Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 90–100

УДК 517.54
MSC2010 30C75, 30C85

© Н. А. Павлов[1]

Оценки производной Шварца голоморфных в круге функций с ограничением на вещественную часть

В работе получены геометрические оценки производной Шварца голоморфных в круге функций с ограничением на вещественную часть.

Ключевые слова: *голоморфные функции, производная Шварца, симметризация.*

Введение

Работа посвящена выводу оценок, включающих производную Шварца голоморфной функции, вычисленную в граничных точках области определения. Роль, которую играет производная Шварца в геометрической теории функций, определена в работах [1–3]. Здесь мы остановимся только на оценках шварциана, зависящих от геометрии образа области при отображении голоморфной функцией. Оценки модулей обычных производных хорошо представлены в литературе (см. [4–8]). Что касается геометрических оценок шварциана S_f, то они изучены в гораздо меньшей степени (см. [9, 10]). Оценки производной Шварца в данной работе получены с помощью теории потенциала (см. [11, 12]). Напомним определение шварциана. Пусть f — голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция, $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$. Выражение

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 \tag{1}$$

называется *производной Шварца*, или *шварцианом*, вычисленным в точке z. Если функция f имеет простой полюс в точке z, то производная Шварца в этой точке области определяется формулой

$$S_f(z) = S_{1/f}(z).$$

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: npamcs@gmail.com

Если f голоморфна и однолистна в окрестности бесконечности, будем считать, что

$$S_f(\infty) = S_\varphi(0),$$

где $\varphi(z)=f(1/z)$. Таким образом, производная Шварца определена в любой области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$, в которой функция f мероморфна и локально однолистна. В случае конечной точки $z_0\in\partial D$ предположим, что справедливо разложение

$$f(z) = w_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \angle o((z - z_0)^3), \tag{2}$$

где $\angle o((z-z_0)^3)$ означает бесконечно малую по сравнению с функцией $(z-z_0)^3$ при $z\to z_0$ в любом углу Штольца с вершиной в точке $z=z_0$, лежащем в области D. Под производной Шварца функции f в точке z_0 понимается величина

$$S_f(z_0) = 6\left(\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right). \tag{3}$$

Понятно, что для голоморфной и локально однолистной в D функции f разложение (2) в точке $z_0\in D$ справедливо при стремлении z к z_0 любым образом. В этом случае выражение (1) совпадает с (3). Нам потребуется также определение внутреннего радиуса. Пусть $\mathrm{g}_D(z,z_0)$ — функция Грина области $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ с полюсом в точке $z_0\neq\infty$. Внутренним радиусом D относительно конечной точки $z_0\in D$ называют величину

$$r(B, z_0) = \exp\left\{\lim_{z\to z_0}\left[\mathrm{g}_D(z, z_0) - \log|z - z_0|\right]\right\}.$$

1. Голоморфные в круге функции

Всюду ниже рассматриваются голоморфные в круге функции с неотрицательной вещественной частью.

Определение 1. Обозначим через DH_r класс голоморфных в единичном круге $U_z = \{z : |z| < 1\}$ функций f, удовлетворяющих условиям $\operatorname{Re} f > 0$,

$$f(z) = a_1(z - 1) + a_2(z - 1)^2 + a_3(z - 1)^3 + \angle o((z - 1)^3), \quad z \to 1.$$

Здесь $\angle o((z - 1)^3)$ означает бесконечно малую по сравнению с функцией $(z - 1)^3$ при $z \to 1$ в любом углу Штольца с вершиной в точке $z = 1$, лежащем в круге U_z, причем коэффициенты a_1 и a_2 такие, что

$$\begin{gathered} a_1 < 0, \\ a_1 + 2\operatorname{Re} a_2 = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Нам понадобится следующее утверждение для функций, заданных в верхней полуплоскости [11, теорема 2].

