\leq \kappa_a\|\psi(t)\|^2 + \frac{\kappa_a}{4} \|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)\|^2. \end{aligned}$$

Отметим, что $|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)| \leq 4M^3|\theta(t) - \theta(t_0)|$. Итак,

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \|\psi(t)\|^2 + 2k_2\|\psi(t)\|^2 \leq 8M^6\kappa_a\|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2,$$

отсюда

$$\|\psi(t)\|^2 \leq \|\psi(t_0)\|^2 e^{2k_2c(t_0-t)} + 8cM^6\kappa_a \int_{t_0}^t \|\theta(\tau) - \theta(t_0)\|^2 e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau.$$

В силу действия леммы 1

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|\theta(\tau) - \theta(t_0)\|^2 e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau &\leq C_1 \int_{t_0}^t (\tau - t_0) e^{2k_2c(\tau-t)} d\tau = \\ &= C_1 \left(\frac{1}{2k_2c} (t - t_0) - \frac{1}{4k_2^2c^2} \left(1 - e^{2k_2c(t_0-t)} \right) \right) \leq \frac{C_1}{2k_2c} (t - t_0), \end{aligned}$$

поэтому

$$\|\psi(t)\|^2 \leq \|\psi(t_0)\|^2 e^{2k_2c(t_0-t)} + \frac{4M^6\kappa_aC_1}{k_2} (t - t_0),$$

откуда следует оценка (12).

Чтобы получить второе утверждение теоремы, заметим, что $g'(t) < 0$ на $(0, t_*)$, $g'(t_*) = 0$, $g'(t) > 0$ при $t > t_*$. \square

Замечание 1. Если $t_0 = 0$, то $t_* \rightarrow 0$ и $\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(0)\| \rightarrow 0$ при $c \rightarrow +\infty$.

Далее оценим $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2$. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (i), (ii). Для решения задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq C_2(t - t_0), \quad t > t_0.$$

Доказательство. Обозначим $\psi = \tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)$, тогда

$$A_2\psi + \kappa_a\psi = \kappa_a(\theta^4(t) - \theta^4(t_0)).$$

Умножив равенство скалярно на ψ , получим

$$(A_2\psi, \psi) + \kappa_a \|\psi\|^2 = \kappa_a (\theta^4(t) - \theta^4(t_0), \psi),$$

$$k_2 \|\psi\|^2 + \kappa_a \|\psi\|^2 \leq \kappa_a \|\psi\|^2 + \frac{\kappa_a}{4} \|\theta^4(t) - \theta^4(t_0)\|^2 \leq \kappa_a \|\psi\|^2 + 4M^6 \kappa_a \|\theta(t) - \theta(t_0)\|^2,$$

отсюда по лемме 1

$$\|\psi\|^2 \leq \frac{4M^6 \kappa_a C_1}{k_2} (t - t_0).$$

□

Следующая теорема показывает, что при $t = t_* \approx 0$, если $t_0 = 0$, интенсивность излучения становится близкой к решению стационарного уравнения при заданной температуре.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i), (ii), $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $s > 0$ — любое число, $d \geq \frac{C_2(2+s+1/s)}{2k_2c}$. Для решения задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq g_s(t) \equiv (1+s)de^{2k_2c(t_0-t)} + C_2(2+s+1/s)(t-t_0), \quad t > t_0.$$

Функция $g_s(t)$ убывает на (t_0, t_*) и достигает минимума в точке

$$t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{2(1+s)k_2cd}{C_2(2+s+1/s)},$$

$$g_s(t_*) = \frac{C_2(2+s+1/s)}{2k_2c} + \frac{C_2(2+s+1/s)}{2k_2c} \ln \frac{2(1+s)k_2cd}{C_2(2+s+1/s)}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$\begin{aligned} \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 &\leq (\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| + \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|)^2 = \\ &= \|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + 2\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| \cdot \|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\| \leq \\ &\leq (1+s)\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 + (1+1/s)\|\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3 и лемму 2, получим, что

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1+s)de^{2k_2c(t_0-t)} + C_2(2+s+1/s)(t-t_0).$$

Чтобы получить второе утверждение теоремы, заметим, что $g'_s(t) < 0$ на $(0, t_*)$, $g'_s(t_*) = 0$, $g'_s(t) > 0$ при $t > t_*$. □

Чтобы получить оценку $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2$ при всех t , нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть выполняются условия (i), (ii). Справедлива оценка $\|\zeta(t)\|_V^2 \leq C_3$, $t > 0$, где $C_3 = \frac{1}{k_1}(A_1\zeta_0, \zeta_0) + 2b\kappa_a M^5 |\Omega|/k_1$.

