Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 117–122

УДК 519.178, 519.218.5
MSC2010 05C20, 60G55

© Г. Ш. Цициашвили[1]

Решение балансовых уравнений и исследование на пуассоновость потоков в сетях Джексона

В работе производится декомпозиция решения системы балансовых уравнений для интенсивностей потоков заявок, выходящих из узлов сети Джексона. Составляется список наборов независимых стационарных пуассоновских потоков, выходящих из узлов сети. Процедуры декомпозиции и составления списка основаны на определении классов циклически эквивалентных вершин специально построенного ориентированного графа, соответствующего сети Джексона.

Ключевые слова: *сеть Джексона, система балансовых уравнений, классы циклической эквивалентности вершин орграфа.*

Введение

В работе рассматривается открытая сеть Джексона S с пуассоновским входным потоком интенсивности λ_0, состоящая из конечного числа узлов $k=0,1,\dots,m$. Динамика перемещения заявок в сети задается маршрутной матрицей $\Theta=||\theta_{i,j}||_{i,j=0}^m$, где $\theta_{i,j}$ — вероятность перехода заявки после обслуживания из i-го узла в j-ый; $\theta_{0,0}=0$, узел с номером 0 — внешний источник и одновременно сток для заявок, уходящих из сети. В узле i находится $l_i \leqslant \infty$ приборов, времена обслуживания на которых независимы и имеют показательное распределение с параметром μ_i, $i=1,\dots,m$. В каждом узле i сети число заявок в очереди неограничено, обслуживание происходит в порядке поступления заявок в узел сети.

Пусть маршрутная матрица $\Theta=||\theta_{i,j}||_{i,j=0}^m$ неразложима, т.е. для

$$\forall\, i,\ j \in \{0,\dots,m\}\ \exists\, i_1,\dots,i_r \in \{0,\dots,m\}:\ \theta_{i,i_1}>0, \theta_{i_1,i_2}>0,\dots,\theta_{i_r,j}>0.$$

Тогда при фиксированном $\lambda_0>0$ система линейных алгебраических уравнений для интенсивностей потоков, выходящих из узлов данной сети

$$\lambda_k=\lambda_0\theta_{0,k}+\sum_{t=1}^m \lambda_t\theta_{t,k}, \qquad k=1,\dots,m, \tag{1}$$

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guram@aim.dvo.ru

имеет единственное решение $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, причем $\lambda_1>0,\ldots,\lambda_m>0$ [1, с. 13].

Система (1) называется системой балансовых уравнений и играет важную роль в формулировке и доказательстве мультипликативной теоремы Джексона [2], широко используемой в массовом обслуживании. Если $\lambda_i<l_i\mu_i, i=1,\ldots,m$, то у дискретного марковского процесса $(n_1(t),\ldots,n_m(t)),t\geqslant 0$, описывающего число заявок в узлах сети, предельное распределение (не зависящее от начального состояния) представимо в виде $\prod_{i=1}^{m} p_i(n_i)$, где $p_i(n_i)$ — предельное распределение числа заявок в изолированной l_i — канальной системе массового обслуживания с входным пуассоновским потоком интенсивности λ_i.

В работе [3] сети Джексона сопоставляется ориентированный граф G с множеством ребер, соответствующих положительным элементам маршрутной матрицы. Вводится понятие невозвратных множеств вершин графа G, которые определяют наборы независимых стационарных пуассоновских потоков, выходящих из узлов сети Джексона.

В настоящей работе граф G факторизуется по отношению циклической эквивалентности и перечисляются наборы независимых стационарных пуассоновских потоков, выходящих из узлов сети. Производится декомпозиция решения системы балансовых уравнений (1) по подсистемам, соответствующим классам циклической эквивалентности и доказывается существование и единственность решений этих подсистем.

