Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 101–111

УДК 517.958
MSC2010 35Q20 +35Q60

© И. В. Прохоров[1,2], А. А. Сущенко[1,2]

Задача Коши для уравнения переноса излучения в неограниченной среде

Исследована корректность задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения переноса излучения в системе двух неограниченных подобластей разделенных отражающей и преломляющей поверхностью. Доказано существование единственной сильно непрерывной полугруппы разрешающих операторов задачи Коши и получены условия, определяющие порядок роста полугруппы.

Ключевые слова: *уравнение переноса излучения, задача Коши, обобщенные условия сопряжения.*

Введение

Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости задачи Коши для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения в бесконечной неоднородной среде. Рассмотрен сравнительно простой случай, соответствующий начально-краевой задаче для системы двух неограниченных подобластей, разделенных плоской отражающей и преломляющей поверхностью. Несмотря на простоту, такая постановка задачи типична при изучении процессов, описывающих распространение акустических волн в двухслойном бесконечном или полубесконечном волноводах [1–3]. Подобные задачи возникают при исследовании проблемы Милна в случае плоскопараллельной симметрии [4–7].

Библиография работ, посвященных решению краевых и начально-краевых задач для уравнения переноса излучения, на сегодняшний день достаточно обширна. Приведем здесь в качестве примера лишь несколько широко известных монографий [8–10] и часть сравнительно недавних работ, посвященных исследованию граничных задач для стационарных и нестационарных уравнений переноса с условиями отражения и преломления на границах раздела сред [11–21].

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690050, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.
Электронная почта: prokhorov@iam.dvo.ru (И. В. Прохоров), sushchenko.aa@dvfu.ru (А. А. Сущенко).

Доказательство корректности исходной начально-краевой задачи сводится к исследованию разрешимости абстрактной задачи Коши для некоторого операторного эволюционного уравнения. Показано, что резольвента производящего оператора удовлетворяет условиям теоремы Хилле – Иосиды и решение абстрактной задачи Коши существует и единственно.

Учитывая специфику структуры среды, в которой рассматривается процесс переноса излучения, обоснование корректности задачи Коши проведено для достаточно широкого класса линейных непрерывных операторов сопряжения без дополнительных ограничений на норму последних. С физической точки зрения это позволяет моделировать не только диссипативные и консервативные процессы взаимодействия излучения с границей раздела (например, френелевский и диффузный законы отражения и преломления [19,22]), но и включать в рассмотрение ряд других природных эффектов, характерных для процессов, протекающих в «размножающей» среде [23].

Решение задачи Коши мы будем искать в классе функций, непрерывных и ограниченных в $\mathbb{R}^3$, за исключением границы раздела, и покажем, что плоская граница раздела не усложняет структуру множества непрерывности решения начально-краевой задачи. В отличие от общего случая [14], в областях непрерывности коэффициентов уравнения не возникает дополнительных разрывов решения, вызванных искривлением поверхности раздела двух сред.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение, описывающее нестационарный процесс распространения излучения в $\mathbb{R}^3$ [20, 21], следующего вида:

$$\left(\frac{1}{v(r)}\frac{\partial}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_r + \sigma(r)\right) I(r,\omega,t) = \sigma(r)\Lambda(r)\int\limits_{\Omega} p(r,\omega\cdot\omega')I(r,\omega',t)d\omega'. \qquad (1)$$

Функция $I(r,\omega,t)$ в уравнении (1) интерпретируется как плотность потока частиц в момент времени $t\in[0,+\infty)$, в точке $r\in\mathbb{R}^3$, движущихся со скоростью v в направлении единичного вектора $\omega\in\Omega=\{\omega\in\mathbb{R}^3:|\omega|=1\}$. Функции σ и p называются сечением взаимодействия и индикатрисой рассеяния. Неотрицательная величина Λ характеризует тип среды: при $\Lambda\leqslant 1$ — среда неразмножающая, в противном случае — размножающая.

