

УДК 539.374: 539.224

MSC2010 74C05

© А. А. Буренин¹, М. Каинг², А. В. Ткачева¹

К расчету плоских напряженных состояний в теории неустановившихся температурных напряжений в упругопластических телах

На примере решения краевой задачи о локальном по центральной области нагреве и последующем остывании круглой пластины, изготовленной из упругопластического материала, сравниваются расчеты неустановившихся температурных напряжений либо с учетом зависимостей упругих модулей от температуры, либо без такого учета. Показано, что при зависимости предела текучести от температуры задача расчета плоских температурных напряжений в условиях пластического течения максимальных касательных напряжений оказывается в своей постановке некорректной. Но это же задача имеет решение при использовании в расчетах условия максимальных приведенных напряжений. Отмечаются условия возникновения повторных пластических течений и рассчитываются остаточные напряжения.

Ключевые слова: *упругость, пластичность, температурные напряжения, остаточные деформации, остаточные напряжения.*

Введение

При изготовлении изделий технологические операции обработки материалов часто связаны с интенсивным термомеханическим воздействием. Вследствие этого термомеханика деформирования остается совершенно необходимым фундаментальным инструментом для совершенствования таких технологий промышленного производства. Поэтому ее развитие диктуется не только внутренней логикой, но и настоятельными вызовами к такому фундаментальному направлению современной механики со стороны технологической практики.

Теория температурных напряжений [1, 2] в качестве простейшей несвязанной теории оказывается особенно востребованной. Но даже в рамках такой теории остаются

¹ Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005, г. Комсомольск - на - Амуре, ул. Металлургов, 1.

² Комсомольский - на - Амуре государственный университет, 681013, г. Комсомольск - на - Амуре, пр. Ленина, 27.

Электронная почта: burenin@iacp.dvo.ru (А. А. Буренин), myatkhaing.51@gmail.com (М. Каинг), 4nansi4@mail.ru (А. В. Ткачева).

трудности и даже проблемные вопросы, связанные с приобретением необратимых деформаций материалами, находящимися в условиях термомеханических нагружений. В первую очередь это относится к неизотермическим упругопластическим процессам [3–6]. Из широкого потока современных публикаций, демонстрирующих неослабевающий интерес к проблеме упругопластического поведения материалов в условиях присутствия в них значительных температурных градиентов, укажем лишь некоторые, близкие к теме настоящей статье и посвященные как моделированию сложного отклика таких материалов на термомеханическое воздействие [7–10], так и постановке и методам решения конкретных краевых задач теории [11–20]. Необходимо заметить, что процесс в развитии термомеханики упругопластических тел и, в частности теории температурных напряжений в упругопластических телах, связан с появлением современных вычислительных возможностей [11, 13, 19, 21].

Использование кусочно-линейных пластических потенциалов (условий пластического течения) служит часто упрощению математического аппарата идеальной упругопластичности и, следовательно, улучшению расчетных алгоритмов [12, 17–20]. Но при этом возникает сложность, которую отметил еще Д. Бленд [22]. Она заключается в том, что область пластического течения в процессе деформирования может разделяться на части. В этих частях пластической области решение задачи подчинено различным системам дифференциальных уравнений в зависимости от принадлежности напряженных состояний разным граням и ребрам классической кусочно-линейной поверхности нагружения (поверхности наклонной призмы Треска в пространстве главных напряжений). На примере решения задачи о горячей посадке муфты на вал в [19] прослеживается эволюция пластической области с ее появлением, делением, исчезновением и появлением снова в качестве обратного (повторного [23]) пластического течения. Таким образом, алгоритмы решения задач теории температурных напряжений в упругопластических телах обязаны быть приспособленными к отслеживанию моментов зарождения как упругопластических границ, так и границ раздела области пластического течения на части, к указанию положений всех этих граничных поверхностей в деформируемом теле в любой рассчитываемый момент времени.

В настоящей статье на примере одной из простейших задач теории температурных напряжений о нагреве круглой пластины по центральной круговой области укажем некоторые расчетные особенности решения. Упругие модули и предел текучести материала будем считать зависими от температуры. Одной из особенностей в проведении расчетов в таком случае оказывается невозможность их проведения в рамках классического условия пластичности максимальных касательных напряжений (критерия Треска – Сен-Венана). Постановка задачи в таком случае оказывается некорректной. В то же время условие максимальных приведенных напряжений (критерий Ишлинского – Ивлева) позволяет полностью провести расчеты, как в условиях нагрева, так и в последующих условиях остывания.

1. Исходные соотношения модели. Постановка задачи.

Рассматриваются соотношения классической модели теории температурных напряжений (несвязанной теории) упругопластических тел [1, 4, 24]. В системе прямоугольных декартовых координат их можно записать в виде

$$\begin{aligned} d_{ij} &= e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}); \\ \sigma_{ij} &= (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha T_0 K \theta) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e; \\ de_{ij}^p &= d\phi \frac{\partial f(\sigma_{kl}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad d\phi > 0; \quad f(\sigma_{kl}, k) = 0; \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= a\theta_{,jj} - \chi\theta; \quad \theta = \frac{T - T_0}{T_0}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь u_i — компоненты вектора перемещений, d_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров полных деформаций и напряжений, e_{ij}^e , e_{ij}^p — обратимая (упругая) и необратимая (пластическая) составляющие полных деформаций, T , T_0 — текущая и начальная (комнатная) температуры соответственно, λ , μ , K — упругие модули: μ — модуль сдвига, $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ модуль всестороннего сжатия; α , a , χ — теплофизические постоянные: α — коэффициент линейного расширения; a — коэффициент теплопроводности, χ — коэффициент теплоотдачи от деформируемого и проводящего тепло тела в окружающую среду; $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ — уравнение поверхности нагружения в пространстве напряжений, k — предел текучести материала. В качестве поверхности нагружения (условия пластического течения) здесь будет использоваться кусочно-линейная поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ с уравнением [24, 25]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk}. \tag{2}$$

Условие пластического течения (2) называют условием максимальных приведенных напряжений или условием Ишплинского – Ивлева [25]. Наряду с условием максимальных касательных напряжений $\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k$ (условие Треска – Сен-Венана) условие Ишплинского – Ивлева является классическим кусочно-линейным условием пластического течения. С его помощью система уравнений (1) оказывается замкнутой.

