Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 56–70

УДК 511.35+511.48+511.75
MSC2010 11N45 + 11R04 + 11J83 + 11G50

© Д. В. Коледа[1]

О распределении вещественных алгебраических чисел равной высоты

В работе найдена асимптотика количества алгебраических чисел фиксированной степени $n \geqslant 1$ и высоты H, лежащих в промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, при $H \to \infty$.

Ключевые слова: *алгебраические числа, распределение алгебраических чисел, многочлены с целыми коэффициентами, обобщённые ряды Фарея.*

1. Введение и основные результаты

Алгебраические числа образуют на вещественной оси всюду плотное множество. Задача их подсчёта приобретает смысл, если для всех алгебраических чисел определить некоторую функцию H, называемую высотой, так, чтобы при любом конечном Q неравенству $H(\alpha) \leqslant Q$ удовлетворяло лишь конечное множество алгебраических чисел α.

Существует ряд работ [1–4], посвящённых подсчёту общего количества алгебраических чисел фиксированной степени, где в роли высоты H используется мера Малера или высота Вейля.

Данная работа связана с изучением обобщения [5] ряда (последовательности) Фарея; на роль функции H здесь взята т. н. обычная высота. Мы покажем, что распределение алгебраических чисел равной высоты в некотором смысле аналогично распределению несократимых дробей с одинаковым знаменателем.

В статье мы используем следующие обозначения для теоретико-числовых функций:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \omega(n) = \sum_{p|n} 1, \qquad J_k(n) = n^k \prod_{p|n} (1 - p^{-k})$$

— где в знаках суммы и произведения d пробегает все натуральные делители числа n, а p — все простые. Отметим, что $J_1(n) = \varphi(n)$ — это функция Эйлера.

[1] Институт математики НАН Беларуси, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Электронная почта: koledad@rambler.ru

Минимальным многочленом алгебраического числа α будем называть многочлен

$$p_\alpha(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], \qquad a_n > 0,$$

неприводимый над $\mathbb{Z}$ и такой, что $p_\alpha(\alpha) = 0$. *Степень* $\deg \alpha$ и *(обычную) высоту* $H(\alpha)$ алгебраического числа α определим как

$$\deg \alpha = \deg p_\alpha = n, \qquad H(\alpha) = H(p_\alpha) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|.$$

Пусть $\mathbb{A}_n$ обозначает множество алгебраических чисел степени n над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим произвольное множество $S \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим через $\Psi_n(H,S)$ количество алгебраических чисел α степени n и высоты H, лежащих в S, т. е.

$$\Psi_n(H,S) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) = H\right\}.$$

Аналогично определим функцию $\Phi_n(Q,S)$ с тем лишь отличием, что она будет считать алгебраические числа высоты $\leqslant Q$:

$$\Phi_n(Q,S) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{A}_n \cap S : H(\alpha) \leqslant Q\right\}.$$

Очевидно, что $\Phi_n(Q,S) = \sum\limits_{H=1}^{Q} \Psi_n(H,S)$.

Про $\Phi_n(Q,S)$ известно следующее.

Теорема 1 [6–8]. *Существует непрерывная положительная функция $\phi_n(x)$ такая, что для любого промежутка $I \subseteq \mathbb{R}$ верно равенство*

$$\Phi_n(Q,I) = \frac{Q^{n+1}}{2\zeta(n+1)} \int\limits_I \phi_n(x)\,dx + O\Big(Q^n (\ln Q)^{\ell(n)}\Big),$$

где $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, $\ell(n) = 0$ при $n \geqslant 3$, $\ell(n) = 1$ при $n \leqslant 2$, а неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от степени n. При этом существует бесконечно много промежутков $[a,b)$, для которых остаточный член имеет порядок $O(Q^n)$.

Функция ϕ_n удовлетворяет функциональным уравнениям

$$\begin{aligned} &\phi_n(-x) = \phi_n(x), && \forall x \in \mathbb{R}, \\ &x^2 \phi_n(x) = \phi_n\left(\frac{1}{x}\right), && \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Функцию ϕ_n можно вычислить по формуле

$$\phi_n(x) = \int\limits_{D_n(x)} \left| \sum_{k=1}^{n} k p_k x^{k-1} \right| dp_1 \ldots dp_n,$$

где

$$D_n(x) = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |p_k| \leqslant 1, \left| \sum_{k=1}^{n} p_k x^k \right| \leqslant 1 \right\}.$$

Отметим, что с точностью до постоянного множителя функция ϕ_n совпадает с плотностью распределения вещественных нулей случайного многочлена с независимыми равномерно распределёнными на $[-1,1]$ коэффициентами (ср. [9]). Более того, между этими функциями существует прямая связь (см. [10]).

