Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 150–176

УДК 539.3 514
MSC2010 74A05 53B50

© А. И. Гудименко[1]

Геометрические формулировки законов сохранения континуальной механики

Предлагаются формулировки законов баланса классической континуальной механики в терминах дифференциальных форм (баланс массы) и векторнозначных дифференциальных форм (балансы количества движения и энергии) на траектории материального континуума. Традиционные формулировки законов получаются как следствие предложенных формулировок. Уравнения балансов записываются в форме, пригодной для произвольного наблюдателя. Из предложенных формулировок выводится формулировка уравнения движения идеальной жидкости в терминах дифференциальных форм.

Ключевые слова: *законы сохранения, векторнозначные формы, системы отсчета.*

Введение

Одним из центральных аспектов формулирования континуальной механики является представление ее уравнений в геометрической, то есть свободной от координат, форме. Такое представление используется в задачах, где естественными являются криволинейные, в общем случае зависящие от времени, координаты. Но более важно то, что оно приводит к выделению геометрических объектов, существенных для описываемых явлений, и открывает тем самым возможности для модификации теории этих явлений. Например, континуальную теорию дефектов можно рассматривать как модель координатно инвариантной классической континуальной механики (см., например, [1–3]).

Векторнозначные формы. Исторически первым и наиболее используемым геометрическим формализмом континуальной механики является классическое тензорное исчисление, в рамках которого выражаются все кинематические и кинетические величины этой теории, формулируются ее законы и соотношения. Однако этот формализм не всегда адекватен природе описываемых им объектов и явлений. Хорошо известный пример — классическое электромагнитное поле, которое более естественно описывается в терминах исчисления внешних дифференциальных

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, Владивосток, Суханова, 8. Электронная почта: gudimenko@iam.dvo.ru

форм. Это исчисление расширяет возможности классического тензорного исчисления введением операций внутреннего умножения, внешнего произведения и внешнего дифференцирования форм.

Нерелятивистская континуальная механика также оперирует объектами, структура которых плохо выражается в терминах классического тензорного исчисления. Например, сила в континуальной механике естественным образом ассоциирована не с точкой приложения (как в механике материальной точки), но с элементом объема (поверхности и т. д.) в этой точке. Геометрически это означает, что силовое поле — это векторнозначная дифференциальная форма. Исчисление таких форм расширяет классическое тензорное исчисление введением операций внешнего умножения обычных форм на векторнозначные и ковариантного внешнего дифференцирования векторнозначных форм. В отдельных случаях над такими формами определена также операция внутреннего умножения.

Формализм векторнозначных форм (то есть форм, принимающих значения в векторных расслоениях, [4]) стал использоваться в нерелятивистской континуальной механике значительно позже тензорного исчисления и более или менее систематически — сравнительно недавно. Его применение ассоциируется с теорией дефектов [5,6], теорией растущих тел [7], но главным образом — с вопросами по основаниям механики [8–13].

Траектория, пространство-время и наблюдатели. Можно выделить два подхода к формулированию классической нерелятивистской континуальной механики. Первый основывается на понятии тела, и все кинематические и кинетические величины определяются на теле или его конфигурации в пространстве, которое считается фиксированным (абсолютным). Понятие движения (мировой трубки тела) вводится позже как семейство вложений тела в пространство. Второй подход основывается на понятии мирового континуума. Физические величины определяются на этом континууме или на его вложении (называемом траекторией) в пространство-время. Понятие тела является производным. В настоящей работе используется второй подход.

В рамках второго подхода естественным образом вводится понятие наблюдателя (системы отсчета), и рассматриваемые теории автоматически оказываются ковариантными в том смысле, что допускают формулирование для произвольного наблюдателя. Оговоримся, что такое понимание ковариантности не исключает того факта, что динамические величины теории определяются в инерциальной системе отсчета. Второй подход является естественным в теориях, где тело как многообразие не фиксировано, например — в теории объемного и поверхностного роста [7, 14].

Мировой континуум, пространство-время и траектория объединяются под общим понятием мира событий. Следуя [15, 16], под миром событий мы понимаем произвольное расслоение над вещественной прямой $\mathbb{R}$, интерпретируемой как абсолютное время. Физическое пространство в таком формализме носит относительный характер и определяется выбором наблюдателя. Под наблюдателем понимают одну из следующих эквивалентных конструкций на мире событий: нелинейную связность [4], мировую скорость [17] или класс систем координат, преобразующихся независимым от времени образом. В настоящей работе наблюдатель ассоциируется с мировой скоростью.

Первому подходу соответствует пространство-время как декартово произведение пространства на ось времени. Геометрические объекты определяются на пространстве. Время выступает как параметр. Пространство-времена первого подхода называют ньютоновым, второго — лейбницевым пространством-временем [18].