Отличие от классического случая теории температурных напряжений, задаваемой зависимостями (1) и (2), когда в них λ , μ , k — постоянные величины, свяжем с зависимостью последних от температуры [26]. Такие зависимости принимаем в их простейшем виде

$$\begin{aligned} E(t) &= E_p - (E_p - E_0)\tau(t), \\ \nu(t) &= 0.5 - (0.5 - \nu_0)\tau(t), \\ \tau(T) &= \tau(t) = (T_p - T(t))(T_p - T_0)^{-1}, \\ k(\theta) &= k_0\tau^2, \\ \lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \tau = \tau(\theta) = 1 - \frac{T_0\theta}{T_p - T_0}. \end{aligned} \tag{3}$$

В (3) E_0 , ν_0 , k_0 — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и предел текучести при комнатной температуре, T_p , E_p — температура плавления металла и его модуль Юнга в таком состоянии.

Пусть круглая тонкая пластина радиусом $r = R$ нагревается так, что в ее центральной области $r \leq r_0$ температура растет по закону

$$\theta|_{r \leq r_0} = bt, \quad (4)$$

где b — задаваемая скорость нагрева. Тогда для распределения температуры по радиусу пластины поставим краевую задачу с уравнением теплопроводности, записанным в цилиндрической системе координат

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a(r\theta_{,r})_{,r} - \chi\theta \quad (5)$$

при граничных и начальных условиях

$$\theta(r_0, t) = bt; \quad \theta_{,r}(R, t) = -\chi\theta; \quad \theta(r, 0) = 0. \quad (6)$$

Краевая задача (5)–(6) имеет аналитическое решение, но удобнее ее решать численно на каждом временном шаге. Далее считаем, что распределение температуры в рассчитываемый момент времени известно (найденно решением (5), (6)).

В условиях плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) из зависимостей закона Дюамеля–Неймана (1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu u_{r,r} + 4\mu(\lambda + \mu)r^{-1}u_r - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (7) в уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (8)$$

приводит к уравнению для вычисления перемещения u_r

$$\xi u_{r,rr} + \varsigma u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0, \quad (9)$$

$$\xi = 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1},$$

$$\varsigma = 4(\mu^2\lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-1},$$

$$\omega = 2(2\mu^2\lambda_{,r} + \lambda^2\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2}r^{-1} - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-2},$$

$$\beta = -\alpha\theta T_0(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - 6K\mu\alpha T_0\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1}.$$

Уравнение (9) следует проинтегрировать при граничных условиях

$$u_r|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R} = 0, \quad [u_r]|_{r=R_0} = 0. \quad (10)$$

Последним условием, где квадратными скобками обозначено отсутствие разрыва u_r при $r = r_0$ ($[u_r(r_0, t)] = u_r(r_0^+, t) - u_r(r_0^-, t) = 0$), область деформирования разбивается на две части: $0 \leq r \leq r_0$ и $r_0 \leq r \leq R$. В области $0 \leq r \leq r_0$ температура растет со

временем, следуя (4), а в области $r_0 \leq r \leq R$ для температуры решаем задачу (5)–(6). В соответствии с этими областями для напряженно-деформированных состояний получаем также две разные задачи, в которых в первой из таких областей в каждый рассчитываемый момент времени упругие модули не зависят от пространственной координаты r ($r \leq r_0$), а во второй задаче их зависимость задается соотношениями (3).

Уравнение равновесия (9) значительно упрощается, если упругие модули считать независимыми от температуры, то есть постоянными. В таком случае

$$\xi = 1, \quad \varsigma = r^{-1}, \quad \omega = -r^{-2}, \quad \beta = -1.5K\alpha T_0 \theta_{,r} (\lambda + \mu)^{-1}. \quad (11)$$

В условиях (11) уравнение (9) интегрируется так, что в любой момент времени находим зависимость

$$u_r = 1.5\alpha K T_0 (\lambda + \mu)^{-1} r^{-1} \int_0^r \rho \theta(\rho) d\rho + 0.5r C_1(t) + r^{-1} C_2(t). \quad (12)$$

Согласно первому граничному условию из (10) $C_2(t) \equiv 0$. Для напряжений, следуя соотношениям Дюамеля–Неймана и (1.12), запишем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3\alpha\mu K T_0}{(\lambda + \mu) r^2} \int_l^r \rho \theta(\rho) d\rho + \frac{3\mu K}{(\lambda + 2\mu)} C_1(t), \\ \sigma_\varphi &= -\frac{3\alpha\mu K T_0}{(\lambda + \mu) r^2} \int_l^r \rho T(\rho) d\rho - \frac{3\alpha\mu K T_0}{\lambda + \mu} \theta(r) + \frac{3\mu K}{\lambda + 2\mu} C_1(t), \\ C_1(t) &= \frac{(\lambda + 2\mu) \alpha T_0}{(\lambda + \mu) R^2} \int_0^R \rho \theta(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (13)$$

В (13) $\theta(r)$ — распределение безразмерной температуры по пластине в рассматриваемый момент времени. В иной момент времени данное распределение будет иным, задаваемым решением температурной задачи. Поэтому σ_r и σ_φ со временем также, следуя (13), изменяются. Это изменение задается скоростью нагревания в (4).