О функции $\Psi_n(H,S)$, в отличие от $\Phi_n(Q,S)$, нельзя сказать, что она имеет асимптотику в привычном смысле, поскольку неприводимые над $\mathbb{Z}$ многочлены p распределены по поверхностям $H(p)=H$ достаточно нерегулярно, и монотонной асимптотики по H здесь не будет. Тем не менее, как мы покажем ниже, можно выделить доминирующее слагаемое, определяющее поведение $\Psi_n(H,S)$ при $H\to\infty$. А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, $I \subseteq \mathbb{R}$ — промежуток. Тогда*

$$\Psi_n(H,I) = \frac{(n+1)}{2} J_n(H) \int\limits_I \phi_n(x)\,dx + r_n(H), \tag{1}$$

где функция $\phi_n(x)$ та же, что и в теореме 1, а остаточный член $r_n(H)$ удовлетворяет неравенству

$$|r_n(H)| \leqslant \begin{cases} c_n H^{n-1}, & n \geqslant 4, \\ c_3 H^2 (\ln H)^2, & n = 3, \\ c_2 H(\ln H + \tau(H)), & n = 2, \\ 2^{\omega(H)}, & n = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь постоянные c_n зависят только от $n\geqslant 2$.

Замечание 1. Несложно убедиться (см. подраздел 2.2), что для всех $n\geqslant 1$

$$\lim_{H\to\infty} \frac{r_n(H)}{J_n(H)} = 0.$$

Замечание 2. Для $n=1$ (т. е. для рациональных чисел) равенство (1) принимает вид

$$\left| \Psi_1(H,I) - \varphi(H) \int\limits_I \frac{dx}{\max(1,x^2)} \right| \leqslant 2^{\omega(H)}, \tag{3}$$

где $\varphi(N) = N\prod_{p|N}\left(1-p^{-1}\right)$ — функция Эйлера.

Оценка (2) остаточного члена $r_n(H)$ во многом основана на следующей теореме, которую мы доказываем в разделе 3.

Теорема 3. *Количество $R_n(H)$ приводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов (с целыми коэффициентами) степени n и высоты H удовлетворяет асимптотическому неравенству*

$$R_n(H) \ll_n \begin{cases} H^{n-1}, & n \geqslant 4, \\ H^2 (\ln H)^2, & n = 3, \\ H(\ln H + \tau(H)), & n = 2, \end{cases}$$

где неявная постоянная в символе $\ll_n$ зависит только от n.

При $n\geqslant 3$ теорема 3 является следствием результата Дубицкаса [11]. Доказательству для случая $n=2$ посвящена большая часть раздела 3.

2. Доказательство теоремы 2

2.1. Общее доказательство для $n \geqslant 1$

Подсчёт алгебраических чисел мы осуществим, считая многочлены, взятые с весом, равным количеству корней многочлена в интересующем нас множестве.

Пусть задано множество $A \subseteq \mathbb{R}$. Для точек из $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ определим весовую функцию $w_A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$w_A(a_n, \ldots, a_1, a_0) = \# \left\{ \xi \in A : \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k = 0 \right\},$$

т. е. значение функции w_A в точке равно количеству лежащих в A различных нулей соответствующего многочлена. Очевидно, что $w_A(r\mathbf{a}) = w_A(\mathbf{a})$ для любых ненулевых $r \in \mathbb{R}$ и $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть

$$N_n(H, A) = \sum_{\substack{(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = H}} w_A(a_n, \ldots, a_0),$$

$$N_n^*(H, A) = \sum_{\substack{(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{Z}^{n+1} \\ \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = H \\ \text{н.о.д.}(a_n, \ldots, a_0) = 1}} w_A(a_n, \ldots, a_0).$$

Часть примитивных точек, которые учитываются в $N_n^*(H, A)$, соответствует приводимым многочленам. Поэтому

$$0 \leqslant \frac{1}{2} N_n^*(H, A) - \Psi_n(H, A) \leqslant \frac{n}{2} R_n(H),$$

где $R_n(H)$ обозначает количество приводимых многочленов степени n и высоты H. В последнем неравенстве учтено, что многочлен степени n имеет не более n корней, лежащих в A. Коэффициент $\frac{1}{2}$ возникает потому, что в $N_n^*(H, A)$ и $R_n(H)$ учитываются многочлены как с положительным, так и с отрицательным старшим коэффициентом.

Выразим $N_n^*(H, A)$ через $N_n(H, A)$, отсеивая непримитивные точки методом включения—исключения:

$$N_n^*(H, A) = N_n(H, A) - \sum_{p | H} N_n\left(\frac{H}{p}, A\right) + \sum_{p_1 p_2 | H} N_n\left(\frac{H}{p_1 p_2}, A\right) - \\ - \sum_{p_1 p_2 p_3 | H} N_n\left(\frac{H}{p_1 p_2 p_3}, A\right) + \ldots, \tag{4}$$

где суммы берутся по различным простым делителям p_i числа H.

Если множество A не слишком фрагментировано, несложно заметить, что при больших H выполняется приблизительное равенство $N_n(H, A) \approx H^n S_n(A)$, где

$$S_n(A) = \int\limits_{\substack{(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k| = 1}} w_A(a_n, \ldots, a_0) \, d\mu.$$

Здесь μ — мера Лебега на гранях гиперкуба $[-1,1]^{n+1}$.

