Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 39–47

УДК 517.927.2, 531
MSC2010 34A25, 34A30, 70B99

© М. А. Гузев[1]

Точная формула для температуры одномерного кристалла

Получено аналитическое представление для температуры в одномерном гармоническом кристалле. Показано, что для большого числа частиц ведущий вклад в температурное распределение не зависит от номера частицы.

Ключевые слова: *одномерный гармонический кристалл, молекулярная динамика, температура.*

Введение

Хорошо известны результаты численного моделирования высокочастотных колебаний кинетической и потенциальной энергий частицы в идеальной кристаллической решетке [1]: если в начальный момент времени частицы упорядочены в идеальной кристаллической решетке и их скорости заданы случайно, то процесс перехода одного типа энергии в другой сопровождается высокочастотным колебательным процессом с затухающей амплитудой. Подход к теоретическому анализу этого явления был предложен в [2] для модели одномерного гармонического кристалла, который рассматривался как цепочка частиц, имеющих равную массу m и соединенных одинаковыми линейными пружинами с жесткостью k. Предполагается, что взаимодействие между частицами определяется ближайшими соседями

$$\ddot{u}_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}, \ \ u_i\big|_{t\,=\,0} = 0, \ \ \dot{u}_i\big|_{t\,=\,0} = v_{i0}, \tag{1}$$

где функция u_i определяет смещение частицы из положения равновесия (время измеряется в единицах $\sqrt{m/k}$). Развитый в [2] метод аналитического описания колебаний предполагает, что число частиц $n \gg 1$. При этом условии был также предложен приближенный способ вычисления кинетической энергии, основанный на континуальном приближении [3]. В данной работе снимем ограничение $n \gg 1$ и изложим основные идеи и результат, говорящий о поведении во времени температуры частиц для модели одномерного гармонического кристалла.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru

1. Основные соотношения модели

Локальной мерой температуры частицы является ее кинетическая энергия $K_j = = v_j^2/2$, где введена скорость частицы $v_j = \dot{u}_j$. В момент времени t набор координат и скоростей определяется как решение системы (1) и дается формулами

$$
\begin{gathered}
u_j = \sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{jk}\varphi_k(t), \qquad v_j = \sum_{j\,=\,1}^{n} \alpha_{jk}\dot{\varphi}_k(t), \\
\alpha_{jk} = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\sin 2jz_k, \qquad z_k = \frac{\pi k}{2(n+1)},
\end{gathered} \tag{2}
$$

в которых функция $\varphi_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$
\ddot{\varphi}_k(t) = -\omega_k^2\varphi_k(t), \quad \omega_k = 2\sin z_k, \quad \varphi_k|_{t\,=\,0} = 0, \quad \dot{\varphi}_k|_{t\,=\,0} = p_{k0}. \tag{3}
$$

Соотношения (2), (3) реализуют общую идею построения решения системы уравнений (1) в базисе, образованном собственными векторами матрицы разностного оператора этой системы (см., например, [3]).

Распределение $P = P(\mathbf{p}_0)$ значений вектора $\mathbf{p}_0 = (p_{10}, \ldots, p_{n0})$ предполагается каноническим [4]:

$$
P = C^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k\,=\,1}^{n} p_{k0}^2\right), \qquad C = \int\limits_{R^n} d\mathbf{p}\exp\left(-\frac{1}{2T_0}\sum_{k\,=\,1}^{n} p_{k0}^2\right) = (2T_0\pi)^{n/2},
$$

$$
\int\limits_{R^n} p_{k_1 0}p_{k_2 0}P\,d\mathbf{p} = 2T_0\delta_{k_1k_2},
$$

где T_0 имеет смысл средней температуры кристалла. Значение температуры в каждой точке среды получим в результате усреднения локальной кинетической энергии K_j по значениям вектора $\mathbf{p}_0 = (p_{10}, \ldots, p_{n0})$:

$$
\langle K_j\rangle_P = \left\langle \frac{v_j^2}{2} \right\rangle_P, \tag{4}
$$

где скобки $\langle\rangle_P$ обозначают усреднение по распределению $P = P(\mathbf{p}_0)$. Из (1)–(3) следует, что

$$
v_j = \sum_{k\,=\,1}^{n} \alpha_{jk}p_{k0}\cos\omega_k t, \;\; p_{j0} = \sum_{k\,=\,1}^{n} \alpha_{jk}v_{k0}.
$$