Утверждение 1. *Предположим, что функция F голоморфна в верхней полуплоскости $H = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и справедливо асимптотическое разложение*

$$F(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + c_3\zeta^3 + \angle o(\zeta^3), \quad \zeta \to 0,$$

с коэффициентами c_1 и c_2 такими, что

$$c_1 > 0, \qquad \operatorname{Im} c_2 = 0.$$

Пусть Φ — преобразование области $F(H)$ в область $\Phi F(H)$, удовлетворяющее условию

$$r\,(F(H), it) \leqslant r\,(\Phi F(H), it) \tag{5}$$

для достаточно малых $t > 0$, и пусть $\Psi : \Phi F(H) \to H$ – голоморфная функция, для которой

$$\Psi(\omega) = \omega + b_2\omega^2 + b_3\omega^3 + o(\omega^3), \quad \omega \to 0, \tag{6}$$

где $\operatorname{Im} b_2 = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\left[S_F(0) + c_1^2 S_\Psi(0)\right] \geqslant 0. \tag{7}$$

Замечание. Из доказательства теоремы 2 в [11] видно, что если функции F и Ψ однолистные и в (5) справедливо равенство, то в соотношении (7) выполняется равенство.

Рассмотрим теперь результат общего характера для функций, заданных в круге.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу DH_r. Пусть φ — преобразование области $f(U_z)$ в область $\varphi f(U_z)$, удовлетворяющее условиям*

$$r(f(U_z), t) \leqslant r(\varphi f(U_z), t) \tag{8}$$

для всех достаточно малых $t > 0$. Предположим, что $\psi : \varphi f(U_z) \to H$ — голоморфная функция, для которой

$$\psi(w) = iw + d_2w^2 + d_3w^3 + o(w^3), \quad w \to 0, \tag{9}$$

где $\operatorname{Im} d_2 = 0$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\left[S_f(1) + S_\psi(0)(f'(1))^2\right] \leqslant 0. \tag{10}$$

Если в соотношении (8) выполняется равенство, а функции f и ψ — однолистные, то равенство выполняется также в (10).

Доказательство. Воспользуемся утверждением 1. Для этого построим голоморфное в верхней полуплоскости H отображение

$$F(\zeta) = if(h(\zeta)),$$

где h есть дробно-линейное отображение H на единичный круг U_z с нормировкой $h(0) = 1$:

$$h(\zeta) = -\frac{\zeta - i}{\zeta + i}.$$

Простыми вычислениями убеждаемся, что

$$F(\zeta) = -2a_1\zeta - 2i(a_1 + 2a_2)\zeta^2 + (2a_1 + 8a_2 + 8a_3)\zeta^3 + o(\zeta)^3, \quad \zeta \to 0.$$

Из условия (1) для функции f следует соотношение (5) для F. Пусть Φ — преобразование области $F(H)$, заданное соотношением

$$\Phi = \lambda^{-1} \circ \varphi \circ \lambda,$$

где $\lambda(w) = -iw$. Тогда из неравенства (8) для функции f и свойств внутреннего радиуса [12, гл. 2, §1] следует соотношение (5) для F. Если Ψ — такое преобразование области $\Phi F(H)$, что

$$\Psi = \psi \circ \lambda,$$

то, в силу справедливости разложения (9) для функции f, выполняется соотношение (6) для F.

Таким образом, можно применить утверждение 1, из которого следует

$$\operatorname{Re}\left[S_F(0) + (F'(0))^2 S_\Psi(0)\right] \geqslant 0.$$

Учитывая правила вычисления производной Шварца сложной функции, получаем

$$S_F(0) = S_{if\circ h}(0) = (S_{if} \circ h)(h'(0))^2 + S_h(0) = S_f(1)(h'(0))^2 = -4S_f(1),$$
$$S_\Psi(0) = -S_\psi(0).$$

Кроме того,

$$(F'(0))^2 = 4a_1^2,$$

откуда немедленно следует неравенство (10). Случай равенства вытекает из замечания к утверждению 1. Теорема доказана. □

2. Геометрические оценки шварциана

Выбирая в условии теоремы 1 различным образом преобразования φ, можно получить серию конкретных оценок производной Шварца. Для этого сначала напомним определение симметризации Штейнера [12, гл. 4, §1]. Пусть $l(u)$ — вертикальная прямая $\operatorname{Re} w = u$, $-\infty < u < +\infty$.