Обозначив

$$\delta(H) = N_n(H,A) - H^n S_n(A),$$

можем переписать (4) как

$$N_n^*(H,A) = H^n S_n(A) \left(1 - \sum_{p|H} \frac{1}{p^n} + \sum_{p_1 p_2 | H} \frac{1}{(p_1 p_2)^n} - \sum_{p_1 p_2 p_3 | H} \frac{1}{(p_1 p_2 p_3)^n} + \ldots \right) +$$
$$+ \delta(H) - \sum_{p|H} \delta\left(\frac{H}{p}\right) + \sum_{p_1 p_2 | H} \delta\left(\frac{H}{p_1 p_2}\right) - \sum_{p_1 p_2 p_3 | H} \delta\left(\frac{H}{p_1 p_2 p_3}\right) + \ldots .$$

Здесь выражение в скобках вместе с H^n сворачивается в $J_n(H)$.

Обозначим сумму δ-содержащих слагаемых:

$$\Delta(H) = N_n^*(H,A) - J_n(H)\, S_n(A) = \sum_{k \geqslant 0} (-1)^k \sum_{p_1 \ldots p_k | H} \delta\left(\frac{H}{p_1 \ldots p_k}\right).$$

Таким образом, верно неравенство

$$\left| \Psi_n(H,A) - \frac{1}{2}\, J_n(H)\, S_n(A) \right| \leqslant \frac{1}{2}\, |\Delta(H)| + \frac{n}{2}\, R_n(H).$$

2.2. Остаточный член

Чтобы равномерно оценить слагаемое $\Delta(H)$, необходимо ограничить класс рассматриваемых множеств A. Отныне и далее будем считать, что $A = I$ — некоторый промежуток вещественной оси.

В таком случае можно показать, что множества постоянства функции w_I, заданные уравнениями $w_I(\mathbf{a}) = m$, представляют собой области, ограниченные конечным набором алгебраических поверхностей фиксированной степени (а именно, несколькими плоскостями и поверхностью $D(a_n,\ldots,a_0) = 0$, где $D(a_n,\ldots,a_0)$ — дискриминант многочлена $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ как функция его коэффициентов).

Тогда, по теореме Дэвенпорта [12] о количестве целых точек в области, имеем

$$|\delta(H)| \leqslant c_n H^{n-1}, \tag{5}$$

где c_n — постоянная, зависящая только от n. Согласно лемме 2 (см. подраздел 2.5) $c_1 = 1$.

Из (5) получаем

$$|\Delta(H)| \leqslant c_n H^{n-1} \prod_{p|H} (1 + p^{-n+1}).$$

При $n \geqslant 3$

$$\prod_{p|H} (1 + p^{-n+1}) < \prod_{p} (1 + p^{-n+1}) = \frac{\zeta(n-1)}{\zeta(2n-2)}.$$

При $n=2$

$$\prod_{p|H}(1+p^{-1}) = \frac{\prod_{p|H}(1-p^{-2})}{\prod_{p|H}(1-p^{-1})} < \frac{H}{\varphi(H)} \ll \ln\ln H,$$

где самое правое неравенство получено из теоремы 5.1 в [13, с. 32].

При $n=1$

$$\prod_{p|H}(1+1) = 2^{\omega(H)}.$$

Сравнивая теперь полученные оценки $|\Delta(H)|$ с оценками $R_n(H)$ из теоремы 3 для соответствующих n, получаем оценку (2) для остаточного члена $r_n(H)$.

Докажем предельное равенство

$$\lim_{H\to\infty} \frac{r_n(H)}{J_n(H)} = 0. \tag{6}$$

а) Пусть $n=1$. Тогда $J_1(H)=\varphi(H)$, и для любого $H=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$ получаем

$$|r_1(H)| \leqslant 2^{\omega(H)} = 2^k \leqslant \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i+1) = \tau(H).$$

Согласно теоремам 5.1 и 5.2 из [13, с. 32], имеем

(i) для $H\geqslant 3$ и некоторой абсолютной постоянной c

$$\varphi(H) > c\,\frac{H}{\ln\ln H},$$

(ii) для любых $\epsilon>0$ и $H>H_0(\epsilon)$

$$\tau(H) < \exp\left((1+\epsilon)\ln 2\,\frac{\ln H}{\ln\ln H}\right) = H^{\frac{(1+\epsilon)\ln 2}{\ln\ln H}}.$$

б) Пусть $n\geqslant 2$, тогда

$$J_n(H) \geqslant H^n \prod_p (1-p^{-n}) = \frac{1}{\zeta(n)}\,H^n.$$

Теперь, ввиду вышеперечисленных оценок, равенство (6) очевидно.

2.3. Вычисление площади

Вычислим теперь $S_n(I)$. Известно [8, раздел 3], что “взвешенный” объём многочленов в единичном кубе

$$V_n(I) = \int\cdots\int_{\substack{(a_n,\ldots,a_0)\in\mathbb{R}^{n+1}\\ \max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k|\leqslant 1}} w_I(a_n,\ldots,a_0)\,da_n\ldots da_0$$

(где вес точки равен количеству лежащих в I корней соответствующего точке многочлена) равен интегралу

$$V_n(I) = \int\limits_I \phi_n(x)\,dx.$$

С другой стороны, $V_n(I) = \int\limits_0^1 S_n(I;r)\,dr$, где $S_n(I;r)$ — “взвешенная” площадь на поверхности куба $[-r,r]^{n+1}$, т. е.

$$S_n(I;r) = \int\limits_{\substack{(a_n,\dots,a_0)\in\mathbb{R}^{n+1}\\ \max_{0\leqslant k\leqslant n}|a_k| = r}} w_I(a_n,\dots,a_0)\,d\mu,$$

где μ — мера Лебега на гранях гиперкуба $[-r,r]^{n+1}$.

