Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 48–55

УДК 517.95
MSC2010 35Q31

© А. А. Илларионов[1], Л. В. Илларионова[2]

Разрешимость стационарной краевой задачи для уравнений Эйлера неоднородной несжимаемой жидкости

Рассматривается краевая задача для уравнений Эйлера, описывающих стационарное течение идеальной неоднородной несжимаемой жидкости через двумерную конечную область. На всей границе задается нормальная составляющая вектора скорости, а на участке втекания (либо вытекания) — полный напор и плотность жидкости. Доказывается разрешимость задачи (без условий типа малости).

Ключевые слова: *уравнения гидродинамики, уравнения Эйлера, краевые задачи*

1. Введение

Исследование корректности граничных задач для уравнений Эйлера несжимаемой жидкости имеет долгую и богатую историю. Особенно хорошо изучены *нестационарные* течения (см., например, [1–16] и ссылки там). Стационарный случай исследовался Г. В. Алексеевым [5,17–19], О. В. Трошкиным [20,21] и А. Б. Моргулисом [22]. Более подробный обзор литературы можно найти в [14, 16, 22]. Малоизученными остаются *стационарные* задачи протекания *неоднородной* идеальной жидкости. В этом направлении исследований можно отметить диссертацию [5] в которой доказана разрешимость «в малом» одной краевой задачи для стационарных уравнений Эйлера неоднородной жидкости, и статьи [23–26], в которых изучены краевые задачи для уравнений, описывающих стационарное движение *вязкой* неоднородной жидкости. В настоящей заметке мы исследуем краевую задачу для двумерных уравнений Эйлера неоднородной жидкости, в которой на всей границе задается нормальная составляющая вектора скорости, а на участке втекания (либо вытекания) — полный напор и плотность жидкости.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
[2] ВЦ ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.
Электронная почта: `illar_a@list.ru` (А. А. Илларионов), `illarionova_l@list.ru` (Л. В. Илларионова).

Пусть Ω — конечная область из $\mathbb{R}^2$ с границей Γ. Будем рассматривать следующую краевую задачу относительно неизвестных $\mathbf{u}:\Omega\to\mathbb{R}^2$ и $p,\rho:\Omega\to\mathbb{R}$:

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\rho)=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}|_\Gamma=\mathrm{g}, \quad h|_S=h_0, \quad \rho|_S=\rho_0. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ — вектор скорости течения, ρ — плотность, p — давление жидкости, $h=\rho|\mathbf{u}|^2/2+p$ — полный напор течения (функция Лэмба); $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, а S — участок втекания (или вытекания) жидкости, то есть

$$S\subset\Gamma; \qquad \mathrm{g}<0 \text{ на } S \quad (\text{или } \mathrm{g}>0 \text{ на } S). \tag{4}$$

Используя формулу $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=(\operatorname{rot}\mathbf{u})\cdot L\mathbf{u}+\nabla|\mathbf{u}|^2/2$, где

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad L\mathbf{u}=(-u_2,u_1),$$

перепишем уравнение сохранения импульса (1) в виде

$$\rho(\operatorname{rot}\mathbf{u})\cdot L\mathbf{u}+\nabla h-\nabla\rho\cdot\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}=0 \quad \text{в } \Omega. \tag{5}$$

Наложим следующее условие на область Ω:

$$\Gamma\in C^{0,1}, \quad \{\varphi\in H_0^1(\Omega): \quad \Delta\varphi\in L^2(\Omega)\}=H^2(\Omega). \tag{6}$$

Оно выполняется, например, для выпуклой Ω и в случае $\Gamma\in C^{1,1}$ (см. [27]). Здесь и далее $C^{m,\alpha}(Q)$ и $W_q^m(Q)$ — стандартные пространства Гельдера и Соболева функций, заданных на множестве Q, при этом $C^m(Q)=C^{m,0}(Q)$, $H^m(Q)=W_2^m(Q)$, $L^p(Q)=$ $=W_p^0(Q)$, $H_0^1(\Omega)=\{\varphi\in H^1(\Omega):\varphi|_\Gamma=0\}$, а $\varphi|_\Gamma$ — след функции φ на кривой Γ.