Подставляя это представление в (4), получаем

$$
\begin{gathered}
\langle K_j\rangle_P = \frac{2T_0}{n+1}\sum_{k\,=\,1}^{n} (\sin 2jz_k)^2(\cos\omega_k t)^2 = \\
= \frac{T_0}{2(n+1)}\sum_{k\,=\,1}^{n}\left(1 - \cos\frac{2\pi jk}{n+1} + \cos 2\omega_k t - \cos\frac{2\pi jk}{n+1}\cos 2\omega_k t\right).
\end{gathered} \tag{5}
$$

2. Суммирование

Приближенная формула в [3] была получена благодаря условию $n \gg 1$, которое позволило перейти к интегралу в (5). Чтобы уточнить ее, учтем представление, полученное Якоби [5], и формулу суммирования для тригонометрических функций [6]:

$$\cos(2\omega_k t) = \cos(4t \sin z_k) = J_0(4t) + 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(4t)\cos(2pz_k),$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{\pi pk}{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \text{ нечетное}, \\ -1, & \text{если } p \text{ четное}. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\cos\frac{2\pi jk}{n+1} + \cos 2\omega_k t\right) = 1 + nJ_0(4t) - 2\sum_{p=1}^{\infty} J_{4p}(4t).$$

Сумма бесселевых функций определяется соотношением [7]:

$$\sum_{p=1}^{\infty} J_{4p}(4t) = \frac{1}{2}[\cos^2 2t - J_0(4t)].$$

Выполненные вычисления приводят к следующему результату для первых трех сумм в правой части (5):

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \cos\frac{2\pi jk}{n+1} + \cos 2\omega_k t\right) = n + \sin^2 2t + (n+1)J_0(4t). \tag{6}$$

Сумма, порождаемая последним вкладом в (5), равна

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2\pi jk}{n+1}\cos 2\omega_k t = -J_0(4t) + 2\sum_{p=1}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t), \\ CC = \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{2\pi jk}{n+1}\cos\frac{\pi pk}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{\pi k}{n+1}(p-2j) + \cos\frac{\pi k}{n+1}(p+2j)\right].\end{gathered} \tag{7}$$

Если применить формулу для суммы тригонометрического ряда, то

$$CC = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi(p-2j)}{2}\sin n\frac{\pi(p-2j)}{2(n+1)}}{\sin\frac{\pi(p-2j)}{2(n+1)}} + \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\pi(p+2j)}{2}\sin n\frac{\pi(p+2j)}{2(n+1)}}{\sin\frac{\pi(p+2j)}{2(n+1)}}. \tag{8}$$

Отсюда видно, что при некотором соотношении между p и j значение знаменателя является малым, однако компенсируется малостью числителя, что приводит к необходимости раскрыть неопределенность полученного выражения. Поэтому распределим числа p в (7) по четырем непересекающимся множествам: (A), (B), (C),(D) – и запишем

$$\begin{gathered}\sum_{p=1}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t) = \sum_{p\in(A)}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t) + \sum_{p\in(B)}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t) + \\ + \sum_{p\in(C)}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t) + \sum_{p\in(D)}^{\infty} CC \cdot J_{2p}(4t).\end{gathered} \tag{9}$$

Первое множество (A) определим из условия, согласно которому $p-2j, p+2j$ не делятся на $n+1$, тогда CC вычисляется с использованием (8) и

$$\sum_{p\in(A)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) = -\sum_{N=1}^{\infty} J_{4N}(4t) = -\frac{1}{2}[\cos^2 2t - J_0(4t)]. \tag{10}$$

Второе множество (B) включает такие p, для которых $p-2j$ делится на $n+1$, а $p+2j$ не делится на $n+1$. В этом случае p параметризуются соотношением $p=2j+m(n+1)$, где m — натуральное число, и $p+2j=4j+m(n+1)$ не делится на $n+1$, если $j\neq(n+1)/4$. Тогда

$$CC = \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi jk}{n+1}\cos\frac{\pi k}{n+1}[2j+m(n+1)] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{km}\left(\cos\frac{2\pi jk}{n+1}\right)^2. \tag{11}$$