Поскольку мы имеем дело с конусоподобными областями в $(n+1)$-мерном пространстве, $S_n(I;r) = r^n S_n(I)$. Отсюда $S_n(I) = (n+1)V_n(I)$, или

$$S_n(I) = (n+1)\int\limits_I \phi_n(x)\,dx.$$

Из последнего равенства получаем утверждение теоремы 2.

2.4. Границы областей

Здесь мы охарактеризуем границу областей, в которых выше считаем целые точки с применением теоремы Дэверпорта [12].

Лемма 1. *Пусть $I\subset\mathbb{R}$ — промежуток, и пусть ξ_1,ξ_2 — его концы (возможно, бесконечно удаленные). Тогда для любого целого $m\geqslant 0$ граница множества*

$$B_m = \left\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^{n+1} : w_I(\mathbf{a}) = m\right\}$$

полностью содержится в объединении четырёх алгебраических поверхностей

$$\begin{aligned}
\Pi_\infty &= \left\{(a_n,\dots,a_0)\in\mathbb{R}^{n+1} : a_n = 0\right\},\\
\Pi_i &= \left\{(a_n,\dots,a_0)\in\mathbb{R}^{n+1} : a_n\xi_i^n+\ldots+a_1\xi_i+a_0 = 0\right\}, \qquad i=1,2,\\
\mathcal{D} &= \left\{(a_n,\dots,a_0)\in\mathbb{R}^{n+1} : D(a_n,\dots,a_1,a_0) = 0\right\},
\end{aligned}$$

где $D(a_n,\dots,a_0)$ — дискриминант многочлена $\sum\limits_{k=0}^n a_k x^k$ как функция его коэффициентов.

Замечание. Если $\xi_i = \pm\infty$, соответствующая плоскость Π_i совпадает с Π_∞. Это несложно увидеть, если рассмотреть предельное положение единичного вектора нормали к плоскости $a_n\xi^n+\ldots+a_1\xi+a_0 = 0$:

$$\lim_{\xi\to\infty}\mathbf{n}(\xi) = \lim_{\xi\to\infty}\frac{(\xi^n,\xi^{n-1},\dots,\xi,1)}{\sqrt{\xi^{2n}+\xi^{2n-2}+\ldots+\xi^2+1}} = (1,0,\dots,0,0).$$

Доказательство. Везде в данном доказательстве будем полагать, что у точек $\mathbf{a} = (a_n, \ldots, a_0)$ координата $a_n > 0$. Случай $a_n < 0$ рассматривается полностью аналогично.

Обозначим

$$B_m^{(r)} = \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1} : w_I(\mathbf{a}) = m,\ w_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}) = r\right\}.$$

Иначе говоря, $B_m^{(r)}$ есть множество многочленов степени n, имеющих r вещественных корней и m корней во множестве I. Очевидно, что множества $B_m^{(r)}$ не пересекаются и вместе покрывают всё пространство $\mathbb{R}^{n+1}$.

Предположим, кроме Π_∞, Π_1, Π_2 и $\mathcal{D}$, есть иные поверхности, участки которых входят в сетку границ между множествами $B_m^{(r)}$. Тогда найдутся два таких множества $B_{m_1}^{(r_1)}$ и $B_{m_2}^{(r_2)}$, внутри которых существуют $\mathbf{a}_1 \in B_{m_1}^{(r_1)}$ и $\mathbf{a}_2 \in B_{m_2}^{(r_2)}$, которые можно соединить непрерывной кривой $\mathcal{L}$ минуя Π_∞, Π_1, Π_2 и $\mathcal{D}$.

Это означает, что $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} = \varnothing$, и для всех $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$ имеем $D(\mathbf{a}) \neq 0$. Поскольку множества $B_m^{(r)}$ не изменяются при однородном растяжении, без ограничения общности рассуждений можем считать, что $\mathcal{L}$ полностью содержится в плоскости $a_n = 1$.

Дискриминант $D : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $\mathcal{L}$ — компактное множество. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что $|D(\mathbf{a})| \geqslant \delta$ для любых $\mathbf{a} \in \mathcal{L}$.

В силу компактности $\mathcal{L}$ корни α_j соответствующих многочленов $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, где $(a_n, \ldots, a_0) \in \mathcal{L}$, удовлетворяют неравенству $|\alpha_j| \leqslant A$ для некоторого $A > 0$. Откуда, учитывая что $D(\mathbf{a}) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$, получаем

$$\min_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\alpha_i - \alpha_j| \geqslant \tilde{\delta}, \qquad \tilde{\delta} = \sqrt{\frac{\delta}{A^{n^2-n-2}}} > 0.$$

Последнее неравенство показывает, что расстояние от корней $\alpha_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ до вещественной оси не меньше чем $\tilde{\delta}/2$.

Корни многочлена являются непрерывными функциями его коэффициентов. В итоге, в силу того что $\mathcal{L}$ компактна, комплексные корни отделены от вещественной оси, а степень n фиксирована, при перемещении вдоль $\mathcal{L}$ количество вещественных корней r измениться не может. Таким образом, должно выполняться равенство $r_1 = r_2$.