Когда упругие модули зависят от температуры, проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение (9) возможно численно.

2. Пластическое течение.

При нагревании пластины в области $r \leq r_0$ напряжения (13) растут по величине, оставаясь отрицательными. В то же время предел текучести со временем уменьшается. В некоторый момент времени напряженное состояние с необходимостью выходит на поверхность нагружения именно в области нагрева $r \leq r_0$. Так как в этой области деформирования предел текучести не зависит от пространственной координаты, то выход на поверхность нагружения оказывается связанным с условием:

$\sigma_r = -2k$; $\sigma_\varphi = -2k$. На Рис. 1 иллюстрируется условие пластичности максимальных напряжений (внутренний шестиугольник) и условие пластичности максимальных приведенных касательных напряжений (внешний шестиугольник) в плоскости $(\sigma_r, \sigma_\varphi)$ при $\sigma_z \equiv 0$. Расчеты показывают, что пластическое течение связано с выходом

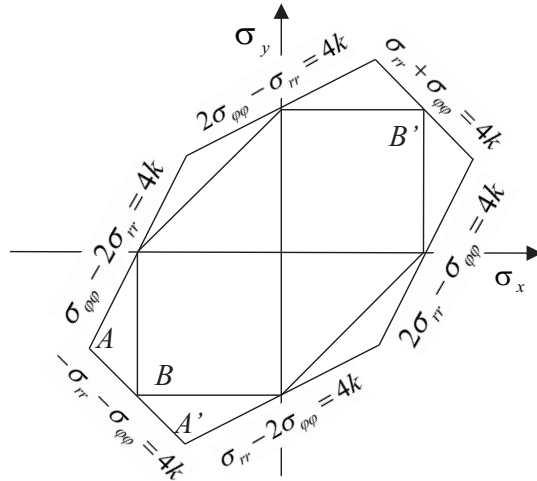


Рис. 1. Сечения девиаторной плоскости призм Ишлинского–Ивлева и Треска–Сен-Венана

дом напряжений в точке B условий пластичности как Треска–Сен-Венана, так и Ишлинского–Ивлева. В первом случае зарождается пластическая область в центре пластины, соответствующая ребру призмы Треска, то есть соответствующая состояниям полной пластичности по определению М. Леви [24, 27]. Однако в таком случае из уравнения равновесия (8) непосредственно следует, что $\sigma_{r,r} = 0$, что в условиях зависимости предела текучести от температуры и, следовательно, от пространственной переменной r невозможно. Желая использовать кусочно-линейные поверхности нагружения остается принять в дальнейшем условие максимальных приведенных касательных напряжений (условие Ишлинского–Ивлева). Иначе решения задачи в условиях пластического течения Треска–Сен-Венана при зависимости предела текучести от температуры не существует, в то время как в условиях пластического течения Ишлинского–Ивлева имеется возможность дальнейших построений. Последние связаны с выполнением условия пластического течения максимальных приведенных касательных напряжений на грани призмы Ивлева, сечение которой плоскостью $\sigma_z = 0$ представляется отрезком прямой AA' на рис. 1, то есть условие пластического течения выполняется в форме: $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$. Принимая такое условие, получаем, что область пластического течения, зарождающаяся в центре пластины, развивается посредством продвигающейся упругопластической границы $r = n(t)$ и в

текущий момент времени имеет размеры $0 \leq r \leq n(t)$. В этой области

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6K\mu\alpha T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следуя ассоциированному закону пластического течения на грани $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$ призмы Ивлева, находим

$$e_r^p = e_\varphi^p = \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} + u_{r,r} \right) - \frac{\lambda + 2\mu}{3\mu K} k - \alpha T_0 \theta. \quad (15)$$

Учитывая (14) и (15), уравнение равновесия (8) записываем в форме (9), где

$$\xi = \mu, \quad \zeta = \mu r^{-1} + \mu_{,r}, \quad \omega = -\mu r^{-2} - \mu_{,r}r, \quad \beta = -2k_{,r}. \quad (16)$$

При не зависящих от температуры упругих модулях уравнение равновесия интегрируется так, что для u_r и σ_r получаем аналитические зависимости

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{2}{\mu r} \int_0^r \rho k(\rho) d\rho - \frac{1}{2\mu r} C_3 - r C_4(t), \\ \sigma_r &= r^{-2} \int_0^r \rho k(\rho) d\rho + r^{-2} C_3(t). \end{aligned} \quad (17)$$

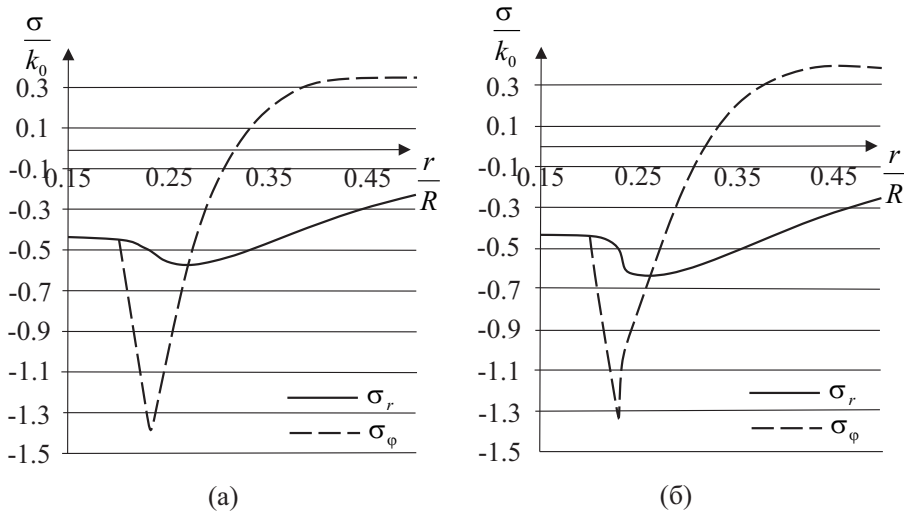


Рис. 2. Распределение напряжений в материале пластины: а) при постоянных упругих модулях; б) в случае зависимости упругих модулей от температуры