Доказательство. Из результатов [12, с. 73] следует, что

$$\frac{d}{dt}(A_1\zeta, \zeta) + \|A_1\zeta\|^2 \leq \|f\|^2, \quad |f| \leq 2b\kappa_a M^4.$$

Для любого $C > 0$ справедливо неравенство $(A_1\zeta, \zeta) \leq \frac{C}{2}\|A_1\zeta\|^2 + \frac{1}{2C}\|\zeta\|^2$, откуда $\|A_1\zeta\|^2 \geq \frac{2}{C}(A_1\zeta, \zeta) - \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}(A_1\zeta, \zeta) + \frac{2}{C}(A_1\zeta, \zeta) \leq \|f\|^2 + \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2.$$

Заметим, что $\|f\|^2 + \frac{1}{C^2}\|\zeta\|^2 \leq 4b^2\kappa_a^2M^8|\Omega| + \frac{M^2}{C^2}|\Omega|$, поэтому

$$\begin{aligned} (A_1\zeta, \zeta) &\leq (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-2t/C} + \frac{C}{2} \left(4b^2\kappa_a^2M^8|\Omega| + \frac{M^2}{C^2}|\Omega| \right) (1 - e^{-2t/C}) \leq \\ &\leq (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-2t/C} + 2Cb^2\kappa_a^2M^8|\Omega| + \frac{M^2}{2C}|\Omega| = (A_1\zeta_0, \zeta_0)e^{-4b\kappa_aM^3t} + 2b\kappa_aM^5|\Omega|, \end{aligned}$$

здесь выбрано $C = \frac{1}{2b\kappa_aM^3}$. Используя неравенство $k_1\|\zeta\|_V^2 \leq (A_1\zeta, \zeta)$, получаем утверждение леммы. \square

Следующая теорема показывает, что при $t > t_*$, если $t_0 = 0$, интенсивность излучения остается близкой к решению стационарного уравнения.

Теорема 5. Пусть выполняются условия (i), (ii), $s > 0$ — любое число. Для решения задачи (6)–(8) справедлива оценка

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq \frac{C_4(2 + s + 1/s)y_*(s)}{2k_2c} + \varepsilon(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

где $C_4 = C_2(\sqrt{C_3}) = \frac{4M^6\kappa_a}{k_2} \left(\frac{1}{2k_1}\|A_1\|^2C_3 + 4b\kappa_aM^5|\Omega| \right)$, $y_*(s)$ — правый корень уравнения $(1+s)(1+\ln y) = y$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Доказательство. По теореме 4, если $\|\varphi(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0)\|^2 \leq d$, $d \geq \tilde{d} = \frac{C_4(2 + s + 1/s)}{2k_2c}$, то $\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(t_*)\|^2 \leq f(d)$, $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1+s)d$, $t \in (t_0, t_*)$,

где $f(x) = (1+s)q \left(1 + \ln \frac{x}{q} \right)$, $q = \frac{C_4(2 + s + 1/s)}{2k_2c(1+s)}$, $t_* = t_0 + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{d}{q}$.

Заметим, что $\left(\frac{f(x)}{x} \right)' < 0$ при $x > q$, $\frac{f(x)}{x} \Big|_{x=q} = 1+s > 1$, $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Следовательно, существует единственное $x^* > q$ такое, что $f(x^*) = x^*$, причем $x < f(x) < x^*$ при $x \in (q, x^*)$ и $x_* < f(x) < x$ при $x > x_*$. Отметим, что $y_* = x_*/q$ является правым корнем уравнения $(1+s)(1+\ln y) = y$.

Положим $d_0 = \max \left\{ \|\varphi_0 - \tilde{\varphi}(0)\|^2, \tilde{d} \right\}$. Заметим, что $d_0 > q$. Определим рекуррентную последовательность $d_{n+1} = f(d_n)$, $n = 0, 1, \dots$. Если $d_0 < x_*$, то $d_0 < d_n < x_*$, $n = 1, 2, \dots$. Если $d_0 \geq x_*$, то $x_* \leq d_{n+1} < d_n$, $n = 0, 1, \dots$, поэтому последовательность d_n сходится к решению уравнения $x = f(x)$, $x \geq x_*$, следовательно, $d_n \rightarrow x_*$.