Теперь, когда установлена необходимая неизменность общего числа r вещественных корней для точек на $\mathcal{L}$, несовпадение множеств $B_{m_1}^{(r)}$ и $B_{m_2}^{(r)}$ равносильно неравенству $m_1 \neq m_2$. Поэтому, чтобы попасть из $B_{m_1}^{(r)}$ в $B_{m_2}^{(r)}$, необходимо перенести один или несколько корней через границы промежутка I. Тогда, в силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов, на $\mathcal{L}$ существует многочлен, для которого ξ_1 или ξ_2 является корнем, что равнозначно пересечению Π_1 или Π_2.

Таким образом, мы получили противоречие предположению о существовании иных граничных поверхностей, кроме Π_∞, Π_1, Π_2 и $\mathcal{D}$. Лемма доказана. □

Следствие. *Пересечение множества B_m с гранью гиперкуба $[-1, 1]^{n+1}$, как подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, ограничено конечным набором алгебраических поверхностей.*

2.5. Уточнение для рациональных чисел

Здесь мы докажем теорему 2 для $n=1$, показав при этом, что постоянная c_1 в оценке погрешности (5) равна 1. В данном подразделе мы совместили оценку разности $N_1(H,I)-HS_1(I)$ и вычисление величины $S_1(I)$.

Итак, верно утверждение.

Лемма 2. *Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ — произвольный промежуток. Обозначим через $N(H,I)$ количество чисел $\alpha\in I$, представимых в виде $\alpha=a/b$, где $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ и $\max(|a|,b)=$ $=H$. Тогда*

$$\left|N_1(H,I)-H\int\limits_I\frac{dx}{\max(1,x^2)}\right|\leqslant 1.$$

Доказательство.

Обозначим

$$\widetilde{N}(H,I)=\#\left\{\frac{\nu}{H}\in I:\nu\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Нетрудно заметить, что $\widetilde{N}(H,I)\approx H|I|$. А именно, верна следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ — произвольный промежуток. Тогда*

$$\left|\widetilde{N}(H,I)-H|I|\right|\leqslant 1.$$

Доказательство. В любом полуотрезке вида $[a+k/H,a+k/H+1)$ или $(a+$ $+k/H,a+k/H+1]$, где $a\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}$, содержится ровно одна точка вида m/H, где $m\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем следующее. Если $I=(m_1/H,m_2/H)$, где $m_1,m_2\in\mathbb{Z}$, тогда

$$\widetilde{N}(H,I)=H|I|-1.$$

Для всех остальных промежутков I верна оценка

$$\lfloor H|I|\rfloor\leqslant\widetilde{N}(H,I)\leqslant\lfloor H|I|\rfloor+1.$$

Вычитая $H|I|$ отовсюду в данном неравенстве, получаем утверждение леммы. □

Рассмотрим отображение $f:\mathbb{R}\to(-2,2)$

$$f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1,\\ 2\operatorname{sgn}(x)-x^{-1}, & |x|>1.\end{cases}\tag{7}$$

Замечание. Отображение f устроено так, чтобы оставлять на месте все точки отрезка $[-1,1]$. С точками $(1,+\infty)$ происходит следующее: они отображаются в $(0,1)$, а затем результат зеркально отражается относительно точки 1. То же самое (только зеркально симметрично относительно 0) происходит с точками $(-\infty,-1)$. Очевидно, что функция f непрерывна и монотонно возрастает.

Лемма 4. *Отображение* (7) *осуществляет биективное соответствие между множествами*

$$S=\left\{\frac{a}{b}:a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N},\ \max(|a|,b)=H\right\}$$

и

$$\tilde{S}=\left\{\frac{\nu}{H}\in(-2,2):\nu\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Доказательство. На промежутке $[-1,1]$ оба множества состоят из одних и тех же элементов вида $\frac{\nu}{H}$, где $|\nu| \leqslant H$. Поэтому утверждение о биективности f тривиально для $|x| \leqslant 1$.

Пусть $1 \leqslant |\nu| < H$, тогда

$$f\left(\frac{H}{\nu}\right) = \operatorname{sgn}(\nu)\frac{2H-|\nu|}{H} \in \tilde{S}.$$

Заметим, что для $|y|>1$ обратная функция имеет вид

$$f^{-1}(y) = \frac{\operatorname{sgn}(y)}{2-|y|}, \qquad 1<|y|<2.$$

Пусть теперь $H<|\nu|<2H$, тогда

$$f^{-1}\left(\frac{\nu}{H}\right) = \operatorname{sgn}(\nu)\frac{H}{2H-|\nu|} \in S.$$

□

Таким образом, промежуток $\tilde{I}=f(I)$ содержит такое же количество точек множества $\tilde{S}$, как и I — множества S. Из леммы 3 получаем

$$\left|N(H,I) - H|\tilde{I}|\right| \leqslant 1.$$

При этом

$$|\tilde{I}| = \int\limits_{\tilde{I}} dy = \int\limits_{I} df(x) = \int\limits_{I} \frac{dx}{\max(1,x^2)}.$$

Лемма доказана. □

Возвращаясь к рассуждениям из подраздела 2.1 и замечая, что $\Psi_1(H,I)=N_1^*(H,I)$, получаем утверждение теоремы 2 для $n=1$, т. е. неравенство (3).