Законы сохранения. Динамическую основу классической континуальной механики составляют законы сохранения, или баланса, физических величин, таких как масса, количество движения и энергия. Традиционно эти законы формулировались в терминах классического тензорного исчисления, причем как для ньютонова, так и для лейбницева пространств-времен. С различными такими формулировками можно познакомиться по работам [17, 19, 20]. Недавний интерес к тензорной форме записи законов сохранения связан с поиском формулировок, удобных для рассматриваемых задач и инвариантных относительно зависящих от времени координатных преобразований (иначе говоря — пригодных для любого подвижного наблюдателя) [21–24]. Итогом этих исследований является более четкая формализация концепции перехода к произвольному наблюдателю.

Формулировкам балансов количества движения и энергии в терминах векторнозначных форм посвящен ряд работ, из которых наиболее характерными являются [5, 8, 11, 12]. В работе [8] формы определяются на конфигурации тела (то есть время — параметр, пространство-время — ньютоново) и принимают значения в касательном к этой конфигурации расслоении. Это исследование обобщается в статье [12], где формы принимают значение также в кокасательном расслоении. Необходимость такого обобщения связана с известной дуальностью представления физических величин в механике, обусловленной наличием метрики. Отметим, что, с точки зрения ньютонова мира событий как расслоения над $\mathbb{R}$, касательные и кокасательные к конфигурации расслоения являются вертикальными расслоениями. При этом если вертикальное касательное к миру событий расслоение является тензорным расслоением над этим миром событий (как подрасслоение касательного расслоения), то дуальное к нему расслоение таковым не является.

В работе [5] уравнения баланса (правда, в присутствии дефектов) записываются в четырехмерном формализме, но с ограничением декартовыми координатами. Общий случай, когда векторнозначные формы определяются на мире событий как расслоении над $\mathbb{R}$, то есть когда время — координата, а не параметр, рассматривается в [11]. В этой статье формы принимают значения в вертикальном касательном к траектории расслоении.

Обзор работы. В настоящей работе законы балансов классической нерелятивистской континуальной механики формулируются в терминах дифференциальных форм, определенных на траектории. Баланс массы представляется обычными формами, балансы количества движения — формами со значениями в касательном, вертикальном касательном и дуальных к последнему расслоениях над траекторией. В формулировке баланса энергии участвуют формы со значениями в вертикальном касательном к траектории расслоении. Термин «дуальность» мы понимаем несколько шире обычного и относим к числу дуальных к вертикальному касательному расслоению, помимо собственно дуального расслоения, также и изоморфное ему специальное подрасслоение внешнего произведения кокасательного расслоения на себя. Это специальное подрасслоение является тензорным расслоением над траекторией.

В работе рассматриваются также традиционные (тензорные) формулировки законов сохранения на траектории. Новым является то, что эти формулировки выводятся из формулировок в терминах векторнозначных форм.

Все формулировки записываются как по отношению к инерциальному, так и по отношению к произвольному наблюдателю на пространстве-времени. При этом, следуя [17] и [21], мы выделяем два подхода к представлению уравнений баланса для произвольного наблюдателя. Результаты работы [21] мы получаем как простое следствие предложенных формулировок.

Предлагается также формулировка в терминах касательнозначных форм баланса массы – количества движения [17]. Напомним, что баланс этой величины представляется в форме, не зависящей от инерциального наблюдателя (как баланс массы и в противоположность балансу количества движения).

В качестве приложения формулировок баланса количества движения в терминах форм, принимающих значения в указанных выше дуальных расслоениях, уравнение движения идеальной жидкости записывается в терминах обычных форм на траектории.

Отметим, что в настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением дифференциальных формулировок законов сохранения.

Работа состоит из четырех основных разделов. В разделе 1 собраны необходимые сведения из дифференциальной геометрии и обсуждается наше понимание кинематики материального континуума. Последующие разделы 2, 3 и 4 посвящены формулировкам балансов массы, количества движения и энергии соответственно.

1. Предварительные сведения

1.1. Дифференциальная геометрия

В работе используется традиционный аппарат теории расслоений и теории связностей на векторных расслоениях в объеме, не выходящем за рамки начальных понятий и утверждений. Все необходимые сведения содержатся в книгах [25–28]. В данном разделе для ориентации читателя, для ссылок и фиксации обозначений приводятся некоторые базисные факты теории линейных связностей. В конце раздела указано правило расстановки скобок в сложных формулах.

Для произвольного векторного расслоения $Y \to X$ через $\Gamma(Y)$ мы обозначаем модуль его сечений. В частности, $\Gamma(TX)$ — множество всех векторных полей на X, $\Gamma(\bigwedge^p T^*X)$ — множество всех дифференциальных p-форм на X и $\Gamma(\bigwedge^p T^*X \otimes Y)$ — множество всех Y-значных p-форм на X.

Связность на векторном расслоении $Y \to X$ — это произвольное линейное отображение $\nabla\colon \Gamma(Y) \to \Gamma(T^*X \otimes Y)$ такое, что

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \tag{1}$$

для всех $f \in C^{\infty}(X)$ и $s \in \Gamma(Y)$.