В каждый рассчитываемый момент времени значения функций $C_3(t)$, $C_4(t)$ в (17) вместе с пересчитываемыми значениями функций $C_1(t)$ и $C_2(t)$ из (12) и (13) определяются при выполнении граничных условий (10) и условий на продвигающейся упругопластической границе $r = n(t)$. К последним относятся условия непрерывности u_r и σ_r при $r = n(t)$. Положение упругопластической границы в этот же момент времени также включается в число неизвестных с добавлением в алгебраическую систему уравнений еще и условия начала пластического течения. Когда упругие модули λ и μ зависят от температуры, уравнения равновесия приходится разрешать численно с теми же граничными условиями. Такая задача не содержит дополнительных трудностей. На рис. 2 представлено распределение безразмерных, отнесенных к k_0 напряжений. В обоих случаях: а) – упругие модули постоянны; б) – упругие модули зависят от температуры согласно (3). При этом принято, что пластина алюминивая $r_0 = 0.2R$, $E_0 = 72$ МПа и $\nu = 0.3$, $k_0 = 210$ МПа. Рисунок выделен интервал изменения r/R , где распределение напряжений наиболее информативно.

3. Остывание и разгрузка

Вслед за моментом отвода источника нагревания от пластины начинается процесс ее остывания и разгрузки. В центре пластины зарождается и продвигается далее по материалу разгружающая упругопластическая граница $r = m(t)$. В области $m(t) \leq r \leq n(t)$ продолжается пластическое течение в соответствии с напряженным состоянием ребра призмы Ивлева $\sigma_r + \sigma_\varphi = -4k$, а в области $0 \leq r \leq m(t)$ материал продолжает деформироваться, но теперь уже обратимо. При не зависящих от температуры упругих модулях в области продолжающегося течения справедливы зависимости (17), если в них в качестве нижнего предела интегрирования считать не ноль, а $m(t)$. Это же обстоятельство следует учитывать при численном интегрировании уравнения равновесия в случае, когда упругие модули зависят от температуры. Обратимое деформирование в области $0 \leq r \leq m(t)$ происходит в условиях присутствия в ней накопленных необратимых деформаций. Соотношение закона Дюамеля – Неймана теперь следует записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\alpha K\mu T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\alpha K\mu T_0\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

В (18) $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ – накопленные и далее не изменяющиеся необратимые (пластические) деформации. Это деформации $e_r^p(r, t)$ и $e_\varphi^p(r, t)$, в которых время фиксировано моментом прихода в точку с пространственной координатой r разгружающей упругопластической границы $r = m(t)$. Уравнение равновесия (8) в этом случае пе-

реписывается в форме (9), где

$$\begin{aligned}\xi &= 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= 4(\mu^2\lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-1}, \\ \omega &= 2(2\mu^2\lambda_{,r} + \lambda^2\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2}r^{-1} - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-2}, \\ \beta &= -\alpha T_0\theta(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - 6\alpha T_0 K\mu\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1} - \\ &\quad - 0.5(\lambda + 2\mu)(r(\lambda + \mu))^{-1}(p_\varphi - p_r) - p_{r,r} - 0.5\lambda(\lambda + \mu)^{-1}p_{\varphi,r}.\end{aligned}\quad (19)$$

Решение дифференциального уравнения (9) с коэффициентами (19) получалось на каждом временном шаге расчетов численно с использованием граничных условий и условий на упругопластической границе $r = m(t)$. При этом отслеживалось положение упругопластической границы в рассчитываемый последовательными шагами рассматриваемый момент времени. Расчеты значительно упрощаются, если при записи (9), исходя из (18), не учитывать зависимость упругих модулей от температуры. В этом случае коэффициенты оказываются равными:

$$\begin{aligned}\xi &= 1, \quad \varsigma = r^{-1}, \quad \omega = -r^{-2}, \\ \beta &= -\alpha T_0\theta(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - \\ &\quad - 6K\mu\alpha T_0\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1} - p_{r,r} - 0.5\lambda(\lambda + \mu)^{-1}p_{\varphi,r} - \\ &\quad - 0.5(\lambda + 2\mu)(r(\lambda + \mu))^{-1}(p_\varphi - p_r).\end{aligned}\quad (20)$$

Следствием интегрирования (9), где коэффициенты представлены зависимостями (20), являются соотношения