3. Приводимые многочлены

В данном разделе мы докажем теорему 3.

Доказательство. Обозначим через $\widetilde{R}_n(Q)$ количество приводимых над $\mathbb{Q}$ многочленов степени n и высоты $\leqslant Q$. Очевидно, что

$$R_n(H) = \widetilde{R}_n(H) - \widetilde{R}_n(H-1).$$

В [11] Дубицкас доказал, что при $Q\to\infty$ справедлива асимптотика

$$\widetilde{R}_n(Q) = \begin{cases} \kappa_n Q^n + O(Q^{n-1}), & n \geqslant 4,\\ \kappa_3 Q^3 + O(Q^2(\ln Q)^2), & n=3,\\ \kappa_2 Q^2 \ln Q + O(Q^2), & n=2, \end{cases} \tag{8}$$

где $\kappa_n>0$ — постоянная, зависящая только от n, неявные O-постоянные также зависят только от n. Отсюда получаем утверждение теоремы 3 для $n\geqslant 3$.

Для $n=2$ равенство (8) не дает необходимого нам порядка величины по Q. Поэтому здесь мы пользуемся теоремой 4 (см. ниже). Теорема 3 доказана. □

Теорема 4. *Количество $R_2(H)$ приводимых многочленов второй степени и высоты H не превосходит по порядку величины*

$$R_2(H) \ll H(\ln H + \tau(H)),$$

где неявная постоянная абсолютна.

Докажем теорему 4, разбив множество приводимых квадратичных многочленов на удобные подмножества и оценив мощность каждого из них по отдельности.

Лемма 5. *Количество многочленов $c_2x^2+c_1x \in \mathbb{Z}[x]$, у которых $\max(|c_1|,|c_2|) = H$ и $c_2 \neq 0$, равно $8H - 2$.*

Доказательство. Каждый такой многочлен можно однозначно отождествить с целой точкой (c_1,c_2) на границе квадрата с вершинами (H,H), $(H,-H)$, $(-H,-H)$, $(-H,H)$. Соответствия нет только точкам $(-H,0)$ и $(H,0)$. Подсчитывая точки, "занятые" многочленами, получаем утверждение леммы. □

Лемма 6. *Количество многочленов $c_1x+c_0 \in \mathbb{Z}[x]$, у которых $\max(|c_0|,|c_1|) = H$, равно $8H$.*

Доказательство. Аналогично лемме 5. □

Таким образом, сейчас нам достаточно оценить количество приводимых многочленов вида

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 \in \mathbb{Z}[x], \tag{9}$$

у которых

$$\max_{0\leqslant i\leqslant 2} |c_i| = H, \qquad c_0c_2 \neq 0. \tag{10}$$

Пусть

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 = (a_1x + a_0)(b_1x + b_0), \tag{11}$$

где $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Тогда ограничения (10) эквивалентны системе

$$\begin{cases} \max(|a_1b_1|, |a_1b_0 + a_0b_1|, |a_0b_0|) = H, \\ |a_1a_0b_1b_0| \geqslant 1. \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что если н.о.д.$(c_0,c_1,c_2) = d$, то приводимому многочлену (9) может соответствовать от одной до $2\tau(d)$ четвёрок целых чисел $(a_0,a_1;b_0,b_1)$, удовлетворяющих соотношениям (11) и (12).

Лемма 7. *Определим множество*

$$\mathcal{T} = \{(a_1,a_0;b_1,b_0) \in \mathbb{Z}^4 : a_1|a_0| \geqslant 1,\ \text{н.о.д.}(a_1,a_0) = 1,\\ |b_1b_0| \geqslant 1,\ \max(a_1,|a_0|) \leqslant \max(|b_1|,|b_0|)\}. \tag{13}$$

Пусть N_1 — количество таких $(a_1,a_0;b_1,b_0) \in \mathcal{T}$, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a_1b_1 = H, \\ |a_1b_0 + a_0b_1| \leqslant H, \\ |a_0b_0| \leqslant H; \end{cases} \tag{14}$$

а N_2 — *количество* $(a_1,a_0;b_1,b_0)\in\mathcal{T}$, *удовлетворяющих*

$$\begin{cases} a_1|b_1|\leqslant H,\\ a_1b_0+a_0b_1=H,\\ |a_0b_0|\leqslant H. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда для количества $R_2^*(H)$ *приводимых квадратичных многочленов высоты* H *с ненулевыми старшим и младшим коэффициентами верно неравенство*

$$R_2^*(H)\leqslant 4N_1+2N_2.$$

Доказательство. В рассуждениях везде подразумевается, что a_1,a_0,b_1,b_0 удовлетворяют неравенствам из определения множества $\mathcal{T}$.

Из (12) получаем три случая. Рассмотрим их по отдельности.

I) Высоту определяет коэффициент c_2. Тогда

$$\begin{cases} a_1|b_1|=H,\\ |a_1b_0+a_0b_1|\leqslant H,\\ |a_0b_0|\leqslant H. \end{cases} \tag{16}$$

Рассматривая отдельно случаи $b_1>0$ и $b_1<0$, получаем, что в случае I количество решений будет $2N_1$.