Определение 2. Симметризацией Штейнера открытого множества B относительно вещественной оси называется преобразование этого множества в симметричное множество $\operatorname{St} B$, определенное следующим образом.

$$\operatorname{St} B = \{u + iv : B \cap l(u) \neq \varnothing,\ 2\,|v| < m\,(B \cap l(u))\},$$

где $m(\cdot)$ — линейная мера Лебега.

Теорема 2. *Пусть функция f принадлежит классу DH_r и пусть линейная мера Лебега пересечения образа единичного круга $f(U_z)$ с каждой прямой $\operatorname{Re} w = u > 0$, не превосходит $h > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\left[S_f(1) + \frac{\pi^2}{h^2}(f'(1))^2\right] \leqslant 0. \tag{11}$$

Случай равенства выполняется для функции

$$f(z) = \frac{ih}{\pi} \arcsin\left(i\frac{z-1}{z+1}\right),$$

конформно и однолистно отображающей единичный U_z на область

$$\bigl\{w : \operatorname{Re} w > 0,\ |\operatorname{Im} w| < h/2\bigr\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем симметризацию Штейнера множества $f(U_z)$ относительно вещественной оси. Пусть отображение φ представляет собой суперпозицию симметризации Штейнера области $f(U_z)$ и расширения результата симметризации до полуполосы

$$\{w : \operatorname{Re} w > 0,\ |\operatorname{Im} w| < h/2\}. \tag{12}$$

Учитывая неубывание внутреннего радиуса при симметризации Штейнера относительно прямой и при расширении области [12, гл. 2, §1], убеждаемся в выполнении условия (8) теоремы 1.

Построим отображение $\psi{:}\varphi f(U_z)\to H$. Для этого удобнее сначала найти обратное отображение $\omega=\psi^{-1}: H\to\varphi f(U_z)$. При этом нужно учесть необходимость выполнения нормировки (9) теоремы 1. Воспользуемся следующим отображением [13, с. 230, пример 66]:

$$w = \frac{2l}{\pi} \arcsin(z).$$

Данная функция отображает верхнюю полуплоскость на вертикальную полуполосу $\{w{:}\operatorname{Im} w>0, |\operatorname{Re} w|<l\}$. В нашем случае $l=h/2$, и полуполоса (12) лежит в правой полуплоскости, поэтому

$$\omega = \psi^{-1}(\zeta) = -\frac{ih}{\pi}\arcsin(\zeta).$$

Отсюда получаем

$$\psi(\omega) = \sin\left(\frac{i\pi}{h}\omega\right).$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$S_\psi(0) = \frac{\pi^2}{h^2}. \tag{13}$$

Все условия теоремы 1 выполнены, поэтому, подставляя (13) в неравенство (10), получим результат (11).

Для проверки случая равенства заметим сначала, что

$$f(z) = \frac{ih}{\pi}\arcsin\left(i\frac{z-1}{z+1}\right) = \psi^{-1}\circ \mathrm{g},$$

где $\mathrm{g} = -i(z-1)/(z+1)$. Поэтому f голоморфна в единичном круге U_z, при этом $\operatorname{Re} f>0$. Из разложения функции f в окрестности единицы вытекает

$$a_1 = -\frac{h}{2\pi} < 0, \qquad a_2 = \frac{h}{4\pi}.$$

Следовательно, условие (1) выполнено, f принадлежит классу DH_r. Подставляя функцию f в выражение (11), убеждаемся в том, что в нем выполняется равенство. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть функция f принадлежит классу DH_r и пусть для некоторых $p>0$, $h>0$ линейная мера Лебега пересечения образа единичного круга $f(U_z)$ с каждой прямой $\mathrm{Re}\,w=u$, $w=u+iv$, $u>p$, не превосходит h. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\left[S_f(1)+\frac{\pi^2\left(h+6p\,\mathrm{arth}\left(\frac{2p}{h}\right)\right)}{\left(h+2p\,\mathrm{arth}\left(\frac{2p}{h}\right)\right)^3}(f'(1))^2\right)\leqslant 0. \tag{14}$$