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{3K\alpha T_0}{2(\lambda + \mu)r} \int_0^r \rho\theta(\rho) d\rho + \frac{r(\lambda + 2\mu)}{4(\lambda + \mu)} \int_0^r \rho^{-1}(p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho + \\ &\quad + \frac{3K}{4(\lambda + \mu)r} \int_0^r \rho(p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho + 0.5rC_5(t) + r^{-1}C_6(t), \\ \sigma_r &= -\frac{3\alpha T_0\mu K}{(\lambda + \mu)r^2} \int_0^r \rho\theta(\rho) d\rho - \frac{3\mu K}{2(\lambda + \mu)r^2} \int_0^r \rho(p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho + \\ &\quad + \frac{3\mu K}{2(\lambda + \mu)} \int_0^r \rho^{-1}(p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho + \frac{3\mu K}{\lambda + 2\mu} C_5(t) - \frac{2\mu}{r^2} C_6(t), \\ \sigma_\varphi &= \frac{3\alpha T_0 K\mu}{(\lambda + \mu)r^2} \int_0^r \rho\theta(\rho) d\rho - \frac{3\alpha\mu K T_0}{\lambda + \mu} \theta + \\ &\quad + \frac{3\mu K}{2(\lambda + \mu)r^2} \int_0^r \rho(p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho + \frac{3\mu K}{2(\lambda + \mu)} \int_0^r \rho^{-1}(p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho - \\ &\quad - \frac{3K}{(\lambda + \mu)} p_r + \frac{3\mu K}{\lambda + 2\mu} C_5(t) + \frac{2\mu}{r^2} C_6(t).\end{aligned}\quad (21)$$

Значения функций $C_1(t) \dots C_6(t)$ в рассчитываемый момент времени определяются согласно краевым условиям (10), условиям непрерывности u_r и σ_r на упругопластических границах $r=n(t)$ и $r=m(t)$. К такой системе алгоритмических уравнений с целью определения положения упругопластических границ следует добавить условия начала (на $r=n(t)$) и завершения (на $r=m(t)$) упругопластических течений.

Проводя последовательными шагами по времени согласно выписанным зависимостям для перемещения u_r и напряжений σ_r и σ_φ ($\sigma_z \equiv 0$) замечаем, что разгружающая упругопластическая граница $r=m(t)$, продвигаясь быстрее нагружающей $r=n(t)$, в некоторый момент времени $t=t_*$ догоняет последнюю: $m(t_*)=n(t_*)$. С этого момента времени $t=t_*$ вся область $0 \leq r \leq n(t_*)$ будет деформироваться обратимо, но в отличие от области пластины $n(t_*) \leq r \leq R$ в ней будут присутствовать, не изменяясь, накопленные необратимые деформации $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$. Иначе, при постоянных упругих модулях в области $0 \leq r \leq n(t_*)$ следует в расчетах пользоваться зависимостями (21), а не зависимостями (12) и (13) справедливых в области $n(t_*) \leq r \leq R$ при нижнем пределе в интегралах равным $n(t_*)$. Такие расчеты заканчиваются при полном остывании пластины до комнатной температуры T_0 , и формируется в пластине поле остаточных напряжений и деформаций.

4. Повторное (обратное) пластическое течение

При достаточно высокой температуре нагрева, продолжая расчет обратимого деформирования пластины, можно обнаружить, что на некоторой линии $r=r_* \cong n(t_*)$ в материале пластины будет выполнено условие пластического течения, соответствующее стороне $2\sigma_\varphi - \sigma_r = -4k$ внешнего шестиугольника (рис. 1). Зародившееся пластическое течение будет развиваться посредством двух упругопластических границ, движущихся в разные стороны: $r=r_* - h(t)$ и $r=r_* + g(t)$. Соотношения закона Дюамеля – Неймана в пластической области $r_* - h(t) \leq r \leq r_*$ теперь следует записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p - p_r))(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\ &+ (2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - 6\alpha T_0 K \mu \theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p - p_r))(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\ &+ (4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p - p_\varphi) - 6\alpha T_0 K \mu \theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

В пластической области $r_* \leq r \leq n(t_*) + g(t)$, где отсутствуют приобретенные ранее необратимые деформации в зависимостях, для напряжений (22) следует положить $p_r(r)$ и $p_\varphi(r)$ равными нулю. Для новых изменяющихся пластических деформаций, следуя ассоциированному закону пластического течения, найдем

$$\begin{aligned} e_r^p &= -0.5e_\varphi^p = \left(\mu(6\lambda + 10\mu)^{-1} - 0.5 \right) (p_\varphi - r^{-1}u_r) + \\ &+ \mu(3\lambda + 5\mu)^{-1}(u_{r,r} - p_r) - (\lambda + 2\mu)\mu^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}k + 1.5\alpha T_0 K(3\lambda + 5\mu)^{-1}\theta. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя (22) и (23), уравнение равновесия снова можно записать в форме (9). При постоянных упругих модулях для коэффициентов обыкновенного дифферен-

циального уравнения (9) получим зависимости

$$\xi = 1, \quad \zeta = r^{-1}, \quad \omega = -0.25r^{-2},$$

$$\beta = -\frac{3}{2}K\alpha T_0\theta_{,r} - \frac{3}{4(\lambda+\mu)}\alpha T_0\theta + \frac{1}{3K}k + \frac{\lambda+\mu}{2\mu Kr}k - \left(p_{r,r} + \frac{1}{2r}p_r\right) - \frac{1}{2}\left(p_{\varphi,r} + \frac{1}{2r}p_\varphi\right).$$

С учетом этого в каждый момент времени получаем зависимости для перемещений, напряжений и необратимых деформаций в качестве следствия проинтегрированного уравнения равновесия