II) Пусть высота определяется величиной $|c_1|$. Тогда из (12) получаем

$$\begin{cases} a_1|b_1|\leqslant H,\\ |a_1b_0+a_0b_1|=H,\\ |a_0b_0|\leqslant H. \end{cases}$$

Если $a_1b_0+a_0b_1=H$, сразу имеем (15). Пусть $a_1b_0+a_0b_1=-H$. Тогда, заменяя $(b_1,b_0)\to(-b_1,-b_0)$, также получаем (15). Таким образом, случай II даёт $2N_2$ решений.

III) Когда c_0 самый большой по модулю, (12) принимает вид

$$\begin{cases} a_1|b_1|\leqslant H,\\ |a_1b_0+a_0b_1|\leqslant H,\\ |a_0b_0|=H. \end{cases} \tag{17}$$

Очевидно, что отображение $\tau:\mathcal{T}\to\mathcal{T}$, действующее согласно

$$(a_1,a_0;b_1,b_0)\to(a_0\operatorname{sgn}(a_0),a_1\operatorname{sgn}(a_0);b_0\operatorname{sgn}(a_0),b_1\operatorname{sgn}(a_0)),$$

где $\operatorname{sgn}(x)=x/|x|$ для $x\neq0$, является инволюцией, т. е. обратно самому себе, и превращает (17) в (16). Поэтому случай III даёт столько же решений, сколько случай I, т. е. $2N_1$.

Многочлены, у которых хотя бы два коэффициента по модулю равны H, а также многочлены, раскладывающиеся на разные линейные множители одинаковой высоты, учитываются при таком подсчёте больше одного раза. Поэтому имеем неравенство. Лемма доказана. □

Оценим сверху N_1 и N_2, упростив (14) и (15) с помощью следующего утверждения.

Лемма 8 см. [14, Теорема 17.2]. *Пусть* $f(x) = a_1x + a_0$ *и* $\mathrm{g}(x) = b_1x + b_0$. *Тогда*

$$H(f)H(\mathrm{g}) \leqslant \sqrt{3}\,H(f\mathrm{g}).$$

Ввиду определения обычной высоты, данная лемма равносильна неравенству

$$\max(|a_0b_0|, |a_1b_0|, |a_0b_1|, |a_1b_1|) \leqslant \sqrt{3}\,H, \tag{18}$$

которому, таким образом, заведомо удовлетворяют все решения систем (14) и (15).

Лемма 9. *Для числа* N_1 *решений системы* (14) *в* $\mathcal{T}$ *верна оценка*

$$N_1 \leqslant 12H\tau(H).$$

Доказательство. В силу (18), всякое решение (14) будет удовлетворять системе

$$\begin{cases} a_1b_1 = H, \\ |a_0| \leqslant \sqrt{3}\,H/b_1 = \sqrt{3}\,a_1, \\ |b_0| \leqslant \sqrt{3}\,H/a_1 = \sqrt{3}\,b_1. \end{cases}$$

Очевидно, что N_1 не превосходит количества решений системы (3) в элементах множества $\mathcal{T}$ (определено в (13)). Несложно заметить, что данное количество не превосходит величины

$$\sum_{\substack{a_1, b_1 \geqslant 1 \\ a_1b_1 = H}} 12a_1b_1 = 12H \sum_{a_1|H} 1 = 12H\tau(H).$$

Лемма доказана. □

Лемма 10. *Количество* N_2 *решений системы* (15) *в* $\mathcal{T}$ *может быть оценено как*

$$N_2 \ll H \ln H,$$

где неявная постоянная абсолютна.

Доказательство. Ввиду (18), любое решение системы (15) в элементах множества $\mathcal{T}$ (определено в (13)) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{cases} a_1b_0 + a_0b_1 = H, \\ \max(|b_0|, |b_1|) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}\,H}{\max(|a_0|, |a_1|)}. \end{cases} \tag{19}$$

При этом (13) дополнительно даёт условия

$$\text{н.о.д.}(a_1, a_0) = 1, \quad a_1 \geqslant 1, \quad |a_0| \geqslant 1, \quad \max\{a_1, |a_0|\} \leqslant \sqrt[4]{3}\,\sqrt{H}. \tag{20}$$

Пусть a_0, a_1 фиксированы и удовлетворяют ограничениям (20). Обозначим через $\nu(a_0,a_1)$ количество пар (b_0,b_1), удовлетворяющих (19) при заданных a_0,a_1, т. е.

$$\nu(a_0, a_1) = \#\left\{(b_0, b_1) \in \mathbb{Z}^2 : \text{выполняется (19)}\right\}.$$

Чтобы оценить $\nu(a_0,a_1)$, посмотрим, что из себя представляют в совокупности решения (b_0,b_1) системы

$$\begin{cases} a_1 b_0 + a_0 b_1 = H, \\ \max(|b_0|, |b_1|) \leqslant h, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$h = \frac{\sqrt{3}\,H}{\max(|a_0|, |a_1|)}.$$

Пусть (b_0',b_1') и (b_0'',b_1'') — различные решения (21), тогда

$$a_1(b_0' - b_0'') + a_0(b_1' - b_1'') = 0.$$

Поскольку н.о.д.$(a_0,a_1)=1$, имеем $b_0' - b_0'' = a_0 q$ и $b_1' - b_1'' = -a_1 q$ для некоторого целого q. Таким образом, решения (21) представляют собой целые точки на прямой $a_1b_0+a_0b_1=H$, расположенные с (векторным) шагом $(a_0,-a_1)$ внутри квадрата $\max(|b_0|,|b_1|)\leqslant h$. В итоге в данном квадрате может уместиться не более чем

$$\nu(a_0, a_1) \leqslant \frac{2h}{\max(|a_0|, |a_1|)} + 1 = \frac{2\sqrt{3}\,H}{\max(|a_0|, |a_1|)^2} + 1$$

решений системы (21).

