Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 85–89

УДК 517.52, 512.742.72
MSC2010 11B37, 33E05

© М. Д. Монина[1]

Четырёхпараметрическое семейство целочисленных последовательностей Сомос-4

Построено четырёхпараметрическое семейство целочисленных последовательностей Сомос-4, частным случаем которого является трёхпараметрическое семейство Сомоса.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, эллиптические функции, теоремы сложения.*

Введение

Пусть α, β, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 — формальные переменные. Определим последовательность рациональных функций

$$S(n) = S(n;\alpha,\beta) = S(n;\alpha,\beta;x_{-1},x_0,x_1,x_2) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

с помощью рекуррентного соотношения

$$S(n+2)S(n-2) = \alpha S(n+1)S(n-1) + \beta S^2(n) \tag{1}$$

и начальных значений

$$S(-1) = x_{-1},\ S(0) = x_0,\ S(1) = x_1,\ S(2) = x_2.$$

В работе [1] было доказано, что

$$S(n) = \sum_{a_{-1},a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{Z}} P_n(\alpha,\beta;a_{-1},a_0,a_1,a_2) x_{-1}^{a_{-1}} x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2}, \tag{2}$$

где $P_n(\alpha,\beta;...)$ – полиномы от α и β с целыми коэффициентами, отличными от нуля только для конечных наборов четвёрок целых чисел (a_{-1},a_0,a_1,a_2). Отсюда немедленно следует, что при

$$x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = 1$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54 Электронная почта: monina@iam.khv.ru

мы получаем последовательность полиномов

$$S(n;\alpha,\beta;1,1,1,1),$$

которая при частных значениях $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ порождает целочисленные последовательности Сомос-4 (двухпараметрическое семейство).

В [2] было построено трёхпараметрическое семейство с коэффициентами

$$\alpha=\beta=xyz$$

и начальными значениями

$$x_{-1}=x,\ x_0=x_1=1,\ x_2=y,$$

где x, y и z — формальные переменные. В результате возникает последовательность полиномов с целыми коэффициентами от трёх переменных x, y, z, которые при целых значениях порождают целочисленные последовательности Сомос-4 (трёхпараметрическое семейство). В частности при $\alpha=\beta=x=y=z=1$ получается последовательность из [3], оказавшая большое стимулирующее влияние на развитие теории последовательностей Сомоса.

В работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть x, y, u, v — формальные переменные. Тогда для коэффициентов*

$$\alpha=xyu,\ \beta=xyv$$

и начальных значений

$$x_{-1}=x,\ x_0=x_1=1,x_2=y$$

последовательность $S(n)$, определяемая рекуррентным соотношением (1), состоит из полиномов от переменных x, y, u, v с целыми коэффициентами.

Замечание 1. *При $u=v=z$ получаем трёхпараметрическое семейство Сомоса.*

Замечание 2. *В работе [4] другим методом было построено семейство целочисленных последовательностей Сомос-4 с коэффициентами*

$$\alpha=e^3,\ \beta=ade^3$$

и начальными значениями

$$x_{-1}=1,\ x_0=a,\ x_1=e^2,\ x_2=ce^3,$$

для которых

$$a^3d+e^2=bc.$$

1. Эллиптические последовательности

Последовательность $A(n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ называется эллиптической (см. [5]), если для любых целых

$$m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3$$

выполняются равенства

$$\mathcal{D}_A^{(0)}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix} = \tag{3}$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(m_1+n_1)A(m_1-n_1) & A(m_1+n_2)A(m_1-n_2) & A(m_1+n_3)A(m_1-n_3) \\ A(m_2+n_1)A(m_2-n_1) & A(m_2+n_2)A(m_2-n_2) & A(m_2+n_3)A(m_2-n_3) \\ A(m_3+n_1)A(m_3-n_1) & A(m_3+n_2)A(m_3-n_2) & A(m_3+n_3)A(m_3-n_3) \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathcal{D}_A^{(1)}\begin{pmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ n_1, & n_2, & n_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(1+m_1+n_1)A(m_1-n_1) & A(1+m_1+n_2)A(m_1-n_2) & A(1+m_1+n_3)A(m_1-n_3) \\ A(1+m_2+n_1)A(m_2-n_1) & A(1+m_2+n_2)A(m_2-n_2) & A(1+m_2+n_3)A(m_2-n_3) \\ A(1+m_3+n_1)A(m_3-n_1) & A(1+m_3+n_2)A(m_3-n_2) & A(1+m_3+n_3)A(m_3-n_3) \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

В частности, для любого целого n

$$\mathcal{D}_A^{(0)}\begin{pmatrix} n, & 1, & 0 \\ 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} A(n+2)A(n-2) & A(n+1)A(n-1) & A^2(n) \\ A(3)A(-1) & A(2)A(0) & A^2(1) \\ A(2)A(-2) & A(1)A(-1) & A^2(0) \end{pmatrix} =$$
$$= \Delta A(n+2)A(n-2) - \Delta_\alpha A(n+1)A(n-1) - \Delta_\beta A^2(n) = 0,$$