Применим теорему 4 бесконечное число раз, полагая t_0 равным t_* из предыдущего шага, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{2k_2c} \ln \frac{d_n}{q}$, $n = 0, 1, \dots$. Заметим, что $f(\tilde{d}) > \tilde{d}$, поэтому

$\tilde{d} < x_*$, значит, $d_n \geq \tilde{d} > q$, $n = 0, 1, \dots$. Последовательность d_n ограничена снизу числом, большим q , поэтому $t_n \rightarrow +\infty$.

Итак, если $\|\varphi(t_n) - \tilde{\varphi}(t_n)\|^2 \leq d_n$, то $\|\varphi(t_{n+1}) - \tilde{\varphi}(t_{n+1})\|^2 \leq d_{n+1}$, $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1+s)d_n$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Поскольку $d_n < x_*$ либо $d_n \geq x_*$, $d_n \rightarrow x_*$, то $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq (1+s)x_* + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. \square

Замечание 2. Оценка (13) будет наилучшей при значении s , доставляющем минимум функции $\psi(s) = (2+s+1/s)y_*(s)$. Оптимальное значение, найденное численно [14]: $s_* \approx 0.328$, $y_*(s_*) \approx 2.594$.

3. Численный пример

Проиллюстрируем полученный результат на примере для одномерного варианта задачи (1)–(4):

$$\begin{aligned} \theta_t - a\theta_{xx} + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) &= 0, & \frac{1}{c}\varphi_t - \alpha\varphi_{xx} + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) &= 0 \quad \text{на } (0, L), \\ -a\theta_x + \beta(\theta - \theta_b)|_{x=0} &= 0, & a\theta_x + \beta(\theta - \theta_b)|_{x=L} &= 0, \\ -\alpha\varphi_x + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{x=0} &= 0, & \alpha\varphi_x + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{x=L} &= 0, \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0, & \varphi|_{t=0} &= \varphi_0, \end{aligned}$$

моделирующего процесс сложного теплообмена в плоскопараллельном слое толщиной L . Считаем, что $\beta(0) = \beta(L)$, $\gamma(0) = \gamma(L)$.

Найдем численные значения полученных оценок, чтобы сравнить их с данными вычислительного эксперимента. Для оценки сверху постоянных C_1, C_2, C_3, C_4 нам понадобятся оценки величин $k_1, k_2, \|A_1\|$. Простые оценки [14] показывают, что $\underline{k}_1 \leq k_1 \leq \overline{k}_1$, $\underline{k}_2 \leq k_2 \leq \overline{k}_2$, $\underline{N}_1 \leq \|A_1\| \leq \overline{N}_1$, где

$$\begin{aligned} \underline{k}_1 &= \min \left\{ \frac{a}{L^2/4 + 1}, \frac{\beta}{L} \right\}, & \overline{k}_1 &= \min \left\{ \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}, \frac{2\beta}{L} \right\}, \\ \underline{k}_2 &= \min \left\{ \frac{4\alpha}{L^2}, \frac{\gamma}{L} \right\}, & \overline{k}_2 &= \min \left\{ \frac{\pi^2 \alpha}{L^2}, \frac{2\gamma}{L} \right\}, \\ \underline{N}_1 &= \max \left\{ \frac{\pi^2 a}{L^2 + \pi^2}, \frac{2\beta}{L} \right\}, & \overline{N}_1 &= a + 4\beta \max\{L, 1/L\}. \end{aligned}$$

Тогда при $t_0 = 0$: $\underline{C}_1 \leq C_1 \leq \overline{C}_1$, $\underline{C}_2 \leq C_2 \leq \overline{C}_2$, $\underline{C}_3 \leq C_3 \leq \overline{C}_3$, $\underline{C}_4 \leq C_4 \leq \overline{C}_4$, где

$$\begin{aligned} \underline{C}_1 &= \frac{1}{2\underline{k}_1} \underline{N}_1^2 \|\zeta_0\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 L, & \overline{C}_1 &= \frac{1}{2\overline{k}_1} \overline{N}_1^2 \|\zeta_0\|_V^2 + 4b\kappa_a M^5 L, \\ \underline{C}_2 &= 4M^6 \kappa_a \underline{C}_1 / \underline{k}_2, & \overline{C}_2 &= 4M^6 \kappa_a \overline{C}_1 / \overline{k}_2, & \overline{C}_3 &= \frac{1}{\underline{k}_1} (A_1 \zeta_0, \zeta_0) + 2b\kappa_a M^5 L / \underline{k}_1, \\ \overline{C}_4 &= \frac{4M^6 \kappa_a}{\underline{k}_2} \left(\frac{1}{2\overline{k}_1} \overline{N}_1^2 \overline{C}_3 + 4b\kappa_a M^5 L \right). \end{aligned}$$