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{r}} \int_{h(t)}^r \sqrt{r} (p_r(\rho) + 0.5p_\varphi(\rho)) d\rho - \frac{\sqrt{r}(3\lambda + 5\mu)}{3\mu K} \int_{h(t)}^r \rho^{-0.5}k(\rho)d\rho +$$

$$+ \frac{3\lambda + 4\mu}{3\mu K\sqrt{r}} \int_{h(t)}^r \rho^{0.5}k(\rho)d\rho + \frac{3}{2\sqrt{r}} \int_{h(t)}^r \rho^{0.5}\theta(\rho)d\rho +$$

$$+ \frac{\sqrt{r}(3\lambda + 5\mu)}{12\mu K}C_7(t) - \frac{C_8(t)}{\sqrt{r}},$$

$$e_r^p = -\frac{1}{2}e_\varphi^p = \frac{1}{2}p_\varphi - \frac{1}{2\sqrt{r^3}} \int_{h(t)}^r \sqrt{\rho} \left(p_r(\rho) + \frac{1}{2}p_\varphi(\rho) \right) d\rho + \frac{3(\lambda + \mu)}{\mu K}k + \frac{\alpha T_0}{2}\theta +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{2\mu K\sqrt{r}} \int_{h(t)}^r \rho^{-0.5}k(\rho)d\rho - \frac{3\lambda + 4\mu}{6\mu K\sqrt{r^3}} \int_{h(t)}^r \rho^{0.5}k(\rho)d\rho + \frac{C_8(t)}{2\sqrt{r^3}} - \frac{\lambda + \mu}{8\mu K\sqrt{r}}C_7(t),$$

$$\sigma_r = -\frac{2}{\sqrt{r}} \int_{h(t)}^r \sqrt{\rho}k(\rho) d\rho + \frac{C_7(t)}{\sqrt{r}}.$$

Зависимости (24) помогают расчетам температурных напряжений без дискретизации области пластического течения. Расчет проводится последовательными шагами по времени. Значения функций $C_7(t)$ и $C_8(t)$ вместе с перерасчетом других подобных, определяются при удовлетворении граничным условиям и условиям на упругопластических границах $r = r_* - h(t)$ и $r = r_* + g(t)$. При этом на каждом шаге расчетов определяется положение этих границ. Алгоритмически также проводятся расчеты в случае, когда упругие модули зависят от температуры, когда уравнение равновесия приходится интегрировать численно. Следует отметить, что в последнем случае для возникновения повторного пластического течения требуется значительно более высокий нагрев пластины.

5. Расчет итоговых остаточных напряжений

По мере остывания пластины продвижение упругопластических границ $r = r_* - h(t)$ и $r = r_* + g(t)$ замедляется, и наступает момент времени, когда они останавливаются. После этого практически мгновенно в области пластического течения

материал переходит в обратимое (термоупругое) деформирование. Его отличие от рассмотренного ранее (зависимости (21)) заключается лишь в том, что следует учитывать изменения в необратимых деформациях, вызываемые повторным пластическим течением. Следовательно, область, где произошло последнее, обязательно следует рассчитывать отдельно от области, где пластического течения не было. Иначе изменяются в (21) и подынтегральные функции, и пределы интегрирования с опорой на границы данной области.

Процесс деформирования завершается, когда во всей пластине $\theta \equiv 0$, но в материале будут оставаться деформации как обратимые, так и необратимые. Последние определяют напряжение в материале пластины, называемое остаточным напряжением [5, 6]. Напряжения будут удовлетворять уравнению равновесия пластины при однородных краевых условиях. Это уравнение также можно записать в форме (9), если положить коэффициенты в нем такими же, как и в (20), учитывая, что $\theta \equiv 0$. Только следует учитывать, что p_r и p_φ вычисляются по-разному для областей, где было повторное течение и где его не происходило, а также вычислены они с учетом зависимости упругих модулей от температуры или полагались упругие модули постоянными. Интегрируя уравнение равновесия с принятыми оговорками относительно его коэффициентов, получаем окончательное распределение u_r , σ_r , σ_φ по пластине

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{4(\lambda + \mu)} r \Phi(r) + \frac{3K}{4(\lambda + \mu)r} \Psi(r) + 0.5rC_1, \\ \sigma_r &= \frac{3K\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\Phi(r) + \frac{1}{r^2} \Psi(r) \right) + \frac{3K\mu}{\lambda + 2\mu} C_1, \\ \sigma_\varphi &= \frac{3K\mu}{2(\lambda + \mu)} \left(\Phi(r) + \frac{1}{r^2} \Psi(r) + 2p_\varphi \right) + \frac{3K\mu}{\lambda + 2\mu} C_1, \\ C_1 &= \frac{2(\lambda + 2\mu)R^2}{(\lambda + \mu)} (\Psi(R) - R^2\Phi(R)), \\ \Phi(r) &= \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho, \quad \Psi(r) = \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho. \end{aligned}$$

Рисунок (рис. 3) иллюстрирует распределения безразмерных остаточных напряжений в области пластины, где они значительны и изменчивы с r . Сравнение двух рассмотренных случаев распределения напряжений по материалу пластины показано на рисунках 3 а) и 3 б). На рис. 3 а) изображено распределение напряжений при постоянных упругих модулях. На рис. 3 б) в случае зависимости упругих модулей от температуры. Рисунок (4) показывает такие же распределения остаточных деформаций. В расчетах принималась алюминиевая пластина с пятном нагревания $r_0 = 0.2R$ и постоянными $\nu_0 = 0.3$, $E_0 = 72$ МПа, $T_{\max} = 500^\circ\text{C}$, $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

6. Заключение

Главный вывод из результатов проделанного состоит в том, что использование классических кусочно-линейных пластических потенциалов в расчетах неустановив-