Ковариантная производная вдоль векторного поля $u \in \Gamma(TX)$, ассоциированная со связностью ∇, — это отображение $\nabla_u \colon \Gamma(Y) \to \Gamma(Y)$, определенное условием $\nabla_u s = u \rfloor \nabla s$, где $u \rfloor$ — внутреннее умножение векторнозначных форм на u.

Подробнее об использовании операции внутреннего умножения векторнозначных форм можно узнать из книг [25, 29].

Утверждение 1. 1) *Для каждой связности ∇ на векторном расслоении $Y \to X$ существует единственная связность на дуальном расслоении $Y^* \to X$, также обозначаемая ∇, такая, что*

$$u(\sigma(s)) = \sigma(\nabla_u s) + (\nabla_u \sigma)(s) \tag{2}$$

для всех $s \in \Gamma(Y)$, $\sigma \in \Gamma(Y^*)$ и $u \in \Gamma(TX)$.

2) *Для каждой связности ∇^i на векторном расслоении $Y^i \to X$, $i = 1,2$, существует единственная связность ∇ на $Y^1 \otimes Y^2 \to X$ такая, что*

$$\nabla_u(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1_u s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2_u s_2 \tag{3}$$

для всех $s_i \in \Gamma(Y^i)$ и $u \in \Gamma(TX)$.

3) *Для каждой связности ∇ на векторном расслоении $Y \to X$ существует единственная связность на каждом тензорном расслоении $\bigotimes^p Y^* \otimes \bigotimes^q Y \to X$ (обозначаемая также ∇), подчиненная условиям* (2) *и* (3) *и коммутирующая с операцией свертки тензоров.*

В работе в качестве многообразия X всегда выступают расслоения над $\mathbb{R}$. В свою очередь, все расслоения над X являются тензорными расслоениями над касательным $TX \to X$ или вертикальным касательным $VX \to X$ расслоениями. Связности на этих расслоениях над X обозначаются одинаково, ∇. Тензорные расслоения над $TX \to X$ называются кратко *тензорными расслоениями над* X.

В локальных координатах (x^λ) на X связность ∇ на $TX \to X$ представляется в виде

$$\nabla u = (\partial_\mu u^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} u^\nu) dx^\mu \otimes \partial_\lambda. \tag{4}$$

Коэффициенты $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ называют *символами Кристоффеля.* Компоненты тензора (4) мы обозначаем $u^\lambda_{,\mu}$. Это обозначение естественным образом обобщается на тензоры произвольного порядка.

Имеется альтернативный способ определения связности на векторном расслоении $Y \to X$ — посредством ковариантного внешнего дифференцирования Y-значных форм на X.

Утверждение 2. *Для любой связности ∇ на расслоении $Y \to X$ существует единственное линейное отображение $d^\nabla \colon \Gamma(\bigwedge^p T^*X \otimes Y) \to \Gamma(\bigwedge^{p+1} T^*X \otimes Y)$, называемое* ковариантным внешним дифференциалом, *такое, что*

1) $d^\nabla(\omega \wedge \alpha) = d\omega \wedge \alpha + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d^\nabla \alpha,$
2) $d^\nabla s = \nabla s$

для всех Y-значных форм α на X, дифференциальных форм ω на X и сечений $s \in \Gamma(Y)$.

В следующем утверждении устанавливается связь ковариантного внешнего дифференциала с ковариантной производной.

Утверждение 3. *Пусть ∇^Y — связность на векторном расслоении $Y \to X$, ∇^{TX} — свободная от кручения связность на касательном расслоении $TX \to X$ и ∇ — индуцированная связность на расслоении $\bigwedge^p T^*X \otimes Y \to X$. Тогда*

$$d^\nabla = (p+1)\,\mathrm{Alt} \circ \nabla, \tag{5}$$

где Alt *— операция альтернирования [28, 30]. Иными словами,*

$$(d^\nabla \alpha)(u_0, \ldots, u_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i (\nabla_{u_i} \alpha)(u_0, \ldots, \widehat{u}_i, \ldots, u_p) \tag{6}$$

для всех $\alpha \in \Gamma(\bigwedge^p T^*X \otimes Y)$ и $u_0, \ldots, u_p \in \Gamma(TX)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для обычного внешнего дифференциала. В этом случае ∇ — связность на $\bigwedge^p T^*X \to X$, индуцированная свободной от кручения связностью на $TX \to X$.

В работе используется следующее правило расстановки (восстановления) скобок в формулах. Любое дифференцирование (внешнее, ковариантное, внутреннее умножение, и т. д.) сильнее любого умножения (внешнего или тензорного). Внешнее и ковариантное дифференцирования сильнее внутреннего умножения, а внешнее произведение сильнее тензорного.

