Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 71–74

УДК 517.52+512.742.72
MSC2010 35Q31

© Н. В. Маркова[1]

О ранге Сомос-6

Из формулы сложения для тета-функций от двух переменных следует, что ранг последовательности Сомос-6 не превосходит четырех. В работе построен пример последовательности Сомос-6 с рангом 4.

Ключевые слова: *Сомос-последовательности, эллиптические функции, теоремы сложения.*

Пусть k — натуральное число и $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, x_{-k+1}, \ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots, x_k$ — формальные переменные. С помощью рекуррентного соотношения

$$S(n+k)S(n-k) = \alpha_{k-1}S(n+k-1)S(n-k+1) + \ldots + \alpha_0 S^2(n)$$

определим последовательность рациональных функций Сомос-$2k$ (n — целое)

$$S(n) = S(n; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) = S(n; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}, x_{-k+1}, \ldots x_k).$$

В частности, при $k=2$ возникает Сомос-4, определяемая рекуррентным соотношением

$$S(n+2)S(n-2) = \alpha_1 S(n+1)S(n-1) + \alpha_0 S^2(n), \qquad (1)$$

коэффициентами α_0, α_1 и начальными значениями

$$S(-1) = x_{-1}, \quad S(0) = x_0, \quad S(1) = x_1, \quad S(2) = x_2.$$

При $k=3$ возникает последовательность Сомос-6, определяемая соотношением

$$S(n+3)S(n-3) = \alpha_2 S(n+2)S(n-2) + \alpha_1 S(n+1)S(n-1) + \alpha_0 S^2(n), \qquad (2)$$

коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ и начальными значениями

$$S(-2) = x_{-2}, \quad S(-1) = x_{-1}, \quad S(0) = x_0,$$
$$S(1) = x_1, \quad S(2) = x_2, \quad S(3) = x_3.$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Тихоокеанский государственный университет, 600042, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: `nata_mark@mail.ru`

Пусть $A:\mathbb{Z}\to K$ (K — кольцо) — последовательность, тождественно не равная нулю, для которой найдутся $4k$ других последовательностей

$$C_1^{(0)},\dots,C_k^{(0)},D_1^{(0)},\dots,D_k^{(0)}:\mathbb{Z}\to K,$$
$$C_1^{(1)},\dots,C_k^{(1)},D_1^{(1)},\dots,D_k^{(1)}:\mathbb{Z}\to K$$

таких, что для любых целых m,n выполняются равенства

$$A(m+n)A(m-n)=\sum_{j=1}^{k}C_j^{(0)}(m)D_j^{(0)}(n), \tag{3}$$

$$A(m+n+1)A(m-n)=\sum_{j=1}^{k}C_j^{(1)}(m)D_j^{(1)}(n). \tag{4}$$

В этом случае назовем A гиперэллиптической последовательностью ранга k, где k — минимально возможное натуральное число для представлений (3) и (4).

Из теории эллиптических функций и результатов работ [1], [2], [3] и др. следует, что S-последовательность Сомос-4 имеет ранг 2. Из результатов работы [4] и теоремы сложения для тета-функций от двух переменных следует, что ранг S-последовательности Сомос-6 не превосходит 4.

Главным результатом работы является утверждение.

Теорема. *Ранг S-последовательности Сомос-6 равен 4.*

Доказательство. Положим для любых целых $m_0,\dots,m_k$ и $n_0,\dots,n_k$

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix}m_0,\dots,m_k\\ n_0,\dots,n_k\end{pmatrix}=$$
$$=\det\begin{pmatrix}S(m_0+n_0)S(m_0-n_0) & \dots & S(m_0+n_k)S(m_0-n_k)\\ \dots & S(m_i+n_j)S(m_i-n_j) & \dots\\ S(m_k+n_0)S(m_k-n_0) & \dots & S(m_k+n_k)S(m_k-n_k)\end{pmatrix}.$$

Достаточно проверить, что

$$\mathcal{D}_S\begin{pmatrix}4,\ 2,\ 1,\ 0\\ 4,\ 2,\ 1,\ 0\end{pmatrix}\neq 0.$$

Выберем в качестве Сомос-6 последовательность, определяемую рекуррентным соотношением

$$A(n+3)A(n-3)=A(n+2)A(n-2)+A(n+1)A(n-1)+A^2(n)$$

и начальными значениями

$$A(-2)=3,\ A(-1)=A(0)=A(1)=A(2)=A(3)=A(4)=1.$$

Эта последовательность была впервые приведена в работе [5], и была высказана гипотеза о том, что все ее элементы — целые числа. Вопрос доказательства гипотезы рассматривается в работе [6]. Отметим, что последовательность A возникает из S-последовательности Сомос-6 при значениях переменных

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = S(-2) = S(-1) = S(0) = S(1) = S(2) = S(3) = 1.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что (см. [7])

$$\mathcal{D}_A \begin{pmatrix} 4, & 2, & 1, & 0 \\ 4, & 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Мы имеем дело с целыми числами, поэтому можно показать, что равенство определителя нулю не выполняется, например, по модулю 3.

Пусть $a(n) = A(n) (\bmod 3)$, в качестве вычетов возьмем числа $-1, 0, 1$, тогда нужные нам значения имеют вид

$$a(-4) = 0,\ a(-3) = a(-2) = a(-1) = a(-0) = a(1) = a(2) = 1,$$
$$a(3) = 0,\ a(4) = -1,\ a(5) = 0,\ a(6) = -1,\ a(7) = 0,\ a(8) = 1.$$

Проводя вычисления в кольце классов вычетов по модулю 3, получим, что

$$\mathcal{D}_a = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Теорема полностью доказана. □

Автор благодарит Быковского В. А. за постановку задачи.

Список литературы

[1] Hone A. N. W., “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, **37**:2, (2005), 161–171.

[2] Shipsey R., *Elliptic Divisibility Sequences*, PhD Thesis, Goldsmith’s University of London, 2000.

[3] Swart C., *Elliptic curves and related sequences*, PhD Thesis, Royal Holloway and Bedford New College, University of London, 2003.

[4] Fedorov Y. N., Hone A. N. W., “Sigma function solution of the general Somos-6 recurrence via hyperelleptic Prym varieties”, *Journal of Integrable Systems*, **1**:1, (2016), 1–34 doi `https://doi.org/10.1093/integr/xyw012`.

[5] M. Somos, “Problem 1470”, *Crux Mathematicorum*, **15**, (1989), 208.

[6] Gale D., “The strange and surprising saga of the Somos sequences”, *Mathematical Intelligencer*, **13**:1, (1991), 40–42.

[7] М.О. Авдеева, В.А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:2, (2016), 115–122.

Поступила в редакцию
20 апреля 2018 г.

Markova N. V. About rank of Somos-6. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 71–74.

ABSTRACT

For theta functions from two variables follows from an addition formula that the rank of the sequence of Somos-6 does not surpass four. In work the example of the sequence of Somos-6 with a rank 4 is constructed.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, addition theorems.*