По теореме 4, при $t_0 = 0$, $s = 1$,

$$\|\varphi(t_*) - \tilde{\varphi}(t_*)\|^2 \leq \frac{2\overline{C}_2}{\underline{k}_2 c} + \frac{2\overline{C}_2}{\underline{k}_2 c} \ln \frac{\overline{k}_2 c d}{\underline{C}_2}, \quad t_* \leq \frac{1}{2\underline{k}_2 c} \ln \frac{\overline{k}_2 c d}{\underline{C}_2}. \quad (14)$$

По теореме 5, имеем

$$\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2 \leq \frac{\overline{C_4}(2 + s + 1/s)y_*(s)}{2k_2c} + \varepsilon(t), \quad t > 0, \quad (15)$$

где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В качестве физических постоянных выберем параметры воздуха при температуре 400 °С и нормальном атмосферном давлении [15, с. 319]: $k = 0.0521$ Вт/(м·К), $\rho = 0.524$ кг/м³, $c_p = 1068$ Дж/(кг·К). Положим $L = 0.5$ м, $T_{\max} = 773$ К, $\kappa_a = 1$ м⁻¹, $\kappa = 10$ м⁻¹, $A = 0$, $n = 1$, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, $h = 10$ Вт/(м²·К), $\varepsilon = 0.8$, $\theta_b = 0.4$.

Начальные функции $\zeta_0 = \theta_0 - \theta_s$, $\xi_0 = \varphi_0 - \varphi_s$, где $\theta_s = \theta_b$, $\varphi_s = \theta_b^4$ — стационарное решение, имеют вид $\zeta_0(x) = \xi_0(x) = A \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right)$, где $A = 0.3$. Отметим, что $M = 1$, $\|\zeta_0\|_V^2 = 3LA^2/2 + 2\pi^2 A^2/L$, $(A_1\zeta_0, \zeta_0) = 2\pi^2 A^2 a/L$.

Расчет полей температуры и интенсивности излучения проведен на временном интервале длины $T = 6 \cdot 10^{-8}$ с. Использована разностная схема второго порядка точности по x и неявная схема Эйлера по t . Выбрана равномерная сетка с 1001 точками по пространству и 10001 точками по времени. Программная реализация выполнена с помощью разработанной автором библиотеки Joker FDM [14].

На рис. 1 представлен график функции $r(t) = (\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|^2/L)^{1/2}$ в логарифмической шкале по оси ординат. На графике видно, что величина $r(t)$ экспоненциально убывает с большим показателем экспоненты примерно до момента времени $t = 4 \cdot 10^{-8}$, затем скорость убывания становится меньше.

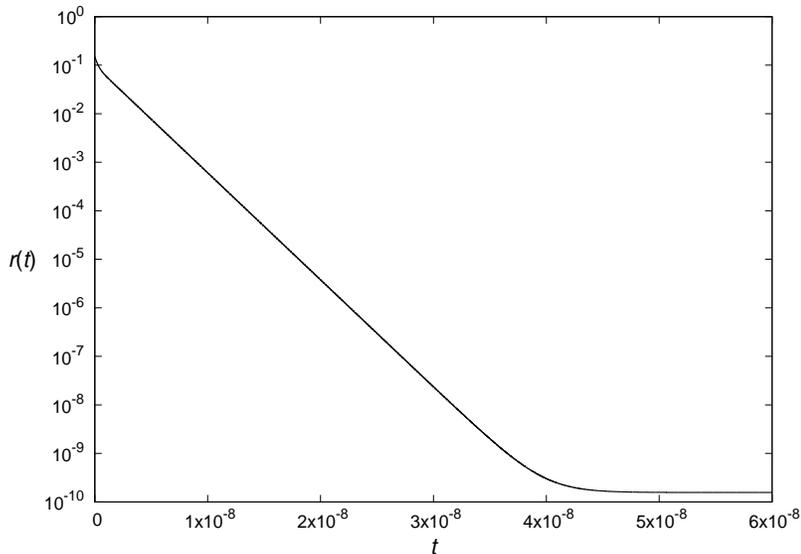
Из вычислительного эксперимента получаем оценку $\|\varphi_0 - \tilde{\varphi}(0)\|^2 \leq d$, где $d = 0.0113$. Из оценки (14) получаем, что $r(t_*) \leq 0.029$, где $t_* \leq 3 \cdot 10^{-8}$. Для сравнения: по данным вычислительного эксперимента $r(3 \cdot 10^{-8}) \approx 2.4 \cdot 10^{-8}$. Из оценки (15) при $s = 0.328$ получаем, что при $t > 0$ справедливо неравенство $r(t) \leq 0.41 + \varepsilon(t)$, где $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Программа для расчета оценок доступна в электронном ресурсе [14].

