Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 112–116

УДК 519.853.24
MSC2010 49S99

© В. Я. Прудников[1]

О теоремах единственности решений вариационных неравенств

Основу работы составляет замечание о получении теорем единственности решений вариационных неравенств для выпуклых функционалов.

Ключевые слова: *теорема единственности.*

В теории вариационных неравенств установление единственности решений проводится по одной схеме: предполагая существование еще хотя бы одного решения, полученные неравенства исследуются на предмет совпадения решений. При этом, насколько известно автору, из внимания исследователей ускользает один элементарный, но важный момент, к изложению которого и переходим.

Пусть выполнены условия:

1) X — нормированное пространство, $F_i : X \to (-\infty, +\infty]$, $i = \overline{1,m}$ — выпуклые полунепрерывные снизу функционалы, $F = F_1 + \ldots + F_m$;

2) K — выпуклое множество пространства X, $K \subseteq \mathrm{dom} F$;

3) $F(u) = inf_K F$, $u \in K$.

Предположим, что существует еще один элемент $v \in K$ такой, что $F(v) = inf_K F$. F, F_i — выпуклые функционалы. Тогда для любых $t \in [0,1]$, $i = \overline{1,m}$.

$$F(tu + (1-t)v) = tF(u) + (1-t)F(v). \tag{1}$$

$$F_i(tu + (1-t)v) \leqslant tF_i(u) + (1-t)F_i(v). \tag{2}$$

На самом деле в (2) так же, как и в (1), будут равенства для любого $t \in [0,1]$, т.к. в противном случае, если хотя бы одно из неравенств в (2) при некотором $t \in (0,1)$ будет строгим, то, суммируя в (2) все неравенства, получим противоречие с (1).

[1] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: prudnickov.vit@yandex.ru

Таким образом, мы получим систему

$$\begin{cases} F(u) = F(v) \\ F_i(tu + (1-t)v) = tF_i(u) + (1-t)F_i(v) \\ t \in [0,1], i = \overline{1,m} \end{cases} \tag{3}$$

Если отсюда будет следовать $u{=}v$, то задача минимизации функционала F имеет единственное решение.

Пример. *Обозначим через $\Omega \subset \Re^n$, $n \geqslant 2$ ограниченную область с липшицевой границей Γ; $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; $W_p^1(\Omega)$ — пространство Соболева. Если γ — оператор следа функции u на Γ, то будем писать $\gamma u : = u$.*

Рассмотрим задачу минимизации недифференцируемого функционала [1]:

$$\begin{cases} F(u) : = \frac{1}{p} \int\limits_\Omega |\nabla u|^p d\Omega + \int\limits_\Gamma \mathrm{g}|u| d\Gamma - \int\limits_\Omega u f d\Omega \to \min \\ u \in W_p^1(\Omega), \end{cases} \tag{4}$$

где $\mathrm{g} \in L_{p'}(\Gamma)$, $\mathrm{g}_{|\Gamma} \geqslant 0$ п.в. на Γ, $f \in L_{p'}(\Omega)$.

Вследствие ограниченности вложения пространства $W_p^1(\Omega)$ в $L_p(\Gamma)$ выпуклый функционал F непрерывен в $W_p^1(\Omega)$.

В статье [1] неравенство

$$\int\limits_\Gamma \mathrm{g} d\Gamma > |\int\limits_\Omega f d\Omega| \tag{5}$$

приведено как достаточное условие для коэрцитивности функционала F, а значит, и для существования решения задачи (4) (исследования задачи (4) см. в работах [2–5]). В [6] доказана необходимость (5) для коэрцитивности F при $p{=}2$. Если $p{\neq}2$, то схема доказательства та же, что и в [6].