1.2. Кинематика

Формальному определению используемых в работе кинематических понятий предпошлем их краткий обзор. В работе рассматривается классический (нерелятивистский) материальный континуум в движении. Этот объект представляется как расслоение материальных событий над осью времени $\mathbb{R}$, вложенное в объемлющее расслоение событий над $\mathbb{R}$. Первое расслоение мы называем *траекторией*, второе — *пространством-временем*. Расслоения снабжаются системами отсчета. Система отсчета на траектории определяет тело, а на пространстве-времени — пространство и движение тела в пространстве. Систему отсчета на пространстве-времени мы называем *наблюдателем*. Имеется выделенный — инерциальный — наблюдатель. Системы отсчета отождествляются со специальными векторными полями на указанных расслоениях — мировыми скоростями.

Замечание 1. a) Традиционно в континуальной механике исходят из понятия тела как многообразия материальных точек, а движение тела определяют позже как семейство вложений тела в пространство [17, 20]. В настоящей работе мы следуем подходу, принятому в [11, 13], когда первичным является понятие траектории.

b) Представление о классическом пространстве-времени как о расслоении событий над осью времени используется, например, в [16, 18, 31]. Имеются работы,

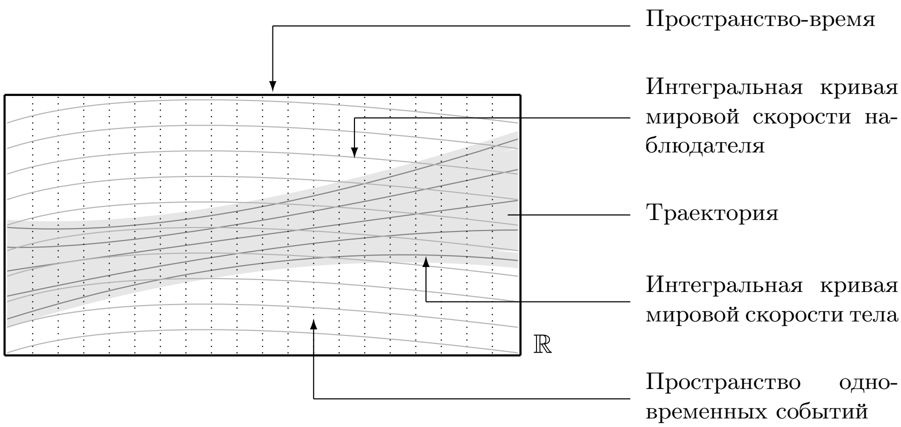

Рис. 1. Пространство-время, траектория и наблюдатели.

обобщающие это представление, например [13, 32]. Представление о движении материального континуума без апелляции к понятию тела разрабатывалось, например, в [11, 13].

c) В нерелятивистской механике имеются различные, но по существу эквивалентные формулировки понятия системы отсчета (наблюдателя). Для расслоений над $\mathbb{R}$ под системой отсчета понимают или (полное) векторное поле на таком расслоении, проектируемое на стандартное векторное поле на $\mathbb{R}$, [17, 32], или тривиализацию этого расслоения [20], или (полную) связность на этом расслоении [16]. Эквивалентность этих формализаций установлена в [16].

Перейдем к формальному определению используемых в работе кинематических понятий. Необходимые пояснения и комментарии приведены ниже.

Мир событий — это ориентированное расслоение $\mathbb{t}\colon E \to \mathbb{R}$. Точки $x \in E$ называются *событиями*, точки $a \in \mathbb{R}$ — *моментами времени*, действительная прямая $\mathbb{R}$ — *осью времени*, слой $\mathbb{t}^{-1}(a)$ над произвольным $a \in \mathbb{R}$ — *пространством одновременных событий*. Pullback стандартной 1-формы на $\mathbb{R}$ относительно $\mathbb{t}$ обозначается τ и называется *формой времени*. Далее мы считаем ориентацию выбранной и размерность E полагаем равной $n+1$.

Пространство-время — это мир событий $\mathbb{t}\colon E \to \mathbb{R}$, снабженный вертикальной римановой метрикой $\mathrm{g}\colon E \to V^*E \otimes V^*E$ (римановой метрикой на слоях расслоения $\mathbb{t}$) и линейной симметричной связностью ∇ на TE такой, что

1) $\nabla\tau = 0$ (сохранение времени),
2) $\nabla\mathrm{g} = 0$ (сохранение метрики на слое).

Траектория — это произвольное подрасслоение $\mathbb{t}|_X\colon X \to \mathbb{R}$ пространства-времени $\mathbb{t}\colon E \to \mathbb{R}$. Его точки называются *материальными событиями*. В данной работе мы считаем, что размерность X совпадает с E, то есть равна $n+1$. Для краткости проекцию траектории $\mathbb{t}|_X$ мы обозначаем $\mathbb{t}$, то есть так же, как проекцию пространства-времени.

Мировая скорость — это векторное поле $o\colon E\to TE$ на мире событий $\mathbb{t}\colon E\to\mathbb{R}$ такое, что $o\rfloor\tau=1$.