Заключение

В работе получены теоретические оценки величины $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|$, где φ — интенсивность излучения, взятая из решения нестационарной модели сложного теплообмена, $\tilde{\varphi}(t)$ — решение стационарного уравнения для интенсивности излучения, в котором поле температуры берется из решения нестационарной модели в момент времени t .

Показано, что при большом значении скорости света величина $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|$ достигает малого значения за короткий промежуток времени $(0, t_*)$ и при $t > t_*$ остается малой. На численном примере показано, что при $t \approx 0$ происходит экспоненциальное уменьшение величины $\|\varphi(t) - \tilde{\varphi}(t)\|$ с большим показателем экспоненты.

Проведенный анализ объясняет резкое изменение интенсивности излучения в нестационарной модели при $t \approx 0$ и обосновывает применимость стационарного уравнения для интенсивности излучения при моделировании процесса сложного теплообмена.

Рис. 1. График функции $r(t)$.

Список литературы

- [1] E. Schneider, M. Seaid, J. Janicka, A. Klar, “Validation of simplified P_N models for radiative transfer in combustion systems”, *Commun. Numer. Meth. Engrg.*, **24**:2, (2008), 85–96.
- [2] A. Farina, A. Klar, R. M. M. Mattheij, A. Mikelić, N. Siedow, *Mathematical models in the manufacturing of glass*, Springer, 2011.
- [3] А. А. Амосов, “Нестационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **59**, (2016), 5–34.
- [4] А. А. Амосов, “Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **57**:3, (2017), 510–535.
- [5] M. F. Modest, *Radiative heat transfer*, 3rd edition, Academic press, 2013.
- [6] M. Frank, A. Klar, E. W. Larsen, S. Yasuda, “Time-dependent simplified P_N approximation to the equations of radiative transfer”, *J. Comput. Phys.*, **226**:2, (2007), 2289–2305.
- [7] E. Olbrant, E. W. Larsen, M. Frank, B. Seibold, “Asymptotic derivation and numerical investigation of time-dependent simplified P_N equations”, *J. Comput. Phys.*, **238**, (2013), 315–336.
- [8] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1, (2014), 18–32.
- [9] G. Grenkin, A. Chebotarev, “Lyapunov stability analysis of a radiative heat transfer model”, *Математическое моделирование и компьютерные технологии [Электронный ресурс]: молодежная конференция-школа, Владивосток, 25–29 сентября 2017 г.: сборник материалов*, Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, Владивосток, 2017, С. 25–31.
- [10] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, “Нестационарная задача сложного теплообмена”,

Журн. вычисл. матем. и матем. физ., **54**:11, (2014), 106–116.

- [11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **20**:3, (2015), 776–784.
- [12] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Springer, 1998.
- [13] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators*, Springer, 1990.
- [14] <https://github.com/grenkin/joker-fdm/tree/master/examples/bvp1d/heat1>.
- [15] М. А. Михеев, И. М. Михеева, *Основы теплопередачи*, Энергия, М., 1977.

Поступила в редакцию
22 февраля 2018 г.

Исследование выполнено при финансовой
поддержке Российского Научного Фонда (про-
ект № 14-11-00079)

Grenkin G. V. Properties of solutions of a complex heat transfer model. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. V. 18. No 1. P. 23–33.

ABSTRACT

A nonstationary complex heat transfer model including the heat equation and the nonstationary P_1 approximation of the radiative transfer equation is considered. The applicability of the steady-state equation for the radiative intensity to modelling of the complex heat transfer process is studied. It is shown that for large values of the parameter of speed of light the radiative intensity field comes close to the solution of the steady-state equation in a short time.

Key words: *radiative heat transfer, diffusion approximation.*