Равенство выполняется для функции

$$f(z)=-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{h}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{g}(z)}{\sqrt{1+\left(\frac{2p}{h}\right)^2-\mathrm{g}^2(z)}}\right)+p\,\mathrm{arth}\,\frac{2p}{h}\frac{\mathrm{g}(z)}{\sqrt{1+\left(\frac{2p}{h}\right)^2-\mathrm{g}^2(z)}}\right),$$

$$\mathrm{g}(z)=-i\frac{z-1}{z+1},$$

конформно и однолистно отображающей круг U_z на область $\{w:0<\mathrm{Re}w<p\}\cup\{w:\mathrm{Re}w\geqslant p,\,|\mathrm{Im}w|<h/2\}$.

Доказательство. Выполним симметризацию Штейнера множества $f(U_z)$ относительно вещественной оси. Пусть отображение φ является суперпозицией симметризации Штейнера области $f(U_z)$ и расширения результата симметризации до множества

$$\{w:0<\mathrm{Re}\,w<p\}\cup\{w:\mathrm{Re}\,w\geqslant p,\ |\mathrm{Im}\,w|<h/2\}. \tag{15}$$

Учитывая те же свойства внутреннего радиуса [12, гл. 2, §1], убеждаемся в выполнении неравенства (8) из условия теоремы 1.

Построим отображением, обратное к $\psi:\varphi f(U_z)\to H$. Пусть $\omega=\psi^{-1}:H\to\varphi f(U_z)$. Воспользуемся следующим отображением [13, с. 238-239, пример 96]:

$$w=\frac{2}{\pi}\left(\alpha\,\mathrm{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-z^2}}\right)+\beta\,\mathrm{arth}\,\frac{\beta}{\alpha}\frac{z}{\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-z^2}}\right),$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$. Эта функция отображает верхнюю полуплоскость на множество $\{w:0<\mathrm{Im}\,w<\beta\}\cup\{w:\mathrm{Im}\,w\geqslant\beta,\,|\mathrm{Re}w|<\alpha\}$. В нашем случае $\alpha=h/2$, $\beta=p$, область (15) лежит в правой полуплоскости, поэтому

$$\omega=\psi^{-1}(\zeta)=-\frac{2i}{\pi}\left(\frac{h}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1+\left(\frac{2p}{h}\right)^2-\zeta^2}}\right)+p\,\mathrm{arth}\,\frac{2p}{h}\frac{\zeta}{\sqrt{1+\left(\frac{2p}{h}\right)^2-\zeta^2}}\right).$$

Найти отображение ψ затруднительно, поэтому выразим $S_\psi(0)$ через $S_{\psi^{-1}}(0)$. Из правил нахождения производной Шварца сложной функции вытекает

$$S_\psi(0)=-\frac{S_{\psi^{-1}}(0)}{((\psi^{-1}(0))')^2}. \tag{16}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$S_\psi(0) = \frac{\pi^2\left(h + 6p\operatorname{arth}\left(\frac{2p}{h}\right)\right)}{\left(h + 2p\operatorname{arth}\left(\frac{2p}{h}\right)\right)^3},$$

откуда, учитывая выполнение всех условий теоремы 1, следует результат (14).