Процесс переноса излучения происходит в двухкомпонентной системе $G\subset\mathbb{R}^3$, состоящей из объединения областей G_1 и G_2, представляющих собой верхнее и нижнее полупространства соотвественно:

$$G_1 = \{r=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3:\ r_3>0\}, \qquad G_2 = \{r=(r_1,r_2,r_3)\in\mathbb{R}^3:\ r_3<0\}.$$

В подобласти G_i функции $v(r),\Lambda(r),\sigma(r)$ не зависят от переменной r и принимают значения $v(r)=v_i>0,\sigma(r)=\sigma_i>0,\Lambda(r)=\Lambda_i\geqslant 0$. Скорость распространения света в области G_i и показатель преломления вещества, заполняющего область G_i, связаны формулой $v_i=v_0/\kappa_i$, где v_0 — скорость света в вакууме. Функция $p(r,\omega\cdot\omega')\geqslant 0$ при $r\in G_i$ равна $p_i(\omega\cdot\omega')\in C[-1,1]$ и удовлетворяет условию нормировки

$$\int\limits_{\Omega} p(r,\omega\cdot\omega')d\omega' = 1.$$

Введем обозначения $\partial G=\{r\in\mathbb{R}^3 : r_3=0\}$, $X=G\times\Omega$, $\Gamma=\partial G\times(\Omega_-\cup\Omega_+)$, где $\Omega_\pm=$ $=\{\omega\in\Omega\,|\,\pm\omega_3>0\}$, и присоединим к уравнению (1) начальное условие

$$I|_{t\,=\,0}=I_0 \quad \text{на} \quad X \tag{2}$$

и условие сопряжения на границе раздела сред

$$I^-=\mathcal{B}I^+ \quad \text{на} \quad \Gamma\times[0,+\infty). \tag{3}$$

Функция $I_0(r,\omega)\geqslant 0$ описывает состояние процесса в начальный момент времени $t=0$. В условии (3) функции $I^\pm$ являются предельными граничными значениями функции I, $I^\pm(z,\omega,t)=\lim\limits_{\epsilon\to -0} I(z\pm\epsilon\omega,\omega,t)$, а оператор сопряжения $\mathcal{B}$ определяет характер взаимодействия излучения с поверхностью раздела.

Иногда систему уравнений и граничных условий, описывающих перенос излучения в неограниченных по пространственной переменной областях, дополняют условием, накладываемом на поведение решения в бесконечно удаленной точке [4, 6, 7]. В частности, эти условия могут допускать неограниченный рост решения начально-краевой задачи $I(r,\omega,t)$ при $(-\omega\cdot r)\to\infty$. Мы будем искать решение в классе функций ограниченных в $\mathbb{R}^3$, поэтому явным образом условие на бесконечности отсутствует.

Обозначим через $C_b(Y)$ пространство непрерывных и ограниченных на множестве Y функций $f(y)$ с нормой $\|f\|_{C_b(Y)}=\sup\limits_{y\in Y}|f(y)|$ и будем предполагать, что оператор $\mathcal{B}$ — линейный, неотрицательный, ограниченный и переводит $C_b(\Gamma)$ в себя. Таким ограничениям удовлетворяют широко используемые [13, 19] операторы сопряжения френелевского $\mathcal{B}_f$ и диффузного $\mathcal{B}_d$ типов, определяемые соотношениями указанными ниже.

Френелевский оператор сопряжения, описывающий зеркальное отражение и преломление по закону Снеллиуса потока излучения на поверхности раздела сред ∂G с нормалью $n=(0,0,1)$, имеет вид [13, 19]

$$(\mathcal{B}_f I^+)(z,\omega,t)=R(\omega)I^+(z,\omega_{re},t)+T(\omega)I^+(z,\omega_{tr},t), \tag{4}$$