Основной результат настоящей заметки заключается в следующем.

Теорема. *Пусть в дополнение к условиям* (4), (6)

а) множество S состоит из фиксированного числа открытых связных множеств $S_1,\dots,S_K$ и существует функция $G\in H^2(\Omega)$ такая, что $\frac{\partial G}{\partial\tau}\big|_\Gamma=\mathrm{g}$, где $\tau=(n_2,-n_1)$, причем множества $B_i=\{G(x):x\in S_i\}$, $i=\overline{1,K}$, попарно не пересекаются;

б) функции h_0,ρ_0 непрерывны на $\overline{S}$, причем

$$\frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial h_0}{\partial\tau}\in C(\overline{S}), \quad \frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial\rho_0}{\partial\tau}\in L^\infty(S), \quad \inf_S\rho_0>0.$$

Тогда существует решение задачи (2), (3), (5), *которое представимо в виде*

$$\mathbf{u}=\operatorname{rot}\varphi\equiv\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right), \quad \rho=\eta(\varphi), \quad h=\omega(\varphi), \tag{7}$$

где $\varphi\in H^2(\Omega)$, $\eta\in W_\infty^1(\mathbb{R})$, $\omega\in C^1(\mathbb{R})$.

Достаточное условие выполнения предположения а) приводится в конце § 3.

Идея доказательства теоремы такова: ищем решение в виде (7), где φ — новая неизвестная функция, а функции $\eta,\omega:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ строятся по граничным условиям (3). Тогда уравнения (2) выполняются, а соотношение (5) принимает вид

$$\nabla\varphi\left(\eta(\varphi)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi-\eta'(\varphi)\frac{|\nabla\varphi|^2}{2}+\omega'(\varphi)\right)=0.$$

Оно справедливо, если $\eta(\varphi)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi-\eta'(\varphi)|\nabla\varphi|^2/2+\omega'(\varphi)=0$, то есть

$$\eta^{1/2}(\varphi)\operatorname{div}\left(\eta^{1/2}(\varphi)\nabla\varphi\right)=\omega'(\varphi). \tag{8}$$

В итоге исходная задача сводится к исследованию первой краевой задачи для уравнения (8). Это не составляет особого труда (см. § 2). Соотношение (8) является квазилинейным эллиптическим уравнением. Поэтому гладкость (хотя бы одного) решения (2), (3), (5) задачи повышается с увеличением гладкости исходных данных (см. § 4).

Замечание. Если $\rho\equiv\rho_0=const$ (случай однородной жидкости), то согласно (5)

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho_0 g}\frac{\partial h}{\partial\tau}=-\frac{1}{\rho_0 g}\frac{\partial h_0}{\partial\tau}\quad\text{на } S.$$

Мы пришли к задаче с известным на участке втекания (вытекания) вихрем, которая исследована в [5, 18, 19].

2. Вспомогательная задача

По-видимому, следующее утверждение является известным. Для полноты изложения приводим его вместе с доказательством.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* (6). *Пусть функция* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *непрерывна и ограничена. Тогда для любой* $G\in H^2(\Omega)$ *существует решение* $\psi\in H^2(\Omega)$ *задачи*

$$\Delta\psi=f(\psi)\ \text{в}\ \Omega,\quad \psi|_\Gamma=G|_\Gamma.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ищем решение в виде $\psi=\varphi+G$, где φ — новая неизвестная функция. Тогда задача сводится к нахождению неподвижной точки оператора $T:H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\to H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, действующего по формуле