1. Решение системы балансовых уравнений

Построим по маршрутной матрице Θ ориентированный граф G следующим образом. Определим множество вершин U графа G равенством $U=\{0_*,1,\ldots,m,0_{**}\}$ и зададим ноль — один матрицу $A=||a_{i,j}||_{i,j\in U}$ по правилу

$$a_{0_*,0_*}=a_{0_{**},0_{**}}=1,\ a_{0_*,0_{**}}=a_{0_{**},0_*}=0,\ a_{i,0_*}=a_{0_{**},i}=0,\ i=1,\ldots,m,$$

$$a_{i,j}=1\ \Leftrightarrow\ \theta_{i,j}>0,\ a_{0_*,i}=1\ \Leftrightarrow\ \theta_{0,i}>0,\ a_{i,0_{**}}=1\ \Leftrightarrow\ \theta_{i,0}>0,\ i,j=1,\ldots,m.$$

Тогда множество V ребер графа G определяется соотношением

$$V=\big\{(i,j),\ i,j\in U:\ a_{i,j}=1\big\}.$$

На множестве U определим отношение частичного порядка $i\succeq j$, если в графе G существует путь из вершины i в вершину j. Если маршрутная матрица Θ неразложима, то справедливо очевидное соотношение (см. замечание 1).

Замечание 1. Очевидно, что условие неразложимости матрицы Θ эквивалентно следующему соотношению для вершин графа G :

$$0_*\succeq i\succeq 0_{**},\ i=1,\ldots,m. \tag{2}$$

На множестве вершин U определим отношение (циклической) эквивалентности $i\sim j\Leftrightarrow i\succeq j,\ j\succeq i$. Всюду далее полагаем $\mathbf{i}$ классом вершин графа G, циклически эквивалентных вершине i. Обозначим через $\mathbf{U}$ множество классов эквивалентности, где $\mathbf{0}_* = \{0_*\}, \mathbf{0}_{**} = \{0_{**}\}$. На множество $\mathbf{U}$ естественным образом распространяется отношение частичного порядка $\succeq$:

$$\mathbf{0}_* \succeq \mathbf{i} \succeq \mathbf{0}_{**},\ \mathbf{i} \in \mathbf{U}. \tag{3}$$

Соединим классы $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbf{U}$ ребром, если существуют вершины $p \in \mathbf{i}$, $q \in \mathbf{j}$ такие, что ребро (i, j) входит в исходный граф G. Нетрудно проверить, что полученный в результате фактор-граф $\mathbf{G}$ является ациклическим.

Замечание 2. Условие (3) означает отсутствие в сети S подсети, в которую не входят заявки, и отсутствие подсети, из которой не выходят заявки (и потому возможно их постоянное накопление).

Перейдем теперь к декомпозиции решения системы балансовых уравнений (1), основанной на выделении классов эквивалентности в множестве U. В [4] построен алгоритм вычисления длины максимального пути из единственной максимальной (в смысле отношения частичного порядка $\succeq$) вершины в любую другую вершину ациклического ориентированного графа.

Применяя этот алгоритм, можно вычислить длину $\mathbf{L}(\mathbf{i})$ максимального пути из вершины $\mathbf{0}_*$ в произвольную вершину $\mathbf{i}$ графа $\mathbf{G}$. Обозначим $R = \max(\mathbf{L}(\mathbf{i}) : \mathbf{i} \in \mathbf{U})$, тогда из [4, теорема 1] следует, что для любого $s, 1 \leqslant s \leqslant R$, существует класс вершин $\mathbf{i} \in \mathbf{U}$, удовлетворяющий равенству $\mathbf{L}(\mathbf{i}) = s$. Причем если $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ является ребром в графе $\mathbf{G}$, то $\mathbf{L}(\mathbf{i}) < \mathbf{L}(\mathbf{j}), \mathbf{L}(\mathbf{0}_*) = 0$.

Для каждого класса $\mathbf{i} \in \mathbf{U}$ выделим из системы (1) подсистему

$$\lambda_k = \sum_{\mathbf{j}\colon \mathbf{L}(\mathbf{j}) < \mathbf{L}(\mathbf{i})} \sum_{t \in \mathbf{j}} \lambda_t \theta_{t,k} + \sum_{t \in \mathbf{i}} \lambda_t \theta_{t,k}, \qquad k \in \mathbf{i}. \tag{4}$$