Если m — четное, то

$$CC = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi jk}{n+1}\right)^2 = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{4\pi jk}{n+1} = \begin{cases}\frac{n-1}{2}, & j\neq\frac{n+1}{2};\\ n, & j=\frac{n+1}{2}.\end{cases}$$

Для нечетного m из (11) получаем

$$CC = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\cos\frac{2\pi jk}{n+1}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left[1+\cos\frac{4\pi jk}{n+1}\right] = \begin{cases}\frac{(-1)^n-1}{2}, & j\neq\frac{n+1}{4};\\ \frac{n+(-1)^n-1}{2}, & j=\frac{n+1}{4}.\end{cases}$$

Проведенные вычисления позволяют записать следующий результат для множества (B):

$$\sum_{p\in(B)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) =$$

$$\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)\left(\sum_{\substack{p=2j+m(n+1),\\ \text{четные}\, m}}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) + \sum_{\substack{p=2j+m(n+1),\\ \text{нечетные}\, m}}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t)\right) =$$

$$= \left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right) n\delta_{j,\left[\frac{n+1}{2}\right]}\delta_{\frac{n+1}{2},\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\text{четные } m}^{\infty} J_{2(1+m)(n+1)}(4t)+$$

$$+\frac{n-1}{2}\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{2}}\right)\sum_{\text{четные } m}^{\infty} J_{2(2j+m(n+1))}(4t)+$$

$$+\frac{(-1)^n-1}{2}\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)\sum_{\text{нечетные } m}^{\infty} J_{2(2j+m(n+1))}(4t). \tag{12}$$

Третье множество (C) задается условием: $p+2j$ делится на $n+1$, а $p-2j$ не делится на $n+1$. Мы параметризуем p соотношением $p=-2j+q(n+1)$ с натуральным q, тогда соответствующая множеству (C) в (9) сумма вычисляется способом, аналогичным для множества (B), и равна

$$\sum_{p\in(C)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t)=$$

$$=\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)n\delta_{j,\left[\frac{n+1}{2}\right]}\delta_{\frac{n+1}{2},\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{\text{четные } m}^{\infty}J_{2(1+m)(n+1)}(4t)+$$

$$+\frac{n-1}{2}\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{2}}\right)\sum_{\text{четные } m}^{\infty}J_{2(-2j+m(n+1))}(4t)+$$

$$+\frac{(-1)^n-1}{2}\left(1-\delta_{j,\frac{n+1}{4}}\right)\sum_{\text{нечетные } m}^{\infty}J_{2(-2j+m(n+1))}(4t). \tag{13}$$

Четвертое множество (D) определяется из требования, по которому числа $p-2j$ и $p+2j$ делятся на $n+1$. Тогда значения p можно параметризовать: $p=2j+r(n+1)$, $p=-2j+s(n+1)$ с натуральными r, s. Отсюда следует, что

$$p=\frac{r+s}{2}(n+1),\qquad j=\frac{s-r}{4}(n+1). \tag{14}$$

Поскольку $1\leqslant j\leqslant n$, то из последнего соотношения (14) следуют ограничения на r,s:

$$\alpha)\ s-r=1,\qquad \beta)\ s-r=2,\qquad \gamma)\ s-r=3. \tag{15}$$

При выполнении условия $\alpha)$ получаем из (14) величины $p=r(n+1)+(n+1)/2$ и $j=(n+1)/4$, т.е. видим, что решение для j существует только для $n+1$, которое делится на 4. Значение CC (7) равно

$$CC=\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2}\cos\frac{\pi k}{n+1}[r(n+1)+(n+1)/2]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{kr}[\cos(\pi k/2)]^2. \tag{16}$$

Для четного r сумма находится на основе соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}[\cos(\pi k/2)]^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(1+\cos\pi k)=\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k=\frac{n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}.$$

При нечетном r получаем

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k[\cos(\pi k/2)]^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k\pi=\frac{(-1)^n-1}{4}+\frac{n}{2}.$$

Таким образом,

$$CC=\frac{n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}. \tag{17}$$

Для условия β) (15) находим $p=(r+1)(n+1)$, $j=(n+1)/2$ и

$$\cos\frac{\pi pk}{n+1} = \cos\pi k(r+1) = (-1)^{k(r+1)}, \qquad \cos\frac{2\pi jk}{n+1} = \cos\pi k = (-1)^k.$$