Мировая скорость наблюдателя — это мировая скорость на пространстве-времени. Мировая скорость наблюдателя $\imath$, для которой $\nabla\imath=0$, называется *мировой скоростью инерциального наблюдателя.*

Мировая скорость тела — это мировая скорость на траектории. Мы используем для этой скорости обозначение u.

Относительная скорость — это разность двух мировых скоростей. Если $v=u-o$, где u и o — мировые скорости тела и наблюдателя соответственно, то мы говорим, что v – *скорость тела относительно наблюдателя o.* Аналогично определяется скорость одного наблюдателя относительно другого.

Абсолютная скорость — это скорость тела или наблюдателя относительно инерциального наблюдателя. Для этих скоростей мы используем обозначения $U:=u-\imath$ и $O:=o-\imath$ соответственно.

Замечание 2. a) Любое расслоение над $\mathbb{R}$ тривиально [15] и наделено естественными расслоенными координатами (t,x^i), где t — декартова координата на $\mathbb{R}$ с функциями перехода $t'=t+\mathrm{const}$. База $\mathbb{R}$ снабжена стандартным векторным полем ∂_t и стандартной 1-формой dt. Последняя переносится на все расслоение с помощью операции pullback, определение которой можно найти в учебниках [4, 8, 25, 28, 29].

b) Приведенное определение пространства-времени является редукцией соответствующего определения работы [20] для случая, когда пространство-время — расслоение над $\mathbb{R}$. Поэтому, в частности, в нашем определении отсутствует условие невырожденности функции $\mathbb{t}$, ибо проекция любого расслоения является субмерсией. Отметим, что авторы работы [20] при определении пространства-времени ссылаются на [33, 34].

c) Из условия 1) определения пространства-,времени следует, что связность ∇ на касательном расслоении $TE\to E$ сохраняет свойство вертикальности векторных полей на E. Действительно, если это условие выполнено и $v\in\Gamma(VX)$ $(\tau(v)=0)$, то согласно (2) $\tau(\nabla_u v)=u(\tau(v))-(\nabla_u\tau)(v)=0$, то есть $\nabla_u v\in\Gamma(VX)$. Таким образом, ∇ является также связностью на вертикальном касательном расслоении $VE\to E$. Отсюда, кстати, следует корректность условия 2) определения пространства-времени.

d) В работе [13] дается более общее определение траектории в том отношении, что размерность траектории допускается меньше размерности пространства-времени.

e) Определение мировой скорости хорошо известно [17, 20]. Иногда на нее ссылаются как на абсолютную скорость. Такая терминология не совсем удачна, так как термин «абсолютная скорость» в классической механике используется для обозначения движения относительно инерциального наблюдателя. Определение инерциального наблюдателя, совпадающее с нашим, имеется в [20]. Это понятие обсуждается, например, в [17], его определение для более общих пространств-времен можно найти в [32].

f) Среди предложенных определений нет определения тела, так как по существу это понятие в статье не используется. В формализме расслоений над $\mathbb{R}$ тело можно определить как типичный слой траектории, ассоциированный с мировой скоростью тела. Определение тела в рамках более общего формализма имеется в [13]. При заданной мировой скорости тела допустимо траекторию называть *траекторией тела*.

g) Отметим, что относительные и абсолютные скорости на мирах событий — это вертикальные векторные поля на этих расслоениях (см. рис. 2).

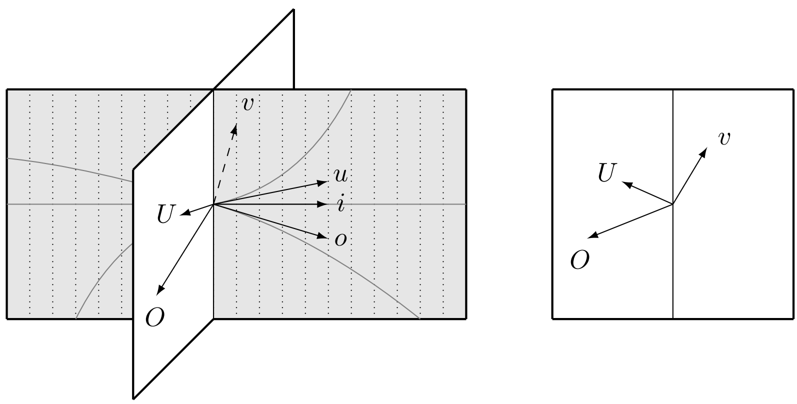

Рис. 2. Мировые скорости наблюдателя (o), инерциального наблюдателя ($\imath$) и тела (u) в выбранной точке траектории и соответствующие им абсолютные скорости наблюдателя (O) и тела (U), а также скорость тела относительно наблюдателя o (v).

Пусть $\mathbb{t}\colon E \to \mathbb{R}$ — мир событий и o — наблюдатель на нем. В работе используются следующие два вида локальных координат на E.

Координаты, адаптированные к структуре $\mathbb{t}$, — это произвольная локальная координатная система (t, x^i), $i = 1, \dots, n$, на E, адаптированная к расслоенной структуре E ($\tau(\partial_i) = 0$), к стандартной единице времени ($\tau(\partial_t) = 1$) и к выбранной ориентации на E.