Введем дополнительную вершину $0^{\mathbf{i}}$ и обозначим

$$\lambda_{0^{\mathbf{i}}} = \sum_{\mathbf{j}\colon \mathbf{L}(\mathbf{j}) < \mathbf{L}(\mathbf{i})} \sum_{t \in \mathbf{j}} \lambda_t \sum_{k \in \mathbf{i}} \theta_{t,k}, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \theta_{0^{\mathbf{i}},k} = \frac{\sum\limits_{\mathbf{j}\colon \mathbf{L}(\mathbf{j}) < \mathbf{L}(\mathbf{i})} \sum\limits_{t \in \mathbf{j}} \lambda_t \theta_{t,k}}{\lambda_{0^{\mathbf{i}}}}, \qquad \theta_{0^{\mathbf{i}},0^{\mathbf{i}}} = 0, \\ \theta_{k,0^{\mathbf{i}}} = \sum_{\mathbf{j}\colon \mathbf{L}(\mathbf{j}) > \mathbf{L}(\mathbf{i})} \sum_{t \in \mathbf{j}} \theta_{k,t} = 1 - \sum_{t \in \mathbf{i}} \theta_{k,t}, \qquad k \in \mathbf{i}. \end{gathered} \tag{6}$$

Тогда система (4) может быть переписана в виде

$$\lambda_k = \lambda_{0^{\mathbf{i}}} \theta_{0^{\mathbf{i}},k} + \sum_{t \in \mathbf{i}} \lambda_t \theta_{t,k}, \qquad k \in \mathbf{i}. \tag{7}$$

Теорема 1. *При заданном $\lambda_{0^{\mathbf{i}}} > 0$ система (4) имеет единственное решение $(\lambda_k$, $k \in \mathbf{i})$, все компоненты которого положительны.*

Доказательство. Система (7) определяется матрицей $||\theta_{k,t}||_{k,t\in\mathbf{i}\cup 0^{\mathbf{i}}}$, которая в соответствие с равенствами (5), (6) является стохастической (все ее элементы неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна единице) и в соответствие с соотношением (3) – неприводимой. Учитывая [1, с. 13], приходим к справедливости утверждения теоремы 1. □

Декомпозиция алгоритма решения системы (1). Для нахождения вектора $(\lambda_k : k\in\mathbf{i})$ необходимо в соответствие с (5) предположить, что известны все $\lambda_t : t\in \mathbf{j}, \mathbf{L}(\mathbf{j})<\mathbf{L}(\mathbf{i})$. Т.к. единственным классом эквивалентности в $\mathbf{U}$, удовлетворяющим равенству $\mathbf{L}(\mathbf{i})= 0$, является класс $\mathbf{0}_*$, то величина $\lambda_{\mathbf{0}_*}=\lambda_0$ известна. Следовательно, в соответствие с теоремой 1 можно решить системы (7) для всех $\mathbf{i}: \mathbf{L}(\mathbf{i})=\mathbf{1}$. Зная $\lambda_t : t\in\mathbf{j}, \mathbf{L}(\mathbf{j})<\mathbf{2}$, можно найти теперь все $\lambda_k : k\in\mathbf{i}, \mathbf{L}(\mathbf{i})=\mathbf{2}$. Аналогично, зная все $\lambda_t : t\in\mathbf{j}, \mathbf{L}(\mathbf{j})<\mathbf{p}<\mathbf{R}$, можно вычислить все $\lambda_k : k\in\mathbf{i}, \mathbf{L}(\mathbf{i})=\mathbf{p}$. Можно последовательно по p, тем самым, полностью разбить систему (1) на подсистемы (7).

2. Пуассоновские потоки

Предположим, что в сети Джексона выполняется условие эргодичности $\lambda_i < < l_i\mu_i, k=1,\dots,m$, и распределение числа заявок в узлах сети в начальный момент времени совпадает с эргодическим [2]. Назовем множество вершин $W\subseteq U$, $0_*\in W$, невозвратным, если из любой вершины, не входящей в W, нет ребра в вершину, принадлежащую W. Тогда все потоки, выходящие из узлов сети Джексона, находящихся в вершинах множества W, в узлы, не находящиеся в вершинах множества W, являются независимыми и пуассоновскими [3]. Поэтому представляется интересным перечисление всех невозвратных множеств W.