Оказывается, неравенство (5) является необходимым для единственности решения задачи (4). Докажем это. Итак, пусть u — единственное решение задачи (4). Тогда для любого $t \geqslant 1$, $\alpha = \pm 1$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{t}(F(u + t(u + \alpha - u)) - F(u)) \geqslant F(u + \alpha) - F(u) > 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{t} \int\limits_\Gamma \mathrm{g}(|u + t\alpha| - |u|)\, d\Gamma - \alpha \int\limits_\Omega f\, d\Omega \geqslant \beta,$$

где $\beta = min(F(u+1) - F(u), F(u-1) - F(u))$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to \infty$, получим

$$|\alpha| \int\limits_\Gamma \mathrm{g}\, d\Gamma - \alpha \int\limits_\Omega f\, d\Omega \geqslant \beta,$$

т.е.

$$\int\limits_\Gamma \mathrm{g}\, d\Gamma > \left| \int\limits_\Omega f\, d\Omega \right|.$$

Наша задача состоит в том, чтобы установить единственность решения (4) в $W_p^1(\Omega)$. Согласно системе (3), при $t = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} F(u) = F(v), \\ \int\limits_{\Omega} \left|\nabla \frac{u+v}{2}\right|^p \, d\Omega = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, d\Omega + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^p \, d\Omega, \\ \int\limits_{\Gamma} \mathrm{g} \left|\frac{u+v}{2}\right| \, d\Gamma = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}|u| \, d\Gamma + \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}|v| \, d\Gamma, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(u) = F(v), \\ \int\limits_{\Omega} \left(\left|\nabla \frac{u+v}{2}\right|^p - \frac{1}{2}|\nabla u|^p - \frac{1}{2}|\nabla v|^p\right) \, d\Omega = 0, \\ \int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}(|u+v| - |u| - |v|) \, d\Gamma = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Т.к. функция $x \to |x|^p$ при $p > 1$ строго выпукла в $\Re^n$, то из второго равенства получим $\nabla v = \nabla u$, т.е. $v = u + c$, где c — некоторая константа. Из третьего равенства в тех точках, где $\mathrm{g} > 0$, ввиду выпуклости функции $|x|$, приходим к равенству

$$|u + v| - |u| - |v| = 0.$$

Это равенство возможно тогда и только тогда, когда $u \cdot v \geqslant 0$, т.е.

$$u(u + c) \geqslant 0.$$

Но тогда из первого равенства системы (6) получим

$$\int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}(|u + c| - |u|) \, d\Gamma = c \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega.$$

Поэтому, из (6) следует следующая система

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}(|u + c| - |u|) \, d\Gamma = c \int\limits_{\Omega} f \, d\Omega, \\ u \cdot (u + c) \geqslant 0 \,\text{на}\, \Gamma, \,\text{где}\, \mathrm{g} > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Используя эту систему, докажем теорему.

Теорема. *Пусть* $\mathrm{g} \in L_{p'}(\Gamma)$, $\mathrm{g}_{|\Gamma} \geqslant 0$ *п.в. на* Γ, $f \in L_{p'}(\Omega)$, Ω *имеет липшицеву границу и выполнено одно из условий:*

1) $f \geqslant 0$ *(или* $f \leqslant 0$*) п.в. в* Ω*;*

2) $p > n$, $\Gamma_0 : = \{x \in \Gamma : \mathrm{g}(x) > 0\}$ *— связное множество в топологии пространства* $\Re^n$*.*

(Существует единственное решение задачи (3)*)* $\Leftrightarrow \left(\int\limits_{\Gamma} \mathrm{g}\, d\Gamma > \left|\int\limits_{\Omega} f \, d\Omega\right|\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость доказана выше. Доказываем достаточность. Фактически нам нужно показать, что из (7) следует $c = 0$.

Пусть выполнено условие $f \geqslant 0$. Так как $F(v) \geqslant F(u)$ для всех $v \in W_p^1(\Omega)$, то, полагая здесь $v = u^+ = \max(u, 0)$, получим неравенство

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u^+|^p \, d\Omega - \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, d\Omega + \int_\Gamma \mathrm{g}(|u^+| - |u|) \, d\Gamma \geqslant \int_\Omega f(u^+ - u) \, d\Omega,$$

поэтому

$$0 \geqslant -\frac{1}{p}\int_{\Omega:u\leqslant 0} |\nabla u|^p \, d\Omega + \int_\Gamma \mathrm{g}(|u^+| - |u|) \, d\Gamma \geqslant - \int_{\Omega:u\leqslant 0} fu \, d\Omega \geqslant 0.$$

Но тогда из равенства $\int_\Gamma \mathrm{g}(|u^+| - |u|) \, d\Gamma = 0$ следует, что $|u| = |u^+|$ на Γ_0, т.е. $u \geqslant 0$, если $\mathrm{g} > 0$.