где

$$\omega_{re}=\omega-2\nu n, \quad \omega_{tr}=\psi(\nu)n+\widetilde{\kappa}(\nu)(\omega-\nu n), \quad \nu=\omega\cdot n,$$

$$\widetilde{\kappa}(\nu)=\begin{cases}\kappa_1/\kappa_2, & \text{если} \quad 0<\nu\leqslant 1,\\ \kappa_2/\kappa_1, & \text{если} \quad -1\leqslant\nu<0,\end{cases}$$

$$\psi(\nu)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\nu)\sqrt{1-\widetilde{\kappa}^2(\nu)(1-\nu^2)}, & \text{если } 1-\widetilde{\kappa}^2(\nu)(1-\nu^2)\geqslant 0,\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$

$$R(\omega)=\frac{1}{2}(R_\parallel^2(\nu)+R_\perp^2(\nu)), \quad T(\omega)=1-R(\omega),$$

$$R_\parallel(\nu)=\frac{\widetilde{\kappa}(\nu)\psi(\nu)-\nu}{\widetilde{\kappa}(\nu)\psi(\nu)+\nu}, \quad R_\perp(\nu)=\frac{\psi(\nu)-\widetilde{\kappa}(\nu)\nu}{\psi(\nu)+\widetilde{\kappa}(\nu)\nu},$$

Оператор $\mathcal{B}_d$, описывающий диффузное отражение и преломление светового потока [22] на границе раздела сред по закону Ламберта, определяется следующим образом:

$$(\mathcal{B}_d I^+)(z,\omega,t) = \frac{R_d(z,\omega)}{\pi} \int\limits_{\Omega(z,-\omega)} |n\cdot\omega'| I^+(z,\omega',t)d\omega' + \\ + \frac{T_d(z,\omega)}{\pi} \int\limits_{\Omega(z,+\omega)} |n\cdot\omega'| I^+(z,\omega',t)d\omega'. \quad (5)$$

$$R_d(z,\omega) = \begin{cases} R_d^+(z), & \text{если } (z,\omega)\in\partial G\times\Omega_+, \\ R_d^-(z), & \text{если } (z,\omega)\in\partial G\times\Omega_-, \end{cases} \quad T_d(z,\omega) = 1 - R(z,\omega),$$

$$\Omega(\omega) = \{\omega'\in\Omega \mid \omega_3\omega_3' > 0\}, \quad \Omega_\pm = \Omega(\pm n),$$

где неотрицательные функции $R_d^\pm(z)$,$T_d^\pm(z)$ не превосходят единицы и принадлежат пространству $C_b(\partial G)$.

Согласно определению, френелевский и диффузный операторы удовлетворяют условию $\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)} \leqslant 1$. Физически это ограничение соответствует отсутствию размножения частиц при взаимодействии с границей раздела. В задачах для ограниченных областей [19, 22] условие существенно. В данной постановке задачи, как мы покажем далее, из-за специфического строения области, оно излишне.

1. Функциональные пространства. Постановка задачи

Введем в рассмотрение пространство функций $W_c^1 = \{f\in C_b(X) : \omega\cdot\nabla_r f\in C_b(X)\}$. Нетрудно показать, что для любой $f\in W_c^1$ справедливы представления для ее предельных значений на Γ

$$f^\pm(z,\omega) = f(z\mp\tau\omega,\omega)\exp(-\tau) + \int\limits_0^\tau \exp(-\tau')\,(\omega\cdot\nabla_r f \pm f)\,(z\mp\tau'\omega,\omega)d\tau' \quad (6)$$

где τ — любое положительное число. По теореме о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, из соотношения (6) вытекает, что для любой функции $f\in W_c^1$ ее предельные значения $f^\pm$ на Γ существуют и принадлежат $C_b(\Gamma)$.

Так как $\sigma,\Lambda\in C_b(G), p(r,\omega\cdot\omega')\in C_b(G\times[-1,1])$, то оператор $\mathcal{S}$, определенный соотношением

$$\mathcal{S}f = \sigma(r)\Lambda(r)\int\limits_\Omega p(r,\omega\cdot\omega')f(r,\omega')d\omega',$$

переводит пространство $C_b(X)$ в себя. Введем оператор $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}f = -v(r)\left(\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega) + \sigma(r)f(r,\omega) - (\mathcal{S}f)(r,\omega)\right),$$