Перед проверкой случая равенства заметим, что

$$f(z) = \psi^{-1} \circ \mathrm{g}, \tag{17}$$

где $\mathrm{g}=-i(z-1)(z+1)$. Поэтому функция f голоморфна в единичном круге U_z, кроме того, $\operatorname{Re} f > 0$. Из разложения f в окрестности единицы вытекает

$$a_1 = -\frac{2p\operatorname{arth}\left(\frac{2p}{h}\right) + h}{2\pi\sqrt{\frac{4p^2}{h^2} + 1}} < 0$$

$$a_2 = \frac{2p\operatorname{arth}\left(\frac{2p}{h}\right) + h}{4\pi\sqrt{\frac{4p^2}{h^2} + 1}}.$$

Следовательно, условие (1) выполняется, отображение f принадлежит классу DH_r. Из построения (17) и правил нахождения шварциана сложной функции следует

$$S_f(1) = S_{\psi^{-1}}(0)(\mathrm{g}'(1))^2,$$
$$S_\psi(0)(f'(1))^2 = -S_{\psi^{-1}}(0)(\mathrm{g}'(1))^2.$$

Складывая два предыдущих выражения, убеждаемся в выполнении равенства в соотношении (14). Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит классу DH_r и пусть линейная мера Лебега пересечения образа единичного круга $f(U_z)$ с прямой $\operatorname{Re} w = \pi/2$ не превосходит некоторого $h > 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\operatorname{Re}\left[S_f(1) + \frac{2}{\left(1 + \operatorname{sh}^2\alpha\right)^3}(f'(1))^2\right] \leqslant 0, \tag{18}$$

где α такое, что

$$2\alpha + \operatorname{sh}(2\alpha) = h.$$

Равенство выполняется для функции

$$f(z) = -i\left(\operatorname{arth}\left(i\frac{z-1}{z+1}\right) + i\operatorname{sh}^2\alpha\frac{z-1}{z+1}\right), \tag{19}$$

конформно и однолистно отображающей U_z на область

$$\left\{w : 0 < \operatorname{Re} w \neq \pi/2\right\} \cup \left\{w : \operatorname{Re} w = \pi/2,\ |\operatorname{Im} w| < h/2\right\}.$$

Доказательство. Проведем симметризацию Штейнера множества $f(U_z)$ относительно вещественной оси. Пусть отображение φ представляет собой суперпозицию симметризации Штейнера области $f(U_z)$ и расширения до множества

$$\{w : 0 < \operatorname{Re} w \neq \pi/2\} \cup \{w : \operatorname{Re} w = \pi/2,\ |\operatorname{Im} w| < h/2\}.$$

Учитывая поведение внутреннего радиуса при подобных преобразованиях [12, гл. 2, §1], убеждаемся в выполнении условия (8) теоремы 1.

Построим отображение, обратное к $\psi : \varphi f(U_z) \to H$. Пусть $\omega = \psi^{-1} : H \to \varphi f(U_z)$. Воспользуемся следующим отображением [13, с. 227, пример 60]:

$$w = z + \gamma \operatorname{cth} z, \quad w(\pm\alpha) = \pm\beta,$$
$$\alpha = \operatorname{arsh}\sqrt{\gamma}, \quad \beta = \operatorname{arsh}\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma(\gamma+1)}.$$

Эта функция отображает горизонтальную полосу $\{z : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < 0\}$ на полуплоскость с двумя симметричными относительно мнимой оси разрезами

$$\{w : -\pi/2 < \operatorname{Im} w \neq 0\} \cup \{w : \operatorname{Im} w = 0,\ |\operatorname{Re} w| < \beta\}.$$

В нашем случае $\beta = h/2$. После преобразований, учитывая также необходимость выполнения нормировки (9) теоремы 1, получим

$$\omega(\eta) = -i\left(\eta + \operatorname{sh}^2\alpha \operatorname{cth}\left(\eta - \frac{i\pi}{2}\right)\right).$$

Воспользовавшись отображением верхней полуплоскости на ее полосу $\{\eta : 0 < \operatorname{Im}\eta < < \pi/2\}$ [13, с. 225, пример 54],

$$\eta = \operatorname{arth}\zeta,$$

придем к соотношению

$$\omega(\zeta) = -i\left(k(\zeta) + \operatorname{sh}^2\alpha \operatorname{cth}\left(k(\zeta) - \frac{i\pi}{2}\right)\right),$$
$$k(\zeta) = -\operatorname{arth}\zeta.$$