Аналогично: $u + c \geqslant 0$, если $\mathrm{g} > 0$. Но тогда из первого равенства системы (7) получим

$$c\int_\Gamma \mathrm{g} \, d\Gamma = c\int_\Omega f \, d\Omega.$$

Так как $\int_\Gamma \mathrm{g} \, d\Gamma > \left|\int_\Omega f \, d\Omega\right|$, то $c = 0$.

Пусть теперь выполнено условие (2). Так как $p > n$, то функция u непрерывна на $\bar{\Omega}$.

Предположим, для определенности, что $c > 0$ (для $c < 0$ рассуждения аналогичны). Рассмотрим на Γ непрерывную функцию

$$\frac{1}{c}(|u + c| - |u|),$$

которая, ввиду условия на Γ_0 $u(u + c) \geqslant 0$, может принять лишь два значения: ± 1. На самом деле, т.к. по условию множество Γ_0 связно, эта функция принимает только одно из значений: 1 или $-$ 1. Следовательно, из первого равенства системы (7) следует

$$\int_\Gamma \mathrm{g} \, d\Gamma = \int_\Gamma f \, d\Omega, \text{ или} \int_\Gamma \mathrm{g} \, d\Gamma = -\int_\Omega f \, d\Omega,$$

что невозможно. □

Замечание 1. *В работе [1] единственность решения рассматриваемой задачи при выполнении одного из условий 1), 2) доказана при более жестких ограничениях.*

Замечание 2. *Данная теорема справедлива в той же формулировке и для задачи*

$$\begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, d\Omega + \int_\Omega \mathrm{g}_1 |\nabla u| \, d\Omega + \int_\Gamma \mathrm{g}_2 |u| \, d\Gamma - \int_\Omega fu \, d\Omega \to \min, \\ u \in W_p^1(\Omega), 1 < p < \infty, \end{cases} \tag{8}$$

где $\mathrm{g}_1 \geqslant 0$, $\mathrm{g}_2 \geqslant 0$; $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, f$ *из* $L_{p'}$. *В статье [7] эта задача рассмотрена при* $p = 2$.

Список литературы

[1] А. Г. Подгаев, "О теоремах единственности в задаче минимизации одного недифференцируемого функционала", *Дальневосточный математический журнал*, **1**:1, (2000), 28–37.

[2] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980.

[3] R. Namm, A. Zolotukhin, "On a method with prox-regularization for solving a simplified friction problev", *Report*, Computer Center F. - E. B. of the Russian Academy of Sciences, and Khabarovsk's state University of Technology, Khabarovsk, 1993, 1–25.

[4] R. Namm, A. Ya. Zolotukhin, "On a stable methods for solving variational inequalities in mechanics", *Journal of Harbin Institute of Technology (New Series)*, **7**, (2000), 122–123.

[5] Р. В. Намм, А. Г. Подгаев, *Единственность в одном вариационном неравентстве с недифференцируемым функционалом, относящимся к задаче с трением*, Препринт Э7 ИПМ ДВО РАН, Дальнаука, Хабаровск, 1994, 16 с.

[6] В. Я. Прудников, "О коэрцитивности выпуклых функционалов", *Известия вузов. Математика*, 2005, № 9(520), 57–59.

[7] Х. Ким, Р. В. Намм, Э. М. Вихтенко, Г. Ву, "О регуляризации в задаче Мосолова и Мясникова с трением на границе области", *Известия вузов. Математика*, 2009, № 6, 10–19.

Поступила в редакцию
1 июля 2017 г.

Prudnikov V. J. On unicity theorems for solutions of variational inequalities. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 112–116.

ABSTRACT

At the basis of the work is the remark of the unicity theorems for solutions of the variational inequalities for convex functionals.

Key words: *unicity theorem.*