действующий в банаховом пространстве $C_b(X)$, с областью определения

$$D(\mathcal{A}) = \{f\in W_c^1 \mid f^- = \mathcal{B}f^+ \text{ на } \Gamma\}.$$

Решением начально-краевой задачи (1), (2), (3) будем называть вектор-функцию $I(t)$, удовлетворяющую следующим условиям: значения $I(t)$ при всех $t\in[0,+\infty)$ принадлежат $D(\mathcal{A})$; в каждой точке t существует сильная производная функции $I(t)$, принадлежащая пространству $C([0,+\infty);C_b(X))$; справедливы соотношения

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} = \mathcal{A}I(t), \tag{7}$$

и

$$I(0) = I_0, \tag{8}$$

где $I_0\in D(\mathcal{A})$.

2. Вспомогательные утверждения

Согласно утверждению теоремы Хилле–Иосиды [24], для обоснования корректности задачи (7), (8) достаточно показать, что резольвента $\mathcal{R}_\lambda=(\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}$ оператора $\mathcal{A}$ существует для всех вещественных λ, больших некоторого β, и ее норма ограничена числом $1/(\lambda-\beta)$. В этом случае теорема гарантирует существование единственной сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$ разрешающих операторов, порожденной инфинитезимальным генератором $\mathcal{A}$ и удовлетворяющей условиям $\mathcal{U}(0)=\mathcal{I}$, и норма однопараметрического семейства операторов $\mathcal{U}(t)$ не превосходит величины $C\exp(\beta t)$.

Определим операторы $\mathcal{L}:D(\mathcal{A})\to C_b(X)$, $\mathcal{L}_\lambda:D(\mathcal{A})\to C_b(X)$ следующим образом:

$$\mathcal{L}f = (\omega\cdot\nabla_r+\sigma(r))\,f(r,\omega), \quad \mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}+\frac{\lambda}{v}\mathcal{I}.$$

Очевидно, что $\mathcal{A}=-v(\mathcal{L}-\mathcal{S})$ и для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ справедливы соотношения

$$\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1} = (\lambda\mathcal{I}+v(\mathcal{L}-\mathcal{S}))^{-1} = (\mathcal{L}+\frac{\lambda}{v}\mathcal{I}-\mathcal{S})^{-1}v^{-1} = (\mathcal{L}_\lambda-\mathcal{S})^{-1}v^{-1}. \tag{9}$$

Пусть $\lambda_+=\max\{\sigma_1 v_1,\sigma_2 v_2\},\lambda_-=-\min\{\sigma_1 v_1,\sigma_2 v_2\}$, и при $\lambda>\lambda_-$ определим линейные операторы $\mathcal{P}_\lambda:C_b(\Gamma^-)\to W_c^1(X)$ и $\mathcal{E}_\lambda:C_b(X)\to W_c^1(X)$, заданные формулами

$$(\mathcal{P}_\lambda\phi)(r,\omega) = \phi^-(r-d(r,-\omega)\omega,\omega)\exp\left(-\,(\sigma_i+\lambda/v_i)\,d(r,-\omega)\right), \tag{10}$$

$$(\mathcal{E}_\lambda\Phi)(r,\omega) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp\left(-\,(\sigma_i+\lambda/v_i)\,\tau\right)\Phi(r-\tau\omega,\omega)d\tau \tag{11}$$

для всех $\dfrac{r\cdot n}{\omega\cdot n}>0$, $r\in G_i$, и

$$(\mathcal{P}_\lambda\phi)(r,\omega) = 0, \quad (\mathcal{E}_\lambda\Phi)(r,\omega) = \int\limits_0^{\infty}\exp\left(-\,(\sigma_i+\lambda/v_i)\,\tau\right)\Phi(r-\tau\omega,\omega)d\tau \tag{12}$$

для всех $\dfrac{r\cdot n}{\omega\cdot n}\leqslant 0$, $r\in G_i$. В выражениях (10),(11) величина $d(r,-\omega)=\dfrac{r\cdot n}{\omega\cdot n}$ обозначает расстояние от точки $r\in G$ в направлении вектора $-\omega$ до границы множества G.