$$T(\varphi)=A\left(f(\varphi+G)-\Delta G\right),$$

где A — обратный оператор к $\Delta:H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$. Из условия (6) и классических свойств первой краевой задачи для уравнения Пуассона вытекает, что оператор $A:L^2(\Omega)\to H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ определен и непрерывен. Поэтому, учитывая непрерывность функции f и компактность вложения $H^2(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$, нетрудно проверить, что оператор T вполне непрерывен. Для любого решения $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ уравнения $\varphi = \lambda T(\varphi)$ (где $\lambda \in (0,1)$) справедлива равномерная по λ оценка

$$\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \|A\| \cdot \|f(\varphi + G) - \Delta G\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|A\| \cdot (\sup_{\mathbb{R}} |f| \cdot |\Omega|^{1/2} + \|\Delta G\|_{L^2(\Omega)}).$$

Поэтому оператор T имеет неподвижную точку $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ согласно теореме Лере-Шаудера. Полагая $\psi = \varphi + G$, получаем требуемое решение. $\square$

Лемма 2. *Пусть выполняется условие* (6). *Пусть $a \in W_\infty^1(\mathbb{R})$, причем $a(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть функция $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и ограничена. Тогда для любой $G \in H^2(\Omega)$ существует решение $\varphi \in H^2(\Omega)$ задачи*

$$\operatorname{div}(a(\varphi)\nabla\varphi) = b(\varphi) \text{ в } \Omega, \quad \varphi|_\Gamma = G|_\Gamma. \tag{9}$$

Если, дополнительно, $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, $a \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, $b \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, $G \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, где $\alpha \in (0,1)$, то $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $A' = a$. Тогда $A \in W_\infty^2(\mathbb{R})$. Согласно лемме 1 существует решение $\psi \in H^2(\Omega)$ задачи

$$\Delta\psi = b(A(\psi)), \quad \psi|_\Gamma = A(G)|_\Gamma.$$

Так как $a > 0$, то функция A возрастает. Поэтому существует обратная $A^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Функция $\varphi = A^{-1}(\psi)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$. Кроме того, для любых $i, j \in \{1, 2\}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = A'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = a(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} = a'(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + a(\varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{11}$$

Поскольку $\inf_\Omega a(\varphi) > 0$ и $a \in W_\infty^1(\Omega)$, $\psi \in H^2(\Omega)$, отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^r(\Omega) \text{ при всех } r \in [1, +\infty), \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega),$$

то есть $\varphi \in H^2(\Omega)$. Функция φ удовлетворяет уравнениям (9).

Пусть теперь $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, $a \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, $b \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, $G \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$. Тогда $A \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R})$, $A(G)|_\Gamma \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, $b(A(\psi)) \in C^{0,\beta}(\mathbb{R})$ для любого $\beta \in (0, 1/2)$ такого, что $\beta \leqslant \alpha$. Здесь мы использовали вложение $H^2(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\Omega)$ при $\gamma \in (0, 1/2)$. Таким образом,

$$\Delta\psi \in C^{0,\beta}(\Omega), \quad \psi|_\Gamma \in C^{2,\beta}(\Gamma).$$

Значит, $\psi \in C^{2,\beta}(\Omega)$ (см., например, [28]). Повторяя эти рассуждения, получаем $b(A(\psi)) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$, $\psi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. Так как $\varphi \in H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $\inf_\Omega a(\varphi) > 0$, то из (10) вытекает, что $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, а из (11), что $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Еще раз рассматривая эти же соотношения, приходим к выводу: $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть выполняются условия теоремы 1. Согласно (4) функция G строго монотонна на каждом S_i. Учитывая условие а), получаем, что существует обратная функция $G^{-1} \in C(\overline{B})$, где $B = \{G(x) : x \in S\}$. Положим

$$\eta(t) = \rho_0(G^{-1}(t)) \text{ при } t \in B.$$

Тогда $\eta \in C(\overline{B})$. Кроме того,

$$0 < m \leqslant \eta(t) \leqslant M, \quad m = \inf_S \rho_0, \quad M = \sup_S \rho_0,$$

$$\eta'(G(x)) = \pm \frac{1}{\mathrm{g}(x)} \frac{\partial \rho_0(x)}{\partial \tau} \text{ при всех } x \in S.$$