Координаты, адаптированные к наблюдателю o, — это координаты (t, x^i), адаптированные к структуре $\mathbb{t}$, такие, что $o = \partial_t$.

Начиная с этого места все координатные системы на мире событий предполагаются адаптированными к его структуре. Мы принимаем соглашение использовать латинские буквы для индексирования координат на слое и греческие — для всего набора координат на E.

В координатах условия 1) и 2) из определения пространства-времени представляются в виде

$$\Gamma^0_{\lambda\mu} = 0, \tag{7}$$

$$\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2}\mathrm{g}^{kl}(\partial_j \mathrm{g}_{il} + \partial_i \mathrm{g}_{jl} - \partial_l \mathrm{g}_{ij}), \quad \Gamma^k_{0i}\mathrm{g}_{kj} + \Gamma^k_{0j}\mathrm{g}_{ik} = \partial_t \mathrm{g}_{ij}, \tag{8}$$

а произвольная мировая скорость —

$$o = \partial_t + o^i \partial_i. \tag{9}$$

Замечание 3. Согласно нашему определению, наблюдатель — это дополнительная структура на пространстве-времени. Между тем под наблюдателем иногда понимают систему координат, адаптированную к этому расслоению. Эти две точки зрения на наблюдателя являются эквивалентными вследствие естественного биективного соответствия, индуцированного правилом:

наблюдатель $o \to$ класс систем координат, адаптированных к o,

между наблюдателями и классами координатных систем, связанных не зависящими от времени преобразованиями. Связь описаний относительного движения в принятом нами и в координатном формализме отражена в таблице 1.

Таблица 1. Описание относительного движения в формализме наблюдателей и в координатном формализме.

Наблюдатель	Описание в формализме наблюдателей	Описание в координатном формализме (в координатах, адаптированных к наблюдателю)
$\imath$	$u = \imath + U$	u^i — компоненты скорости тела относительно наблюдателя $\imath$ $\imath^i$ — компоненты скорости наблюдателя $\imath$ относительно себя ($\imath^i = 0$) $U^i = u^i$
o	$u = o + v$ $\imath = o - O$ $U = O + v$	u^i — компоненты скорости тела относительно наблюдателя o $\imath^i$ — компоненты скорости наблюдателя $\imath$ относительно наблюдателя o U^i — компоненты скорости тела относительно наблюдателя $\imath$

Вертикальная метрика g и ориентация пространства-времени $\mathbb{t}\colon E \to \mathbb{R}$ определяют на этом расслоении *форму объема* $\mathrm{vol}\colon E \to \bigwedge^{n+1} T^* E$ посредством координатного выражения

$$\mathrm{vol} = \sqrt{|\mathrm{g}|}\, dt \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{10}$$

где $|\mathrm{g}| := |\det(\mathrm{g}_{ij})|$ и знак ориентации традиционно опущен.

Утверждение 4. *Справедливо равенство*

$$\nabla \mathrm{vol} = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Утверждение доказывает следующая цепочка равенств:

$$\nabla_\lambda \mathrm{vol} = \partial_\lambda \sqrt{|\mathrm{g}|}\, dt \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n + \sqrt{|\mathrm{g}|}\, \nabla_\lambda (dt \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) =$$
$$= (\partial_\lambda \ln \sqrt{|\mathrm{g}|} - \Gamma^i_{\lambda i}) \mathrm{vol} = \tfrac{1}{2}(\partial_\lambda \ln |\mathrm{g}| - \mathrm{g}^{ij}\partial_\lambda \mathrm{g}_{ij}) \mathrm{vol} = 0. \quad (12)$$

При получении второго и третьего равенств мы использовали (7) и (8). Четвертое равенство справедливо в силу известного выражения для производной определителя матрицы (формула Лиувилля) [35]. □

Мы используем символ vol также для обозначения ограничения формы объема пространства-времени на траекторию.

2. Баланс массы

При традиционном подходе, когда кинематика континуума строится исходя из понятия тела, под балансом массы, или законом сохранения массы, понимают сохранение массы любого объема тела в процессе движения тела. Формальное описание баланса массы в этом случае имеется, например, в [17, 20]. В настоящем разделе, следуя принятому нами подходу к кинематике, мы формулируем баланс массы в терминах дифференциально-геометрических величин, определенных на траектории $\mathbb{t}\colon X \to \mathbb{R}$. Мы ограничиваемся дифференциальной формулировкой и выводим из нее прочие известные дифференциальные формулировки этого баланса.