Принимая во внимания введенные обозначения, непосредственно можно проверить, что существование оператора $\mathcal{R}_\lambda$ в пространстве $D(\mathcal{A})$ эквивалентно однозначной разрешимости уравнения

$$f = \mathcal{P}_\lambda(\mathcal{B}f^+) + \mathcal{E}_\lambda(\mathcal{S}f + I_0/v). \tag{13}$$

Предметом исследования этого параграфа будет вспомогательное уравнение

$$\mathcal{L}_\lambda f = \Phi, \qquad \Phi \in C_b(X),\ f \in D(\mathcal{A}), \tag{14}$$

и его интегральный аналог

$$f = \mathcal{P}_\lambda\mathcal{B}f^+ + \mathcal{E}_\lambda\Phi. \tag{15}$$

Лемма 1. *При $\lambda > \lambda_-$ решение уравнения (14) в пространстве $D(\mathcal{A})$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\|f\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}}{\lambda - \lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)}. \tag{16}$$

Доказательство. Так как $f \in D(\mathcal{A})$, то существует функция $f^+ \in C_b(\Gamma)$, удовлетворяющая уравнению (15) на Γ. Так как при $(r,\omega) \in \Gamma$ выполняется равенство $\dfrac{r\cdot n}{\omega\cdot n} = 0$, то из (12) получаем, что $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B}f^+ = 0$. Поэтому для функции f^+ выполняется следующее соотношение

$$f^+ = \mathcal{E}_\lambda\Phi \quad \text{на } \Gamma. \tag{17}$$

Так как при $\lambda>\lambda_-$ оператор $\mathcal{E}_\lambda : C_b(\Gamma^-)\to W_c^1(X)$ существует и ограничен, то из (17) вытекает оценка

$$\|f^+\|_{C_b(\Gamma)} = \max_{i=1,2}\sup_{(r,\omega)\in G_i\times\Omega}\left|\int_0^\infty \exp\left(-\left(\sigma_i + \lambda/v_i\right)\tau\right)\Phi(r-\tau\omega,\omega)d\tau\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \max_{i=1,2}\sup_{(r,\omega)\in G_i\times\Omega}\left|\int_0^\infty \exp\left(-\left(\sigma_i+\lambda/v_i\right)\tau\right)\left(\sigma_i+\lambda/v_i\right)d\tau\right| =$$
$$= \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)}. \tag{18}$$

Из равенства (17) следует, что решение уравнения (15) может быть найдено по формуле

$$f = \mathcal{P}_\lambda\mathcal{B}(\mathcal{E}_\lambda\Phi)^+ + \mathcal{E}_\lambda\Phi. \tag{19}$$

Из соотношения (19), используя неравенство (18), находим

$$\|f\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \|\mathcal{P}_\lambda\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)} + \mathcal{E}_\lambda(\sigma+\lambda/v)\|_{C_b(X)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_+}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)},1\}\|\mathcal{P}_\lambda 1 + \mathcal{E}_\lambda(\sigma+\lambda/v)\|_{C_b(X)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_+\max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)},1\}}{\lambda-\lambda_-}\left\|\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)}. \tag{20}$$

□

3. Основные утверждения

Из леммы 1 вытекает, что обратный оператор к оператору $\mathcal{L}_\lambda$ при $\lambda>\lambda_-$ существует и ограничен. Если на линейном множестве $D(\mathcal{A})$ ввести норму

$$\|f\|_{D(\mathcal{A})} = \left\|\frac{\mathcal{L}_\lambda f}{\sigma}\right\|_{C_b(X)}, \tag{21}$$

то из неравенства (16) вытекает

$$\|f\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\lambda_+\max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)},1\}}{\lambda-\lambda_-}\|f\|_{D(\mathcal{A})}. \tag{22}$$

Следовательно, сходимость последовательности функций по норме пространства $D(\mathcal{A})$ влечет за собой сходимость последовательности функций в пространстве $C_b(X)$ при выполнении условия $\lambda>\lambda_-$.