Знак в последней формуле зависит от знака функции g на S. Таким образом, $\eta' \in L^\infty(B)$. Продолжим η до функции $\eta \in W^1_\infty(\mathbb{R})$ так, что $m \leqslant \eta \leqslant M$. Отметим, что отображения $t \to \eta^{1/2}(t)$ и $t \to \eta^{-1/2}(t)$ также принадлежат классу $W^1_\infty(\mathbb{R})$.

Определим

$$\omega(t) = h_0(G^{-1}(t)), \quad t \in B.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, получаем, что ω продолжается до функции $\omega \in C^1(\mathbb{R})$, причем ω и ω' ограничены.

Согласно лемме 2 существует решение $\varphi \in H^2(\Omega)$ задачи

$$\operatorname{div}\left(\eta^{1/2}(\varphi)\nabla\varphi\right) = \frac{\omega'(\varphi)}{\eta^{1/2}(\varphi)} \text{ в } \Omega, \qquad \varphi|_\Gamma = G|_\Gamma. \tag{12}$$

Положим $\mathbf{u} = \operatorname{rot}\varphi$, $\rho = \eta(\varphi)$, $h = \omega(\varphi)$. Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = (\operatorname{rot}\varphi\cdot\nabla\varphi)\eta'(\varphi) = 0 \quad \text{ в } \Omega.$$

Из построения функций φ, η и ω вытекает, что краевые условия (3) выполняются. Умножая первое уравнение из (12) на $\eta^{1/2}(\varphi)\nabla\varphi$, имеем

$$0 = \nabla\varphi\,\eta^{1/2}(\varphi)\operatorname{div}\left(\eta^{1/2}(\varphi)\nabla\varphi\right) - \omega'(\varphi)\,\nabla\varphi =$$
$$= -\nabla\varphi\,\eta(\varphi)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\varphi + \frac{1}{2}\eta'(\varphi)|\nabla\varphi|^2\nabla\varphi - \nabla h = -\rho(\operatorname{rot}\mathbf{u})L\mathbf{u} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\nabla\rho - \nabla h.$$

Уравнение (5) выполнено. Теорема 1 полностью доказана.

Лемма 3. *Пусть Γ состоит из конечного числа замкнутых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ класса $C^{1,1}$. Пусть $\mathrm{g} \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\mathrm{g}|_S > 0$ и*

$$\int_{\Gamma_j} \mathrm{g}\, d\Gamma = 0, \quad j = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Пусть для любого $j \in \{1, \ldots, N\}$ множество $S \cap \Gamma_j$ либо пустое, либо состоит из открытых (на Γ) связных множеств $S_{1j}, \ldots S_{k_j j}$, причем существует кривая Γ'_j такая, что

$$S_{1j} \cup \ldots \cup S_{k_j j} \subset \Gamma'_j \subset \Gamma_j, \quad \mathrm{g} \geqslant 0 \text{ на } \Gamma'_j.$$

Тогда выполняется условие а) теоремы.

Доказательство. Возьмем любое $j \in \{1, \dots, N\}$. Из условий вытекает, что существует функция $G_j \in H^{3/2}$ такая, что $\frac{\partial G_j}{\partial \tau}\Big|_{\Gamma_j} = \mathrm{g}$. Так как функция G_j монотонна на Γ_j' и строго монотонна на каждом S_{ij}, то множества

$$B_{ij} = \{G_j(x) : x \in S_{ij}\}, \quad i = \overline{1, k_j}$$

попарно не пересекаются. Кроме того, эти множества ограничены, поскольку $G_j \in H^{3/2}(\Gamma_j) \subset C(\Gamma_j)$. Поэтому найдутся такие постоянные C_j, что множества $B_{ij} + C_j$ $(i = \overline{1, k_j},\ j = \overline{1, N})$ попарно непересекаются. Осталось определить функцию $G|_{\Gamma_j} = G_j + C_j$ и продолжить ее до $G \in H^2(\Omega)$. □

