Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 1. С. 123–126

Краткие сообщения

УДК 519.217.2+004.742.2
MSC2010 60J28

© Г. Ш. Цициашвили[1,2], М. А. Осипова[1,2], К. Е. Самуйлов[3,4], Ю. В. Гайдамака[3,4]

Применение многоканальных систем массового обслуживания с отказами к конструированию телекоммуникационных сетей

В настоящей заметке строится оценка скорости сходимости к нулю вероятности отказа в многоканальной системе обслуживания, моделирующей телекоммуникационную сеть, при пропорциональном увеличении количества серверов и нагрузки. С помощью полученной оценки решается задача разделения ресурсов между различными пользователями телекоммуникационной сети.

Ключевые слова: *многоканальная система массового обслуживания с отказами, телекоммуникационная сеть, модели телетрафика.*

Введение

Теория массового обслуживания, как современная область прикладной теории вероятностей, разработана в рамках исследования операций и является одним из основных инструментов математической теории телетрафика [1]. Особую роль в анализе производительности телекоммуникационных систем играют модели массового обслуживания будущих поколений этих систем. В частности, при конструировании современных телекоммуникационных сетей пятого поколения, несмотря на их высокую пропускную способность, появляется необходимость разделить конечное количество ресурсов между различными приложениями и пользователями.

В настоящей заметке разрабатываются асимптотические методы анализа телекоммуникационных сетей, наиболее важными характеристиками которых являются

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7.
[2] Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 8.
[3] Российский университет дружбы народов, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6.
[4] Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44.
Электронная почта: `guram@iam.dvo.ru` (Г. Ш. Цициашвили), `mao1975@list.ru` (М. А. Осипова), `samouylov_ke@rudn.university` (К. Е. Самуйлов), `gaydamaka_yuv@rudn.university` (Ю. В. Гайдамака).

вероятность блокировки и величина нагрузки. Асимптотическое поведение вероятности блокировки впервые было проанализировано в [2] для случая, когда количество серверов и нагрузка велики. Был обнаружен синергетический эффект (устремление к нулю вероятности отказа), к которому, однако в дальнейшем на практике не возвращались. Авторы заметки более детально исследовали этот эффект в связи с появлением новых задач по разделению конечного количества ресурсов в сетях пятого поколения между различными пользователями.

По аналогии с [2] в работе рассматривается n-канальная система массового обслуживания с отказами (блокировкой), при этом предполагается, что интенсивность входного потока пропорциональна n. Исследуется сходимость к нулю вероятности отказа при $n\to\infty$. Конструируется совокупность многоканальных систем с отказами и одинаковой (или близкой) асимптотикой сходимости к нулю вероятностей отказа.

1. Формулировка основных результатов

Рассмотрим n-канальную систему массового обслуживания A_n с пуассоновским входным потоком интенсивности $n\lambda$ и показательно распределенными временами обслуживания, имеющими интенсивность μ на всех n приборах, $\rho=\lambda/\mu$. Эту систему можно рассматривать как объединение n одноканальных систем с интенсивностями входного потока λ. Количество заявок в системе A_n описывается процессом гибели и рождения $x_n(t)$ с интенсивностями рождения и гибели

$$\lambda_n(k) = n\lambda, \qquad 0 \leqslant k < n,$$
$$\mu_n(k) = k\mu, \qquad 0 < k \leqslant n.$$

Обозначим $P_n(\rho)$ стационарную вероятность отказа в системе A_n при заданном ρ. Пусть $a_n, b_n, n\geqslant 1$, — две вещественные последовательности. При $n\to\infty$ полагаем, что $a_n \preceq b_n$, если $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant 1$, скажем, что $a_n \sim b_n$, если $b_n \preceq a_n \preceq b_n$.

Теорема 1. *Справедливо следующее соотношение:* $P_n(1) \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$, $n \to \infty$.