Тогда $CC=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{kr}$ и

$$CC = \begin{cases} n, & \text{для четных } r, \\ \frac{(-1)^n-1}{2}, & \text{для нечетных } r. \end{cases} \tag{18}$$

Для последнего условия γ) в (15) получаем $p=(r+3/2)(n+1)$ и $j=3(n+1)/4$. Поскольку

$$\cos\frac{\pi pk}{n+1} = \cos[\pi k(r+1)+\pi k/2] = (-1)^{k(r+1)}\cos[\pi k/2], \quad \cos\frac{2\pi jk}{n+1} = \cos[\pi k/2],$$

то отсюда и из (7) следует

$$CC = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k(r+1)}[\cos(\pi k/2)]^2,$$

совпадающее с (16), результат для которого дается соотношением (17).

Следовательно, на основе (16)–(18) можно сформулировать окончательный результат для множества (D):

$$\sum_{p\in(D)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) = \left(\frac{n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}\right)\delta_{j,\left[\frac{n+1}{4}\right]}\delta_{\frac{n+1}{4},\left[\frac{n+1}{4}\right]}\sum_{r=1}^{\infty} J_{(1+2r)(n+1)}(4t)+$$

$$+\delta_{j,\left[\frac{n+1}{2}\right]}\delta_{\frac{n+1}{2},\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left[n\sum_{\text{четные } r}^{\infty} J_{2(1+r)(n+1)}(4t)+\frac{(-1)^n-1}{2}\sum_{\text{нечетные } r}^{\infty} J_{2(1+r)(n+1)}(4t)\right]+$$

$$+\delta_{j,\left[\frac{3(n+1)}{4}\right]}\delta_{\frac{n+1}{4},\left[\frac{n+1}{4}\right]}\left(\frac{n}{2}+\frac{(-1)^n-1}{4}\right)\sum_{r=1}^{\infty} J_{2(r+3(n+1)/2)}(4t). \tag{19}$$

3. Представление для температуры

Суммируя результаты вычислений предыдущего раздела, запишем формулу для распределения температуры в кристалле при произвольном числе частиц n:

$$\langle K_j\rangle_P = \frac{T_0}{2}\left(1+J_0(4t)+\frac{\Phi_j}{n+1}\right). \tag{20}$$

В (20) функция Φ_j определяется соотношением

$$\Phi_j = -2\sum_{p\in(B)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) - 2\sum_{p\in(C)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t) - 2\sum_{p\in(D)}^{\infty} CC\cdot J_{2p}(4t), \tag{21}$$

где отдельные слагаемые даются формулами (12), (13), (19). Чтобы проанализировать структуру Φ_j, исключим из рассмотрения точки, в которых j может принимать значения $\frac{n+1}{4}$, $\frac{n+1}{2}$, $\frac{3(n+1)}{4}$, и дополнительно предположим, что $n \gg 1$. Тогда при асимптотическом разложении (21) по $1/n$ ведущее слагаемое равно

$$\Phi_j = \sum_{\text{четные } m}^{\infty} [J_{2(2j+m(n+1))}(4t) + J_{2(-2j+q(n+1))}(4t) + ...], \tag{22}$$

где многоточия указывают на члены порядка малости $1/n$ и выше. При вычислении сумм в (22) воспользуемся интегральным представлением для функции Бесселя:

$$J_{2p}(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \cos(t\sin\theta)\cos(2p\theta).$$

Это позволяет переписать (22) в виде

$$\Phi_j = \frac{2}{\pi}\sum_{N=1}^{\infty}\int_0^{\pi} d\theta \cos(4t\sin\theta)\cos(4j\theta)\cos[4N(n+1)\theta].$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{N=1}^{\infty}\int_0^{\pi} d\theta \cos(4t\sin\theta)\cos(4j\theta)\cos[4N(n+1)\theta] =$$
$$= -\sum_{N=1}^{\infty}\int_0^{\pi} d\theta \frac{d}{d\theta}[\cos(4t\sin\theta)\cos(4j\theta)]\frac{\sin[4N(n+1)\theta]}{4N(n+1)}.$$