Покажем, что линейное множество $D(\mathcal{A})$ с нормой (21) образует банахово пространство функций. Пусть последовательность функций f_n фундаментальна в $D(\mathcal{A})$:

$$\|f_k-f_n\|_{D(\mathcal{A})} = \left\|\frac{\mathcal{L}_\lambda f_k}{\sigma}-\frac{\mathcal{L}_\lambda f_n}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \to 0, \quad k,n\to\infty.$$

Так как пространство $C_b(X)$ является полным, то существует элемент $\Phi\in C_b(X)$ такой, что

$$\left\|\frac{\mathcal{L}_\lambda f_n}{\sigma}-\frac{\Phi}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Согласно лемме 1 существует единственный элемент f из $D(\mathcal{A})$ такой, что $\mathcal{L}_\lambda f=\Phi$, поэтому

$$\left\|\frac{\mathcal{L}_\lambda f_n}{\sigma}-\frac{\mathcal{L}_\lambda f}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Откуда вытекает, что множество $D(\mathcal{A})$ с нормой (21) образует банахово пространство функций.

Теорема 1. *Решение $I(t)$ задачи Коши (7), (8) существует, единственно и при выполнении неравенства $\overline{\Lambda}\max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)},1\} <-\lambda_+/\lambda_-$ стабилизируется к нулю при $t\to\infty$.*

Доказательство. Покажем, что при выполнении условия

$$\lambda > \beta = \lambda_- + \lambda_+ \overline{\Lambda} \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}, \tag{23}$$

уравнение (13) однозначно разрешимо в $D(\mathcal{A})$ и справедлива оценка

$$\|f\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \beta}. \tag{24}$$

Поскольку неотрицательная функция p удовлетворяет условию нормировки, то при выполнении неравенства (23) для нормы $\|\mathcal{S}f/\sigma\|_{C_b(X)}$ получаем

$$\left\|\frac{\mathcal{S}f}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} = \left\|\frac{\Lambda(r)\sigma(r)}{\sigma(r)} \int\limits_{\Omega} p(r, \omega\cdot\omega') f(r,\omega') d\omega'\right\|_{C_b(X)} \leqslant \overline{\Lambda}\|f\|_{C_b(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}}{\lambda - \lambda_-}\|f\|_{D(\mathcal{A})}. \tag{25}$$

Из процесса построения операторов $\mathcal{P}_\lambda$,$\mathcal{E}_\lambda$ непосредственно вытекает $\mathcal{L}_\lambda(\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B}+\mathcal{E}_\lambda\mathcal{S})f= =\mathcal{S}f$, следовательно, из леммы 1 вытекает

$$\|(\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B} + \mathcal{E}_\lambda\mathcal{S})f\|_{D(\mathcal{A})} = \left\|\frac{\mathcal{S}f}{\sigma}\right\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}}{\lambda - \lambda_-}\|f\|_{D(\mathcal{A})}. \tag{26}$$

Из соотношения (25),(26) получаем

$$\|\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B} + \mathcal{E}_\lambda\mathcal{S}\|_{C_b(X)\to D(\mathcal{A})} \leqslant \frac{\overline{\Lambda}\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}}{\lambda - \lambda_-} < 1.$$

Так как норма оператора $\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B}+\mathcal{E}_\lambda\mathcal{S}$, действующего в банаховом пространстве $D(\mathcal{A})$, меньше единицы, то уравнение (13) при выполнении условия (23) однозначно разрешимо, и решение может быть найдено по формуле

$$f = (\mathcal{I} - (\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B} + \mathcal{E}_\lambda\mathcal{S}))^{-1}\mathcal{E}_\lambda\frac{I_0}{v}.$$

Докажем неравенство (24). Так как

$$\left\|\mathcal{E}_\lambda\frac{I_0}{v}\right\|_{C_b(X)} \leqslant \frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \lambda_-},$$