Теорема 2. *При* $\rho < 1$ *справедливы соотношения*

$$\exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\rho}{8}} \preceq P_n(\rho) \preceq \exp\left(-\frac{n\ln^2\rho}{2}\cdot\frac{\rho-1}{\ln\rho}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{\ln\rho}{\rho-1}}. \qquad (1)$$

Замечание 1. При $\rho = 1-\gamma$, $\gamma\to 0$, верхняя и нижняя оценки для вероятности отказа $P_n(\rho)$ сближаются, поскольку множитель $\dfrac{\rho-1}{\ln\rho}\to 1$. Причем множитель $n\ln^2\rho$ наиболее сильно влияет на вероятность отказа $P_n(\rho)$.

Следствие 2.1. *Пусть* $\rho = 1-n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, *тогда соотношения* (1) *могут быть* *переписаны в виде*

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi n}} \preceq P_n(\rho) \preceq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \qquad \gamma \geqslant \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi n}} \preceq P_n(\rho)\exp\left(\frac{n^{1-2\gamma}}{2}\right) \preceq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \qquad \gamma < \frac{1}{2}$$

Теорема 3. *При $\rho > 1$ справедливо соотношение $P_n(\rho) \to 1 - \mu/\lambda$, $n \to \infty$.*

2. Применение асимптотических формул к задачам конструирования

Предположим, что у нас имеется m независимых пуассоновских потоков заявок с интенсивностями $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m$ и параллельно работающими приборами с интенсивностью обслуживания на каждом из них, равной μ. Полагаем, что заявка k-го потока одновременно обслуживается c_k приборами, $1 \leqslant k \leqslant m$. Требуется так распределить приборы между потоками, чтобы вероятности отказа $P_n^{(k)}(1)$ для каждого из потоков $k = 1,\ldots,m$ были приблизительно одинаковыми. Такая задача возникает при конструировании современных систем связи пятого поколения.

Пусть число приборов в k-ой подсистеме равно nn_k. Исходя из теоремы 1, следует потребовать, чтобы выполнялись равенства $n_1/c_1 = \ldots = n_m/c_m$. Представим эти равенства в виде $n_2 = n_1 \cdot c_2/c_1,\ldots,n_m = n_1 \cdot c_m/c_1$. Перепишем числа $c_2/c_1,\ldots,c_m/c_1$ в виде $p_2/q_2,\ldots,p_m/q_m$, где пары натуральных чисел $(p_2,q_2);\ldots;(p_m,q_m)$ состоят из взаимно простых чисел. Чтобы числа $n_2,\ldots,n_m$ были целыми, число n_1 должно быть кратно числам $q_2,\ldots,q_m$ и, следовательно, должно делиться на наименьшее общее кратное L чисел $q_2,\ldots,q_m$. Поэтому всевозможные значения чисел $n_1,\ldots,n_m$, представимы в виде: $n_1 = nL$, $n_2 = np_2L/q_2,\ldots,n_m = np_mL/q_m$, $n = 1,2,\ldots$

Если интенсивности входных потоков различаются, введем $\rho_k = \lambda_k/\mu$, $k = 1,\ldots,m$, заменим исходные равенства на равенства $n_1 \ln^2 \rho_1/c_1 = \ldots = n_m \ln^2 \rho_m/c_m$ и проведем аналогичное рассмотрение, предполагая $\ln^2 \rho_1,\ldots,\ln^2 \rho_m$ рациональными числами.

Список литературы

[1] Г. П. Башарин, Ю. В. Гайдамака, К. Е. Самуйлов, “Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу мультисервисных сетей связи следующих поколений”, *Автоматика и вычислительная техника*, **2**, (2013), 11–21.

[2] В. А. Наумов, “О поведении параметров метода ERT при малой нагрузке”, *Сб. научных трудов. Численные методы и информатика*, 1988, 36–40.

Поступила в редакцию
10 апреля 2018 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-07-00766, 17-07-00845, 17-07-00177).

Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A., Samouylov K. E., Gaidamaka Yu. V. Application of multi-server queuing systems with failures to the construction of telecommunication networks. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 1. P. 123–126.

ABSTRACT

In this note, we construct an estimate of the convergence rate to zero of the probability of failure in multi-server queuing system, that simulates a telecommunication network in the pursuit of large numbers of servers and load. In accordance with this, the problem of resource sharing between different users of the telecommunication network is solved.

Key words: *multi-server queuing system with failures, telecommunication network, models of teletraffic.*