После элементарных преобразований получаем

$$\omega(\zeta) = i\left(\operatorname{arth}\zeta + \zeta \operatorname{sh}^2\alpha\right).$$

По той же причине, что и в теореме 3, выразим $S_\psi(0)$ через $S_{\psi^{-1}}(0)$. После вычислений получим

$$S_\psi(0) = \frac{2}{\left(1 + \operatorname{sh}^2\alpha\right)^3}.$$

Отсюда, в силу того, что выполняются условия теоремы 1, следует неравенство (18).

Принадлежность функции f классу DH_r можно установить геометрическим способом. Из свойства сохранения ориентации границы при конформном отображении и геометрического смысла аргумента производной вытекает $a_1 = f'(1) < 0$, поэтому выполняется первая часть соотношения (5). А поскольку в случае функции f кривизна образа $f(\partial U_z)$ в точке $w=1$ совпадает с кривизной ∂U_w в той же точке, то выполняется вторая часть условий (5) [11, §1]. Таким образом, $f \in DH_r$.

Заметим, что для функции (19) отображение φ является тождественным, поэтому в условии (8) выполняется равенство. Функции f и ψ однолистные, поэтому из теоремы 1 следует равенство в (18). Теорема доказана. □

Для доказательства следующего результата нам потребуется определение круговой симметризации [12, гл. 4, §1]. Обозначим через $\gamma(\rho)$ окружность $|z|=\rho$.

Определение 3. Круговой симметризацией открытого множества B относительно вещественной положительной полуоси называется преобразование этого множества в симметричное множество $\mathrm{Cr}\, B$, определенное как

$$\mathrm{Cr}\, B = \{\rho e^{i\alpha} : B \cap \gamma(\rho) \neq \varnothing,\ 2\,|\alpha|\,\rho < m\,(B \cap \gamma(\rho))\} \cup \{-\,\rho : \gamma(\rho) \subset B\},$$

где $m(\cdot)$ — линейная мера Лебега.

Теорема 5. *Пусть функция f принадлежит классу DH_r и пусть для некоторых $R > 0,\ 0 < \theta < \pi/2$ угловая мера Лебега пересечения образа единичного круга $f(U_z)$ с окружностью $\gamma(R)$ не превосходит 2θ. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{Re}\left[S_f(1) + \frac{6(1-\cos^2\theta)}{R^2}(f'(1))^2\right] \leqslant 0. \tag{20}$$

Равенство выполняется для функции

$$f(z) = -\,iR\left(\frac{\cos\theta\,(\mathrm{g}^2+2\mathrm{g}+2)}{\mathrm{g}^2+2\mathrm{g}} + \sqrt{\frac{\cos^2\theta\,(\mathrm{g}^2+2\mathrm{g}+2)^2}{(\mathrm{g}^2+2\mathrm{g})^2} - 1}\right), \tag{21}$$

$$\mathrm{g} = -\,i\frac{z-1}{z+1},$$

конформно и однолистно отображающей U_z на область

$$\{w = \rho e^{i\alpha} : \rho = R,\ 0 < |\alpha| < \theta < \pi/2\} \cup \{w = \rho e^{i\alpha} : \rho \neq R,\ |\alpha| < \pi/2\}. \tag{22}$$

Доказательство. Следуя доказательству предыдущих теорем, проведем круговую симметризацию множества $f(U_z)$ относительно вещественной полуоси. Пусть отображение φ также представляет собой суперпозицию симметризации области $f(U_z)$ и расширения результата симметризации до множества

$$\{w = \rho e^{i\alpha} : \rho = R,\ 0 < |\alpha| < \theta < \pi/2\} \cup \{w = \rho e^{i\alpha} : \rho \neq R,\ |\alpha| < \pi/2\}.$$

Учитывая поведение внутреннего радиуса при подобных преобразованиях [12, гл. 2, §1], убеждаемся в выполнении условия (8) теоремы 1.