Лемма 1. *Любое невозвратное множество W вместе с вершиной $k\in\mathbf{i}$ содержит все вершины класса эквивалентности $\mathbf{i}$.*

Доказательство. Действительно, пусть вершины $k,t\in\mathbf{i}$, $k\in W$, $t\notin W$, тогда в графе G существует путь из вершины t в вершину k, целиком проходящий через вершины класса $\mathbf{i}$. Этот путь содержит ребро (t',k') такое, что $t'\notin W$, $k'\in W$, что противоречит невозвратности множества W. □

Лемма 2. *Для любого $\mathbf{i}\in\mathbf{U}$ объединение $U_{\mathbf{i}}$ всех классов эквивалентности $\mathbf{j}$: $\mathbf{0}_*\succeq\mathbf{j}\succeq\mathbf{i}$ является невозвратным множеством. Любое невозвратное множество W вместе с классом эквивалентности $\mathbf{i}$ содержит все множество $U_{\mathbf{i}}$.*

Доказательство. Предположим, что объединение $U_{\mathbf{i}}$ не является невозвратным множеством, и потому существуют класс $\mathbf{k}\cap U_{\mathbf{i}}=\emptyset$ и ребро из $\mathbf{k}$ в множество $U_{\mathbf{i}}$. Тогда $\mathbf{k}\subseteq U_{\mathbf{i}}$, и это противоречие доказывает, что множество $U_{\mathbf{i}}$ является невозвратным.

Пусть теперь класс $\mathbf{i}$ содержится в невозвратном множестве W и существует класс $\mathbf{k}\subseteq\mathbf{U}_{\mathbf{i}}$, не содержащийся в множестве W. Тогда из любой вершины класса $\mathbf{k}$ (не содержащейся в множестве W) в графе G можно провести путь γ в произвольную вершину класса $\mathbf{i}$ (содержащуюся в множестве W). Следовательно, путь γ содержит ребро (t',r') : $t'\notin W$, $r'\in W$. Противоречие доказывает, что $U_{\mathbf{i}}\subseteq W$. □

Обозначим через $\mathbf{W}$ множество классов эквивалентности, входящих в невозвратное множество W, и положим $\mathbf{I}$ как множество минимальных по отношению частичного порядка $\succeq$ классов в $\mathbf{W}$.

Теорема 2. *Любое невозвратное множество вершин W представимо в виде*

$$W = \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbf{W}} U_{\mathbf{i}} = \bigcup_{\mathbf{i}\in\mathbf{I}} U_{\mathbf{i}}. \tag{8}$$

Доказательство. Из определения невозвратного (в нашем случае конечного) множества следует, что объединение конечного набора невозвратных множеств также является невозвратным множеством. Поэтому любое невозвратное множество W можно представить в виде $W = \bigcup\limits_{i\in W} U_{\mathbf{i}}$, что приводит к доказательству первого равенства в формуле (8). Второе равенство следует из определения множества $U_{\mathbf{i}}$. □

Автором и его коллегами был разработан алгоритм определения множества $\mathbf{U}$ и отношения частичного порядка $\succeq$ на нем [5]. Этот алгоритм основан на последовательном включении в исходный граф G новых вершин и пересчете множества классов эквивалентности $\mathbf{U}$ и ноль – один матрицы, задающей отношение частичного порядка между ними. В ходе вычислительных экспериментов с матрицами размерностью несколько тысяч показано, что данный алгоритм работает значительно быстрее, чем традиционный алгоритм, основанный на максиминном перемножении матрицы смежности графа G.

Список литературы

[1] Г. П. Башарин, А. Л. Толмачев, *Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем*, Итоги науки и техники, "Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика", т. 21, ВИНИТИ, Москва, 1983.

[2] J. R. Jackson, “Networks of Waiting Lines”, *Oper. Res.*, **5**:4, (1957), 518–521.

[3] F. J. Beutler, B. Melamed, “Decomposition and customer streams of feedback networks of queues in equilibrium”, *Oper. Res.*, **26**:6, (1978), 1059–1072.

[4] Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, “Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания”, *ДВМЖ*, **16**:2, (2016), 223–228.

[5] Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, А. С. Лосев, “Алгоритмы кластеризации графов”, *Вестник Воронежского государственного университета*, **1**, (2016), 145–149.

Поступила в редакцию
16 марта 2017 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-07-00177).

Tsitsiashvili G. Sh. Solution of balance equations and investigation of Poisson flows in Jackson networks. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 117–122.

ABSTRACT

In this paper a decomposition of a solution of balance equations for intensities of flows departing from nodes of the Jackson network is constructed. Sets of independent stationary Poisson flows departing from nodes of Jackson network are enumerated. Procedures of the decomposition and the enumeration are based on a definition of classes of cyclically equivalent nodes in a directed graph consistent with the Jackson network.

Key words: *the Jackson network, a system of balance equations, classes of cyclic equivalence in directed graph.*