Определение 1. Для произвольного $\rho \in C^\infty(X)$ положим на X $m := \rho \mathrm{vol}$. Мы говорим, что функция ρ подчиняется *закону сохранения массы*, если форма m инвариантна относительно потока мировой скорости тела u, то есть если

$$L_u m = 0, \quad (13)$$

где L_u — производная Ли вдоль u. Функция ρ называется *плотностью массы.*

С помощью известного тождества $L_u = u\rfloor \circ d + d \circ u \rfloor$ (см., например, [29]), уравнение (13) переписывается в виде

$$d(u \rfloor m) = 0. \quad (14)$$

Замечание 4. a) Формулировка (13) имеется, например, в [11]. Ее отличие от традиционных формулировок заключается в том, что производная Ли действует на дифференциальную форму на траектории тела, а не на конфигурации тела в пространстве.

b) Укажем на трудность, которая сопровождает переход от традиционных формулировок к (13). Эта трудность скрыта в определении формы объема (10). Дело в том, что вертикальная метрика g индуцирует непосредственно только вертикальную форму объема $\widetilde{\mathrm{vol}}\colon E \to \bigwedge^{n+1} V^*E$. Последняя не является формой на E. В частности, обычная производная Ли к ней неприменима. Однако вертикальной форме можно поставить в соответствие обычную, если на базе расслоения есть форма объема [25]. Формула (10) является результатом этого соответствия и получается внешним умножением формы dt на произвольное расширение формы $\widetilde{\mathrm{vol}}$ до формы на E (подробности см. в [25, 31] и в разделе 3.3). К форме vol производная Ли уже применима.

c) Уравнение (13) может быть получено из *интегральной формулировки баланса массы*

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\mathrm{Fl}^u_\tau(X')} m = 0, \tag{15}$$

где Fl^u_τ — поток векторного поля u и $X' \subset X$ — ограниченная область.

Рассмотрим различные представления уравнения (13). Общее координатное представление этого уравнения получается подстановкой в (14) выражений (10) и $u = \partial_t + u^i\partial_i$ и имеет вид

$$\partial_\lambda(\sqrt{|\mathrm{g}|}\rho u^\lambda) = 0, \tag{16}$$

который совпадает с одной из стандартных координатных формулировок баланса массы [17, уравнение (164.2)].

Другая форма записи получается, если применить к уравнению (14) формулу (6), выражающую внешний дифференциал через ковариантную производную. Имеем тогда, опуская знак суммирования,

$$\begin{aligned} d(u\rfloor m)(\partial_0,\dots,\partial_n) &= (-1)^\lambda(\nabla_\lambda(\rho u \rfloor \mathrm{vol}))(\partial_0,\dots,\widehat{\partial}_\lambda,\dots,\partial_n) = \\ &= (-1)^\lambda(\nabla_\lambda(\rho u)\rfloor \mathrm{vol})(\partial_0,\dots,\widehat{\partial}_\lambda,\dots,\partial_n) = \\ = (-1)^\lambda(\rho u^\mu)_{,\lambda}\mathrm{vol}(\partial_\mu,\partial_0,\dots,&\widehat{\partial}_\lambda,\dots,\partial_n) = (\rho u^\lambda)_{,\lambda}\mathrm{vol}(\partial_0,\dots,\partial_n), \end{aligned} \tag{17}$$

где при получении второго равенства мы использовали (11), а при получении третьего — определение внутреннего умножения. Таким образом,

$$d(u\rfloor m) = (\rho u^\lambda)_{,\lambda}\mathrm{vol}, \tag{18}$$

и уравнение баланса массы принимает вид

$$(\rho u^\lambda)_{,\lambda} = 0. \tag{19}$$

Такая форма записи баланса массы также хорошо известна, но в основном для случая, когда класс координатных преобразований не включает преобразования, зависящие от времени (см., например, [17, уравнение (156.5)]).

Уравнения (16) и (19) связаны соотношениями $\Gamma^i_{i\lambda} = \partial_\lambda \ln\sqrt{|\mathrm{g}|}$ (см. цепочку равенств (12)).

2.1. Формулировки для произвольного наблюдателя

Перепишем полученные уравнения баланса массы относительно произвольного наблюдателя.

Вообще, в литературе имеется два подхода к формулированию законов баланса для произвольного наблюдателя o (см., например, [17, 21]). В рамках принятого в работе кинематического формализма описание этих подходов следующее. Первый подход реализуется подстановкой в исходные уравнения баланса выражения

$$u = o + v, \tag{20}$$

где v — скорость тела относительно o. При втором подходе предполагается существование инерциального наблюдателя $\imath$, и переход к наблюдателю o реализуется подстановкой

$$u = o - O + U, \tag{21}$$

где $O := o - \imath$ и $U := u - \imath$ — абсолютные скорости наблюдателя и тела соответственно. После выполнения указанных подстановок полученные уравнения обычно записывают в координатах, адаптированных к наблюдателю o.