то

$$\|f\|_{C_b(X)} = \left\|(\mathcal{I} - (\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B} + \mathcal{E}_\lambda\mathcal{S}))^{-1}\mathcal{E}_\lambda\frac{I_0}{v}\right\|_{C_b(X)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1 - \|\mathcal{P}_\lambda\mathcal{B} + \mathcal{E}_\lambda\mathcal{S}\|_{C_b(X)\to D(\mathcal{A})}}\frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \lambda_-} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{\overline{\Lambda}\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}}{\lambda - \lambda_-}}\frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \lambda_-} =$$

$$= \frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \lambda_- - \overline{\Lambda}\lambda_+ \max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)}, 1\}} = \frac{\|I_0\|_{C_b(X)}}{\lambda - \beta}. \tag{27}$$

Таким образом, неравенство (24) доказано. Так как существование оператора $\mathcal{R}_\lambda$ в пространстве $D(\mathcal{A})$ эквивалентно однозначной разрешимости уравнения (13), то из (24) вытекает, что часть комплексной плоскости $\{\zeta\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\zeta>\beta\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\mathcal{A}$, причем для всех ζ, принадлежащих этому множеству, норма оператора $\mathcal{R}_\zeta$ не превосходит $1/(\mathrm{Re}\zeta-\beta)$. Это обеспечивает [24] существование единственной полугруппы разрешающих операторов $\mathcal{U}(t)$ задачи Коши (7),(8), причем решение задачи может быть найдено по формуле

$$I(t)=\mathcal{U}(t)I_0=\lim_{\epsilon\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Delta-i\epsilon}^{\Delta+i\epsilon}e^{-\zeta t}(\zeta\mathcal{I}-\mathcal{A})^{-1}I_0d\zeta,\quad \Delta>\beta.$$

Из ограничения (23) вытекают условия стабилизации решения задачи Коши $I(t)$. Если выполняется неравенство $\overline{\Lambda}<-\lambda_+/\lambda_-$, то порядок роста полугруппы $\beta=\lambda_-+\lambda_+ +\overline{\Lambda}$ меньше нуля и семейство операторов $\mathcal{U}(t)$ образует полугруппу сжатия, поэтому $\|\mathcal{U}(t)I_0\|_{C([0,+\infty);C_b(X))}\leqslant C\exp(\beta t)\|I_0\|_{C_b(X)}\to 0$, при $t\to\infty$.

Таким образом, при выполнении условия $\overline{\Lambda}<-\lambda_+/\lambda_-$ решение задачи Коши $I(t)$ стабилизируется к нулю при $t\to\infty$ и устойчиво на всей полуоси $[0,+\infty)$. Теорема доказана.

□

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\left(\frac{1}{v(r)}\frac{\partial}{\partial t}+\omega\cdot\nabla_r+\sigma(r)\right)I(r,\omega,t)=$$
$$=\sigma(r)\Lambda(r)\int\limits_{\Omega}p(r,\omega\cdot\omega')I(r,\omega',t)d\omega'+J(r,\omega,t),\tag{28}$$

где неотрицательная функция J характеризует распределение внутренних источников в среде.

Пусть функция $J(r,\omega,t)$ как однопараметрическое отображение $J(t):[0,+\infty)\to C_b(X)$ принадлежит $C([0,+\infty);C_b(X))$. Согласно результатам, полученным в монографии [24], из теоремы 1 следует утверждение.

Следствие 1. *Решение неоднородной задачи Коши*

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}=\mathcal{A}I(t)+J(t),\tag{29}$$

$$I(0)=I_0,\tag{30}$$

существует, единственно и при выполнении неравенства

$$\overline{\Lambda}\max\{\|\mathcal{B}\|_{C_b(\Gamma)\to C_b(\Gamma)},1\}<-\lambda_+/\lambda_-$$

стабилизируется к стационарному решению I_∞, *где* $I_\infty=-\mathcal{A}^{-1}vJ_\infty$, $J_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}J(t)$.

Список литературы

[1] И. О. Ярощук, О. Э. Гулин, *Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики*, Дальнаука, Владивосток, 2002.

[2] Г. В. Алексеев, *Метод нормальных волн в подводной акустике*, Дальнаука, Владивосток, 2006.