где

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} A(2)A(0) & A^2(1) \\ A(1)A(-1) & A^2(0) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_\alpha = \det\begin{pmatrix} A(3)A(-1) & A^2(1) \\ A(2)A(-2) & A^2(0) \end{pmatrix},$$

$$\Delta_\beta = -\det\begin{pmatrix} A(3)A(-1) & A(2)A(0) \\ A(2)A(-2) & A(1)A(-1) \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$A(n+2)A(n-2) = \alpha A(n+1)A(n-1) + \beta A^2(n)$$

с

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}.$$

Таким образом, для $\Delta \neq 0$ эллиптическая последовательность $A(n)$ является последовательностью Сомос-4. Из результатов работ [6–8] и др. вытекает, что последовательность

$$S(n; \alpha, \beta; x_{-1}, x_0, x_1, x_2)$$

является эллиптической.

2. Доказательство теоремы

Пусть x, y, u, v — формальные переменные и $S(n)$ – последовательность Сомос-4 из теоремы. В соответствии с (1) при $n=1$

$$S(3) = \frac{1}{S(-1)}\left(\alpha S(2)S(0) + \beta S^2(1)\right) = \frac{1}{x}(xyuv + xyv) = uy^2 + vy$$

и при $n=0$

$$S(-2) = \frac{1}{S(2)}\left(\alpha S(1)S(-1) + \beta S^2(0)\right) = \frac{1}{y}(xyux + xyv) = ux^2 + vx.$$

Далее, для любого целого n

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} n, & 1, & 0 \\ n, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} S(2n)S(0) & S(n+1)S(n-1) & S^2(n) \\ S(1+n)S(1-n) & S(2)S(0) & S^2(1) \\ S(n)S(-n) & S(1)S(-1) & S^2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} S(2n) - \det\begin{pmatrix} S(1+n)S(1-n) & 1 \\ S(n)S(-n) & 1 \end{pmatrix} S(n+1)S(n-1) +$$

$$+\det\begin{pmatrix} S(1+n)S(1-n) & y \\ S(n)S(-n) & x \end{pmatrix} S^2(n) = 0,$$

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} n+1, & 1, & 0 \\ n, & 1, & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} S(2n+1)S(1) & S(n+2)S(n) & S^2(n+1) \\ S(1+n)S(1-n) & S(2)S(0) & S^2(1) \\ S(n)S(-n) & S(1)S(-1) & S^2(0) \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} y & 1 \\ x & 1 \end{pmatrix} S(2n+1) - \det\begin{pmatrix} S(1+n)S(1-n) & 1 \\ S(n)S(-n) & 1 \end{pmatrix} S(n+2)S(n) +$$

$$+\det\begin{pmatrix} S(1+n)S(1-n) & y \\ S(n)S(-n) & x \end{pmatrix} S^2(n+1) = 0.$$

По этим формулам (формулам удвоения) мы можем восстановить последовательность $S(n)$, опираясь на начальные значения

$$S(-2),\ S(-1),\ S(0),\ S(1),\ S(2),\ S(3),$$

которые являются полиномами от x, y, u, v с целыми коэффициентами. Значит, элементы последовательности $S(n)$ можно записать в виде

$$S(n) = (x-y)^{a(n)}T(n),$$

где $a(n)$ — целые числа, а $T(n)$ — полиномы от x, y, u, v с целыми коэффициентами. Из рекуррентного соотношения (1) следует, что при $x=y$

$$S(n) \neq 0, \infty.$$

Поэтому $a(n)=0$ для всех целых n. Теорема полностью доказана.

Замечание 3. *Равенство $a(n)=0$ вытекает из представления* (2).

Автор благодарит В. А. Быковского за постановку задачи.

Список литературы

[1] Fomin S., Zelevinsky A., "The Laurent phenomenon", *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.

[2] Somos M., *Somos Polynomials* `http://somos.crg4.com/somospol.html`.

[3] Somos M., "Problem 1470", *Crux Mathematicorum*, **15**, (1989), 208.

[4] A. N. W. Hone, C. S. Swart, "Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences", *Mathematical Proceedigs of the Cambridge Philosophical Society*, **145**, (2008), 65–85.

[5] М. Д. Монина, "О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9", *Дальневосточный математический журнал*, **15**:1, (2015), 70–75.

[6] A. N. W. Hone, "Elliptic curves and quadratic recurrence sequences", Bulletin of the London Mathematical Society, **37**, 2005, 161–171.

[7] R. Shipsey, *Elliptic Divisibility Sequences*, PhD Thesis, Goldsmith's University of London, 2000.

[8] C. Swart, *Elliptic curves and related sequences*, PhD Thesis, Royal Holloway and Bedford New College, University of London, 2003.

Поступила в редакцию
20 апреля 2018 г.

Monina M. D. Four-parameter family of integer sequences Somos-4. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 85–89.

ABSTRACT

A four-parameter family of integer Somos-4 sequences is constructed, a special case of which is the three-parameter family Somos-4.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, addition theorems*