Замечание. Если $\Gamma \in C^{1,1}$, причем множества $\Gamma_j \cap S$ связные, то условие а) эквивалентно тому, что $\mathrm{g} \in H^{1/2}(\Gamma)$, и выполняется предположение (13).

4. Существование более гладких решений

Ограничимся случаем, когда Γ состоит из конечного числа замкнутых кривых $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, причем множества $\Gamma_j \cap S$ связные.

Следствие 1. *Пусть* $\Gamma \in C^{2,\alpha}$, $\mathrm{g} \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $\rho_0 \in C^{1,\alpha}(S)$, $h_0 \in C^{1,\alpha}(S)$, *где* $\alpha \in (0,1)$,

$$\frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial h_0}{\partial \tau} \in C^{0,\alpha}(S); \quad \frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial \rho_0}{\partial \tau} \in C^{0,\alpha}(S), \qquad \inf_S \rho_0 > 0,$$

и выполняются условия (4), (13). *Тогда* $\mathbf{u}, \rho, h \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, *где* $(\mathbf{u}, \rho, h)$ *— решение задачи* (2), (3), (5), *построенное при доказательстве теоремы 1.*

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3, получаем, что найдется функция $G \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$, удовлетворяющая условию а) теоремы. Функции η и ω, построенные при доказательстве теоремы, принадлежат классу $C^{1,\alpha}$. Поскольку φ — решение задачи (12), применяя лемму 2, получаем, что $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Omega)$. □

Точно так же доказывается следствие 2.

Следствие 2. *Пусть* $\Gamma \in C^\infty$, $\mathrm{g} \in C^\infty(\Gamma)$, $\rho_0 \in C^\infty(S)$, $h_0 \in C^\infty(S)$,

$$\frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial h_0}{\partial \tau} \in C^\infty(S); \quad \frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\partial \rho_0}{\partial \tau} \in C^\infty(S), \qquad \inf_S \rho_0 > 0,$$

и выполняются условия (4), (13). *Тогда решение задачи* (2), (3), (5), *построенное при доказательстве теоремы 1, является бесконечно дифференцируемым в* $\overline{\Omega}$.

Список литературы

[1] Н. Е. Кочин, “Об одной теореме существования гидродинамики”, *Прикл. мат. мех.*, **20**:2, (1956), 153–172.

[2] В. И. Юдович, “Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости”, *Журн. выч. мат. и мат. физ.*, **3**:6, (1963), 1032–1066.

[3] В. И. Юдович, “Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости сквозь заданную область”, *Матем. сб.*, **106**:4, (1964), 562—588.

[4] М. Р. Уховский, “Об осесимметричной задаче с начальными данными для уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости”, *Механика жидкости и газа*, 1967, № 3, 3—12.

[5] Г. В. Алексеев, *Математические вопросы теории двумерных непотенциальных течений несжимаемой жидкости*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Новосибирск, 1972, 131 с.

[6] Г. В. Алексеев, “О разрешимости неоднородной краевой задачи для двумерных нестационарных уравнений динамики идеальной жидкости”, Динамика сплошной среды, **24**, Новосибирск, 1976, 15—35.

[7] А. В. Кажихов, “Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости”, *Прикл. мат. мех.*, **44**:5, (1980), 947–950.

[8] А. В. Кажихов, В. В. Рагулин, “Нестационарные задачи о протекании идеальной жидкости сквозь ограниченную область”, *Докл. АН СССР*, **250**:6, (1980), 1344–1347.