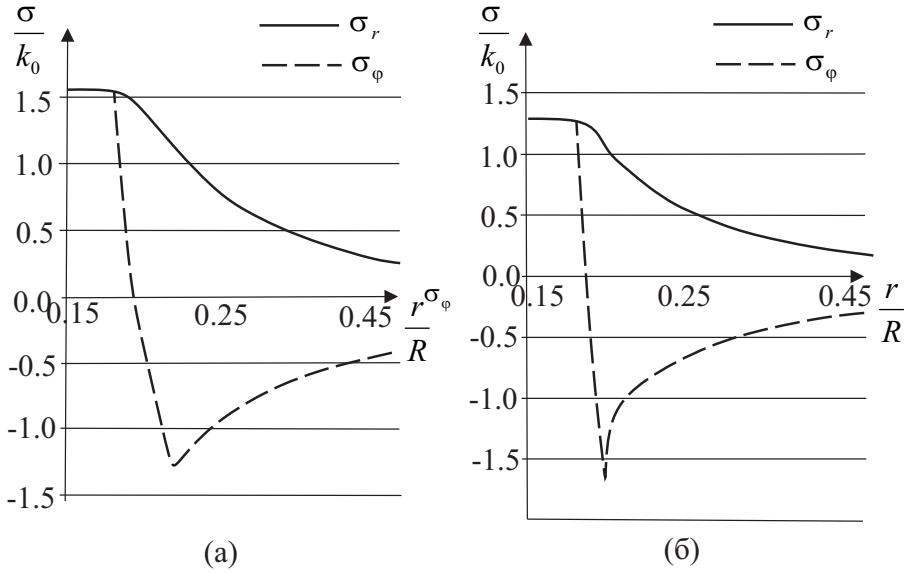


Рис. 3. Остаточные напряжения в материале пластины: а) при постоянных упругих модулях; б) в случае зависимости упругих модулей от температуры

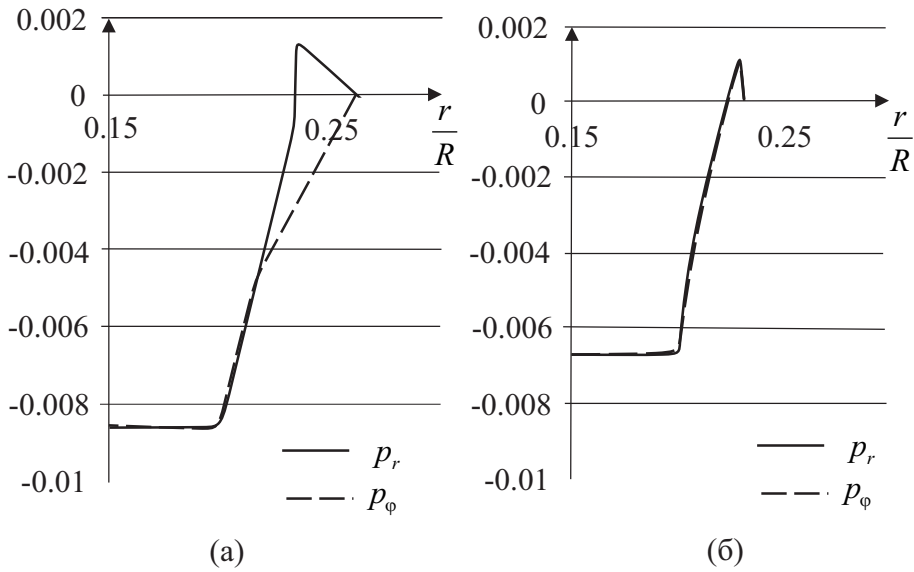


Рис. 4. Распределение необратимых деформаций в материале пластины: а) при постоянных упругих модулях; б) в случае зависимости упругих модулей от температуры

шихся температурных напряжений позволяет в ряде случаев обойтись без дискретизации областей пластического течения. Таким способом удастся избежать приближенных методов, опирающихся именно на дискретизацию расчетных областей, таких как конечно-разностные или конечно-элементные представления, даже в случае принимаемой зависимости предела текучести и упругих модулей от температуры. При этом моменты и места зарождения пластических течений, закономерности продвижения упругопластических границ, смены режимов пластических течений с делением области необратимого деформирования на части органично вписываются в алгоритм расчетов плоских напряженных состояний, выступающих в качестве следствия изменяющегося температурного поля. В расчетах с гладкими условиями пластичности (например, с условием Мизеса [24, 25]) и, следовательно, с необходимой дискретизацией расчетных областей отслеживание моментов и мест возникновения необратимого деформирования, особенностей продвижения границ, разделяющих расчетную область на части, оказывается главной алгоритмической трудностью [8, 11, 21], которой удастся избежать при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов, к их числу относятся условия пластического течения Треска – Сен-Венана и Ишлинского – Ивлева.

Замечено, что есть задачи теории температурных напряжений в упругопластических телах, сама постановка которых в рамках принятия классического условия пластичности максимальных касательных напряжений Треска-Сен-Венана оказывается некорректной. Примером такой краевой задачи теории является задача, рассмотренная здесь. Но если в качестве условия пластического течения принять условие максимальных приведенных напряжений Ишлинского – Ивлева, данная задача благополучно разрешается.

Впервые в задачах теории температурных напряжений в упругопластических телах рассмотрен случай зависимости от температуры не только предела текучести [12, 16–20], но и упругих модулей. Проведенное сравнение (см. графики рис. 2–рис. 4) показывает, что в распределении температурных напряжений такой учет сказывается незначительно. Существенно не влияет он и на качественные особенности расчетов. Отметим можно, что в таком случае существенно медленнее происходит разгрузка материала пластины после его пластического течения, более длительное время существует область пластического течения и, наоборот, существенно позже возникает область повторного пластического течения и только при значительном нагреве. В то же время зависимость предела текучести от температуры задает качественный характер необратимого деформирования, что отмечалось и ранее [17–20]. Следует заметить, что в окрестности интенсивного теплового воздействия наблюдаются структурные изменения в материале, включая твердотельные фазовые переходы [28]. С точки зрения упругопластичности это связывается отчасти с изменением именно упругих модулей. Для более точного и тонкого учета подобных эффектов следует, по-видимому, более тщательно подходить к формированию зависимости (3) и, что может оказаться более существенным, не учитывать зависимости упругих модулей от температуры в процессах разгрузки и остывания. Таким способом измененными в результате локального теплового воздействия (например, в окрестности сварочного шва) окажутся прочностные характеристики материала.