В отличие от доказательства предыдущих теорем, здесь мы будем строить непосредственно отображение $\psi : \varphi f(U_z) \to H$. Для этого сначала выполним поворот области (22) относительно начала координат против часовой стрелки на угол $\pi/2$ и произведем нормировку:

$$\nu = \frac{i\omega}{R}.$$

Затем получившийся результат отобразим функцией Жуковского на плоскость с разрезами по двум лучам:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(\nu + \frac{1}{\nu}\right).$$

После этого построим отображение

$$\xi = \sqrt{\frac{\mu + \cos\theta}{\mu - \cos\theta}},\ \sqrt{1} = 1.$$

Для выполнения условия нормировки (9) построим функцию

$$\zeta = \xi - 1.$$

В итоге придем к отображению

$$\zeta = \psi(\omega) = \sqrt{\frac{\frac{R^2-\omega^2}{2\omega R} + i\cos\theta}{\frac{R^2-\omega^2}{2\omega R} - i\cos\theta}} - 1,\ \sqrt{1} = 1.$$

После соответствующих вычислений получим

$$S_\psi(0) = \frac{6(1-\cos^2\theta)}{R^2},$$

откуда, учитывая то, что все условия теоремы 1 выполнены, следует неравенство (20)).

Принадлежность функции (21) классу DH_r докажем геометрически. Из свойства сохранения ориентации границы при конформном отображении и геометрического смысла аргумента производной следует, что $a_1 = f'(1) < 0$, поэтому выполняется первая часть соотношения (5). А кривизна образа $f(\partial U_z)$ в точке $w = 1$ совпадает с кривизной ∂U_w в той же точке, поэтому выполняется вторая часть условий (5) [11, §1]. Таким образом, $f \in DH_r$.

Для функции (21) отображение φ является тождественным, поэтому в условии (8) выполняется равенство. Функции f и ψ однолистные, поэтому по теореме 1 выполняется равенство в (20). Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Z. Nehari, *Conformal mapping*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York–Toronto–London, 1952, viii+396 pp.

[2] B. Osgood, “Old and new on the Schwarzian derivative”, *Quasiconformal mappings and analysis*, A collection of papers honoring Frederick W. Gehring to his 70th birthday (Ann Arbor, MI, August 1995), Springer, New York, 1998, 275–308.

[3] M. Chuaqui, P. Duren, W. Ma, D. Mejía, D. Minda, B. Osgood, “Schwarzian norms and two-point distortion”, *Pacific J. Math.*, **254**:1, (2011), 101–116.

[4] Г. М Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 628 с.

[5] W. K Hayman, *Multivalent functions*, 2nd ed., Cambridge Tracts in Math., v. 110, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, xii+263 pp.

[6] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962, 265 с.

[7] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. I”, *Алгебра и анализ*, **9**:3, (1997), 41—103.

[8] Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. II”, *Алгебра и анализ*, **9**:5, (1997), 1—50.

[9] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Grad. Texts in Math., v. 109, Springer-Verlag, New York, 1987, xii+257 pp.

[10] J. B. Garnett, D. E. Marshall, *Harmonic measure*, New Math. Monogr., v. 2, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, xvi+571 pp.

[11] В. Н. Дубинин, “О граничных значениях производной Шварца регулярной функции”, *Матем. сб.*, **202**:5, (2011), 29–44.

[12] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Springer, Basel, 2014, xii+344 pp.

[13] В. И. Лаврик, В. Н. Савенков, *Справочник по конформным отображениям*, Наукова думка, Киев, 1970, 252 с.

Поступила в редакцию
19 января 2018 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00022).

Pavlov N.A. Estimates of Schwarzian derivative of holomorphic functions in the disk with restriction on real part. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 90–100.

ABSTRACT

Series of theorems, including general theorem, for holomorphic functions in the disk are proven. Estimates include derivatives in boundary points of the disk.

Key words: *holomorphic functions, Schwarzian derivative, symmetrization.*