[3] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “Исследование задачи акустического зондирования морского дна методами теории переноса излучения”, *Акустический журнал*, **61**:3, (2015), 400–408.

[4] М. В. Масленников, “Проблема Милна с анизотропным рассеянием”, *Тр.МИАН СССР*, **97**, (1968), 3–158.

[5] В. С. Потапов, “Метод решения уравнения теории переноса для оптически толстого слоя с отражающими границами”, *Теоретическая и математическая физика*, **100**:2, (1994), 287–302.

[6] В. С. Потапов, “Асимптотические решения уравнений теории переноса для оптически толстого слоя с отражающими границами”, *Теоретическая и математическая физика*, **100**:3, (1994), 424–443.

[7] Н. В. Коновалов, “Оператор рассеяния поляризованного излучения и его общие свойства. Характеристическое уравнение теории переноса поляризованного излучения”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2009, 034, 43 с.

[8] С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, ИЛ, М., 1953.

[9] В. С. Владимиров, “Математические задачи односкоростной теории переноса частиц”, *Тр.МИАН СССР*, **61**, (1961), 3–134.

[10] В. М. Новиков, С.Б. Шихов, *Теория параметрического воздействия на перенос нейтронов*, Энергоиздат, М., 1982.

[11] Т. А. Гермогенова, *Локальные свойства решений уравнения переноса*, Наука, М., 1986.

[12] И. В. Прохоров, “Краевая задача теории переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе”, *Дифференциальные уравнения*, **36**:6, (2000), 848-851.

[13] И. В. Прохоров, “О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред”, *Известия РАН. Серия математическая*, **67**:6, (2003), 169–192.

[14] И. В. Прохоров, “О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения”, *Математические заметки*, **86**:2, (2009), 256–272.

[15] И. В. Прохоров, “О разрешимости начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения”, *Сибирский математический журнал*, **53**:2, (2012), 377-387.

[16] И. В. Прохоров, “Задача Коши для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **53**:5, (2013), 75–766.

[17] A. A. Amosov, “Boundary value problem for the radiation transfer equation with reflection and refraction conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **191**:2, (2013), 101-149.

[18] A. A. Amosov, “Boundary Value Problem for the Radiation Transfer Equation with Diffuse Reflection and Refraction Conditions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **193**:2, (2013), 151-176.

[19] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, “О корректности задачи Коши для уравнения переноса излучения с френелевскими условиями сопряжения”, *Сибирский математический журнал*, **56**:4, (2015), 922–933.

[20] A. Amosov, M. Shumarov, “Boundary value problem for radiation transfer equation in multilayered medium with reflection and refraction conditions”, *Applicable Analysis*, **95**:7, (2016).

[21] А. А. Амосов, *Краевые задачи для уравнения переноса с условиями отражения и преломления*, «Тамара Рожковская», Новосибирск, 2017.

[22] И. В. Прохоров, А. А. Сущенко, А. Ким, “Начально-краевая задача для уравнения переноса излучения с диффузными условиями сопряжения”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **20**:1, (2017), 75—85.

[23] M. Boulanouar, H. Emamirad, “The Asymptotic Behavior of a Transport Equation in Cell Population Dynamics with a Null Maturation Velocity”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **243**:1, (2000), 47–63.

[24] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied mathematics science, **44**, Springer-Verlag New-York, 1983.

Поступила в редакцию
16 марта 2018 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проект № 18-5-050) и РФФИ (проект № 18-31-00050).

Prokhorov I. V., Sushchenko A.A. The Cauchy problem for the radiatve transfer equation in an unbounded medium. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 101–111.

ABSTRACT

The correctness of the Cauchy problem of the integro-differential radiation transfer equation in a system of two unbounded subdomains, separated by a reflecting and refracting surface, is investigated. The existence of a unique strongly continuous semigroup of resolving operators of the Cauchy problem is proved. Conditions on the order of growth of the semigroup are obtained.

Key words: *radiative transfer equation, Cauchy problem, generalized matching conditions.*