[9] А. В. Кажихов, В. В. Рагулин, “О задаче протекания для уравнений идеальной жидкости”, *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*, **96**, (1980), 84–96.

[10] А. В. Кажихов, “Корректность нестационарной задачи о протекании идеальной жидкости через заданную область”, Динамика сплошной среды, **47**, Новосибирск, 1980, 37–56.

[11] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск, 1983.

[12] А. В. Кажихов, “Двумерная задача о протекании идеальной жидкости через заданную область”, *Краевые задачи для неклассических УМФ*, Новосибирск, 1989, 32–37.

[13] А. В. Кажихов, “Начально-краевые задачи для уравнений Эйлера несжимаемой жидкости”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*, 1991, № 5, 13—19.

[14] А. Е. Мамонтов, М. И. Уваровская, “Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости: условия существования и единственности решений”, *Прикл. мех. техн. физ.*, **49**:490, (2008), 130–145.

[15] A. E. Mamontov, “On the Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems for Non-Stationary Euler Equations”, *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, The Alexander V. Kazhikhov Memorial Volume, Adv. in Math. Fluid Mech., ред. A.V. Fursikov, G.P. Galdi, V.V. Pukhnachev, Birkhauser Verlag, Basel, 2009, 281–299.

[16] М. И. Уваровская, *Применение пространств Орлича в задачах динамики идеальной несжимаемой жидкости*, дисс. … канд. физ.-матем. наук, Новосибирск, 2009, 63 с.

[17] Г. В. Алексеев, “О существовании единственного течения проводящей жидкости в слабо искривленном канале”, Динамика сплошной среды, **3**, АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1969, 115–121.

[18] Г. В. Алексеев, “Об исчезающей вязкости в двумерных стационарных задачах гидродинамики несжимаемой жидкости”, Динамика сплошной среды, **10**, АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1972, 5–27.

[19] Г. В. Алексеев, “О единственности и гладкости плоских вихревых течений идеальной жидкости”, Динамика сплошной среды, **15**, АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики, Новосибирск, 1973, 7–17.

[20] О. В. Трошкин, “О топологическом анализе структуры гидродинамических течений”, *УМН*, **43**:4, (1988), 129–158.

[21] О. В. Трошкин, “Двумерная задача о протекании для стационарных уравнений Эйлера”, *Матем. сб.*, **180**:3, (1989), 354–374.

[22] А. Б. Моргулис, "Разрешимость трехмерной стационарной задачи протекания", *Сиб. мат. журн.*, **40**:1, (1999), 142–158.

[23] Н. Н. Фролов, "О разрешимости краевой задачи движения неоднородной жидкости", *Матем. заметки*, **53**:6, (1993), 650–656.

[24] Н. Н. Фролов, "Краевая задача, описывающая движение неоднородной жидкости", *Сиб. матем. журн.*, **37**:2, (1996), 433–451.

[25] А. Ю. Чеботарев, "Стационарные вариационные неравенства в модели неоднородной несжимаемой жидкости", *Сиб. матем. журн.*, **38**:5, (1997), 1184–1193.

[26] А. А. Илларионов, "Оптимальное граничное управление стационарным течением вязкой неоднородной несжимаемой жидкости", *Матем. заметки*, **69**:5, (2001), 666–678.

[27] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman Publ., Boston, 1985.

[28] Д. Гилбарг, М. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.

Поступила в редакцию
20 марта 2018 г.

Illarionov A. A., Illarionova L. V. The solvability of stationary boundary value problem for Euler equations. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 48–55.

ABSTRACT

One consider boundary value problem for 2D Euler equations describing stationary flow of ideal incompressible nonhomogeneous fluid. The boundary value of normal component of the flow velocity, and value of total pressure, density on the inflow (outflow) part of the boundary are given. We prove global solvability of the problem.

Key words: *hydrodynamics equations, Euler equations, boundary value problems.*