Для вычисления суммы ряда можно воспользоваться справочной формулой [6]

$$S(\theta) = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi N\Pi\theta)}{N} = \sum_{N=1}^{\infty}\frac{\sin[4(n+1)N\theta]}{N} = \frac{4(n+1)\theta-\pi}{2},$$
$$0<\theta<\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Обозначим через $PS(\theta)$ периодическое продолжение функции $S(\theta)$ с $(0, \frac{\pi}{2(n+1)})$ на $(0,\pi)$, тогда Φ_j равно

$$\Phi_j = -\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{\pi} d\theta D(\theta)PS(\theta). \tag{23}$$

$$D(\theta) = \frac{d[\cos(4t\sin\theta)\cos(4j\theta)]}{d\theta} =$$
$$= 4t\sin(4t\sin\theta)\cos(4j\theta)\cos(\theta) - 4j\cos(4t\sin\theta)\sin(4j\theta).$$

Отсюда видно, что для фиксированного момента времени функция $\Phi_j \sim \underline{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Поскольку $D(\theta) \sim t, j$, то представляется интересным исследовать поведение Φ_j при $t \gg 1$ и $j \sim n$. Интеграл (23) является интегралом типа Фурье [8]. Для $t \gg 1$ он вычисляется с помощью метода стационарной фазы. На отрезке $[0, \pi]$ существует единственная стационарная точка $\theta_* = \pi/2$, в которой $D(\theta_*) = 0$. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла следует учесть более высокие по переменной $\pi/2 - \theta$ члены разложения $D(\theta)$. Размер окрестности, дающей основной вклад в интеграл, имеет порядок $1/\sqrt{t}$. Тогда в этой окрестности справедливы следующие оценки:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sim \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \qquad \sin(4j\theta) = \sin 4j\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \sim \underline{O}\left(\frac{j}{\sqrt{t}}\right)$$

и, как следствие, $D(\theta) \sim \underline{O}(\sqrt{t}j)$. При применении метода стационарной фазы в интеграле (23) возникает коэффициент $1/\sqrt{t}$ в качестве множителем, тогда $\Phi_j \sim \underline{O}\left(\frac{j}{n}\right) \sim \overline{O}(1)$ для конечных значений j. При $j \sim n \gg 1$ следует уточнить оценку для Φ_j, поскольку можно применить лемму Римана–Лебега [8]. В этом случае для фиксированного момента времени $\Phi_j \sim \frac{j}{n}\overline{O}(1) \sim \overline{O}(1)$. Значит, при $t \gg 1$, $j \sim n$ функция $\Phi_j \sim \overline{O}(1)$.

Таким образом, для большого числа частиц $n \gg 1$ асимптотическое поведение температуры частицы дается формулой

$$\langle K_j \rangle_P = \frac{T_0}{2}[1 + J_0(4t) + \overline{O}(1)].$$

Она совпадает с результатом, полученным в [2,3] для средней кинетической энергии.

Список литературы

[1] M. P. Allen, A. K. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[2] А. М. Кривцов, “Колебания энергий в одномерном кристалле”, *Доклады Академии наук*, **458**:3, (2014), 279–281.

[3] М. А. Гузев, А. А. Дмитриев, “Осцилляционно-затухающее поведение температуры в кристалле”, *Дальневост. матем. журн.*, **17**:2, (2017), 170–179.

[4] Дж. В. Гиббс, *Термодинамика. Статистическая механика*, Наука, Москва, 1982.

[5] Г. Н. Ватсон, *Теория беселевых функций. Часть первая*, Издательство иностранной литературы, Москва, 1949.

[6] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, в 3 т., т. 1, Физматлит, Москва, 2002.

[7] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Специальные функции*, в 3 т., т. 2, Физматлит, Москва, 2003.

[8] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды (СМБ)*, Наука ГРФМЛ, Москва, 1987.

Поступила в редакцию
13 апреля 2018 г.

Работа поддержана РНФ (грант № 14-11-00079).

Guzev M. A. The exact formula for the temperature of a one-dimensional crystal. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 39–47.

ABSTRACT

An analytical representation is obtained for the temperature in a one-dimensional harmonic crystal. It is shown that for a large number of particles, the leading contribution to the temperature distribution does not depend on the particle number.

Key words: *one-dimensional harmonic crystal, molecular dynamics, temperature.*