Несложно заметить, что N_2 не превосходит количества решений системы (19) (с условиями (20)), т. е. верно неравенство

$$N_2 \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant |a_0| \leqslant \sqrt[4]{3}\sqrt{H} \\ 1\leqslant a_1 \leqslant \sqrt[4]{3}\sqrt{H} \\ \text{н.о.д.}(a_0,a_1)=1}} \nu(a_0, a_1) = 2 \sum_{\substack{1\leqslant a_0, a_1 \leqslant \sqrt[4]{3}\sqrt{H} \\ \text{н.о.д.}(a_0,a_1)=1}} \nu(a_0, a_1). \tag{22}$$

Обозначим $A=3^{1/4}H^{1/2}$. Получаем

$$\sum_{\substack{1\leqslant a_0,a_1\leqslant A \\ \text{н.о.д.}(a_0,a_1)=1}} 1 \leqslant A^2,$$

а также

$$\sum_{\substack{1\leqslant x,y\leqslant A \\ \text{н.о.д.}(x,y)=1}} \frac{1}{\max(x,y)^2} = 2 \sum_{1\leqslant x\leqslant A} \sum_{\substack{1\leqslant y\leqslant x \\ \text{н.о.д.}(x,y)=1}} \frac{1}{x^2} - 1 = 2 \sum_{1\leqslant x\leqslant A} \frac{\varphi(x)}{x^2} - 1 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{1\leqslant x\leqslant A} \frac{1}{x} - 1 < 2\ln A + 1,$$

где в последнем неравенстве мы использовали то, что $\sum\limits_{1 \leqslant x \leqslant A} \frac{1}{x} < \ln A + 1$.

Отсюда, возвращаясь к сумме (22), получаем утверждение леммы. □

Собирая вместе леммы 5, 6 и 7 с учётом лемм 9 и 10, получаем утверждение теоремы 4.

Список литературы

[1] S.-J. Chern, J. D. Vaaler, “The distribution of values of Mahler’s measure”, *J. Reine Angew. Math.*, **540**, (2001), 1–47.

[2] D. Masser, J. D. Vaaler, “Counting algebraic numbers with large height I”, *Diophantine Approximation*, Dev. Math., **16**, Springer, Vienna, 2008, 237–243.

[3] D. Masser, J. D. Vaaler, “Counting algebraic numbers with large height. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **359**:1, (2007), 427–445.

[4] R. Grizzard, J. Gunther, “Slicing the stars: counting algebraic numbers, integers, and units by degree and height”, *Algebra Number Theory*, **11**:6, (2017), 1385–1436.

[5] H. Brown, K. Mahler, “A generalization of Farey sequences: Some exploration via the computer”, *J. Number Theory*, **3**:3, (1971), 364–370.

[6] Д. У. Каляда, “Аб размеркаванні рэчаісных алгебраічных лікаў дадзенай ступені”, *Доклады НАН Беларуси*, **56**:3, (2012), 28–33.

[7] Д. В. Коледа, “О распределении действительных алгебраических чисел второй степени”, *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, 2013, № 3, 54–63.

[8] D. Koleda, “On the density function of the distribution of real algebraic numbers”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **29**:1, (2017), 179–200.

[9] Д. Н. Запорожец, “Случайные полиномы и геометрическая вероятность”, *Доклады Академии наук*, **400**:3, (2005), 299–303.

[10] F. Götze, D. V. Koleda, D. N. Zaporozhets, “Correlations between real conjugate algebraic numbers”, *Chebyshevskii Sb.*, **16**:4, (2015), 90–99.

[11] A. Dubickas, “On the number of reducible polynomials of bounded naive height”, *Manuscripta Mathematica*, **144**:3–4, (2014), 439–456.

[12] H. Davenport, “On a principle of Lipschitz”, *J. Lond. Math. Soc.*, **26**:3, (1951), 179–183.

[13] К. Прахар, *Распределение простых чисел*, Мир, М., 1967.

[14] В. В. Прасолов, *Многочлены*, 3-е изд., испр., МЦНМО, М., 2003.

Поступила в редакцию
31 декабря 2017 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф17М-083).

Koleda D. V. On the distribution of real algebraic numbers of equal height. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 56–70.

ABSTRACT

In the paper we find the asymptotic number of algebraic numbers of fixed degree $n \geqslant 1$ and height H lying in an interval $I \subseteq \mathbb{R}$ as $H \to \infty$.

Key words: *algebraic numbers, distribution of algebraic numbers, integer polynomials, generalized Farey sequences.*