Список литературы

- [1] Б. Боли, Дж. Уэйнер, *Теория температурных напряжений*, Мир, М., 1964.
- [2] Г. Паркус, *Неустановившиеся температурные напряжения*, Мир, М., 1969.
- [3] P. Perzyna, A. Sawczuk, "Problems of thermoplasticity", *Nuclear engineering and design.*, 1979, 94–201.
- [4] Ю.Н. Шевченко, *Термопластичность при переменных нагружениях*, Нукова думка, Киев, 1970.
- [5] А. А. Поздеев, Ю. И. Няшин, П. В. Трусов, *Остаточные напряжения: теория и приложения*, Наука, М., 1982.
- [6] А. А. Буренин, Л. В. Ковтанюк, *Большие необратимые деформации и упругое последствие*, Дальнаука, Владивосток, 2013.
- [7] J. L. Chaboche, "Thermodynamically based viscoplastic constitutive equation: theory versus experiment", *ASME Winter Annual Meeting*, 1991, 1–20.
- [8] N. Ohno, J. Wang, "Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions", *Int. J. Plasticity.*, **7**, (1992), 879–891.
- [9] Л. В. Ковтанюк, "Моделирование больших упругопластических деформаций в неизо-термическом случае", *Дальневост. мат. журнал.*, **5**:1, (2004), 110–120.
- [10] В. С. Бондарь, В. В. Даншин, А. А. Кондратенко, "Вариант теории термопластичности", *Вестник ПНИПУ. Серия «Механика»*, **2**, (2015), 21–35.
- [11] U. Gamer, "A concise treatment of the shrink fit with elastic plastic hub", *Int. J. Solids. Struct.*, **29**, (1992), 2463–2469.
- [12] W. Mack, "Thermal assembly of an elastic–plastic hub and a solid shaft", *Arch. Appl. Mech.*, **63**, (1993), 42–50.
- [13] A. Kovacs, "Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits Periodica Polytechnica", *Ser. Mech. Eng.*, **40**:2, (1996), 103–112.
- [14] С. Е. Александров, Н. Н. Чиканова, "Упругопластическое напряженно-деформированное состояние в пластине с запрессованным включением под действием температурного поля", *Изв. РАН МТТ*, 2000, № 4, 149–158.
- [15] С. Е. Александров, Е. В. Ломакин, Й.–Р. Дзенг, "Решение термоупругопластической задачи для тонкого диска из пластически сжимаемого материала, подверженного термическому нагружению", *ДАН*, **443**:3, (2012), 310–312.
- [16] С. Е. Александров, Е. А. Лямина, О. В. Новожилова, "Влияние зависимости предела текучести от температуры на напряженное состояние в тонком полом диске", *Проблемы машиностроения и надежность машин*, 2013, № 3, 43–48.
- [17] Е. П. Дац, А. В. Ткачева, Р. В. Шпорт, "Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки", *Вестник ЧПУ им. И. Я. Яковлева, серия: механика предельного состояния*, 2014, № 4(22), 204–213.
- [18] Е. П. Дац, А. В. Ткачева, "Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений", *ПМТФ*, **57**:3 (337), (2016), 208–216.
- [19] А. А. Буренин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк, "К расчету неустоявшихся температурных напряжений в упругопластических телах", *Вычислительная механика сплошных сред*, **10**:3, (2017), 245–259.
- [20] Е. П. Дац, Е. В. Мурашкин, А. В. Ткачева, Г. А. Щербатюк, "Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности", *Механика твердого тела*, **1**, (2018), 32–43.

- [21] Ю. Н. Шевченко, П. А. Стеблянко, А. Д. Петров, “Численные методы в нестационарных задачах теории термопластичности”, *Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций*, **22**, (2014), 250–264.
- [22] D. R. Bland, “Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients”, *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, **4**, (1956), 209–229.
- [23] А. А. Буренин, Л. В. Ковтаниук, М. В. Полоник, “Возможность повторного пластического течения при общей разгрузки упругопластической среды”, *ДАН*, **375**:6, (2000), 767–769.
- [24] Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев, *Теория пластичности*, Дальнаука, Владивосток, 1998.
- [25] А. Ю. Ишлинский, Д. Д. Ивлев, *Математическая теория пластичности*, Физматлит, М., 2001.
- [26] А. Надаи, *Пластичность и разрушение твердых тел.*, т. 2, Мир, М., 1969.
- [27] М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Наука, М., 1990.

Поступила в редакцию
20 мая 2018 г.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00.

Burenin A. A., Kaing V., Tkacheva A. V. To the calculation of plane stressed states of the theory of unsteady temperature stresses in elastoplastic bodies. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. V. 18. No 2. P. 131–146.

ABSTRACT

On the example of the solution of the boundary value problem of the theory of temperature stresses about local heating and subsequent cooling of a circular plate made of elastoplastic material, the calculations of unsteady temperature stresses are compared either with or without allowance for the dependence of elastic moduli on temperature. It is shown that under the conditions of the dependence of the yield stress on temperature, the problem of calculating the planar temperature stresses under the condition of plastic flow of maximum tangential stresses turns out to be incorrect in its formulation, but it has a solution when using the conditions of the maximal reduced tangential stresses in the formulation and calculations. The conditions for the appearance of repeated plastic currents are noted and residual stresses are calculated.

Key words: *functional equations, theta functions, Weierstrass sigma-function, nonlinear sequences.*