Для уравнений баланса массы (16) и (19) первый подход приводит к уравнениям

$$\partial_\lambda(\sqrt{|\mathrm{g}|}\rho o^\lambda) + \partial_i(\sqrt{|\mathrm{g}|}\rho v^i) = 0 \tag{22}$$

и

$$(\rho o^\lambda)_{,\lambda} + (\rho v^i)_{,i} = 0, \tag{23}$$

соответственно. В координатах, адаптированных к o, эти уравнения имеют вид

$$\partial_t(\sqrt{|\mathrm{g}|}\rho) + \partial_i(\sqrt{|\mathrm{g}|}\rho v^i) = 0 \tag{24}$$

и

$$\partial_t \rho + \rho o^i_{,i} + (\rho v^i)_{,i} = 0.$$

Применение второго подхода, например к уравнению (19), требует следующей поясняющей выкладки:

$$\begin{aligned} (\rho u^\lambda)_{,\lambda} = (\rho o^\lambda)_{,\lambda} - (\rho O^\lambda)_{,\lambda} + (\rho U^\lambda)_{,\lambda} = \\ = \rho_{,\lambda} o^\lambda + \rho o^\lambda_{,\lambda} - \rho_{,\lambda} O^\lambda - \rho O^\lambda_{,\lambda} + (\rho U^\lambda)_{,\lambda} = \rho_{,\lambda} o^\lambda - \rho_{,\lambda} O^\lambda + (\rho U^\lambda)_{,\lambda}, \end{aligned} \tag{25}$$

где при получении последнего равенства использовалось определение инерциального наблюдателя $\nabla i = 0$. В результате получаем

$$\partial_t \rho - \partial_i \rho O^i + (\rho U^i)_{,i} = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) совпадает по форме с уравнением баланса массы, полученным в [21] с помощью координатных преобразований.

3. Баланс количества движения

В этом разделе баланс количества движения сначала формулируется в терминах касательнозначных форм на траектории $\mathfrak{t}\colon X \to \mathbb{R}$. Из этой формулировки далее выводятся формулировки в традиционной форме, когда количество движения и напряжение представляются тензорными полями второго порядка. Мы ссылаемся на эти формулировки как на *тензорные формулировки.* Уравнения записываются как для инерциального наблюдателя, так и для произвольного. Затем предлагаются формулировки в терминах форм, принимающих значения в расслоениях, дуальных к вертикальному касательному расслоению на траектории. В качестве приложения этих формулировок выводится формулировка баланса количества движения идеальной жидкости в терминах обычных (не векторнозначных) форм.

3.1. Формулировки в терминах касательнозначных форм

3.1.1. Форма напряжения Коши

В классической нерелятивистской континуальной механике основной постулат для формулирования динамических уравнений движения — существование на конфигурации тела в каждый момент времени поля напряжений. В произвольной точке конфигурации это поле представляет собой поверхностную плотность силы, действующей на каждый ориентированный в пространстве элемент поверхности в этой точке. Формальные определения напряжения в этом случае, то есть когда кинематический аппарат теории строится на основе понятия тела, как традиционные, так и в современных дифференциально-геометрических терминах, можно найти в работах [8, 9, 12, 17, 20, 36, 37].

Следуя принятому в настоящей работе подходу (когда кинематический и динамический аппарат теории строится в формализме векторнозначных форм на траектории), мы постулируем, что напряжение описывается VX-значной формой на X вида

$$\varsigma := \partial_i \rfloor \operatorname{vol} \otimes \sigma^{ij} \partial_j, \tag{27}$$

где σ^{ij} — компоненты тензора $\sigma \in \Gamma(VX \otimes VX)$. Поле ς мы называем *формой напряжения Коши*, а тензор σ — *тензором напряжения Коши*. В данной работе тензор σ предполагается симметричным.

Замечание 5. a) Идея использования векторнозначных форм для представления напряжения разрабатывалась в [5, 8, 9, 11, 12]. Представление напряжения в форме (27) имеется в [11], однако там форма объема определена иначе.

b) Напряжение ς определено нами как форма, принимающая значения в вертикальном касательном расслоении $VX \to X$. Так как это расслоение является подрасслоением касательного расслоения $TX \to X$, то можно считать, что форма ς — TX-значная форма.

c) В терминологии [8] форма ς является псевдоформой, так как ее знак изменяется при смене ориентации на X. Иначе говоря, знак формы ς определяется ориентацией системы векторов, на которую эта форма действует. В традиционной континуальной механике это означает, что векторы напряжения, действующие на противоположные стороны одной и той же поверхности в данной точке, равны по величине и противоположны по направлению [17].

3.1.2. Уравнение баланса количества движения

Определение 2. *Уравнение баланса количества движения* в терминах касательнозначных форм на траектории $\mathbb{t}\colon X \to \mathbb{R}$ — это уравнение

$$d^{\nabla}(u \rfloor m \otimes U) = d^{\nabla}\varsigma + m \otimes b, \tag{28}$$

где u — мировая скорость тела, $U = u - \imath$ — скорость тела относительно инерциального наблюдателя и $b \in \Gamma(VX)$. Поле b мы называем *полем массовых сил.*

Пусть пространство-время — это расслоение $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (pr_1 — проекция на первый множитель), снабженное стандартными линейной связностью на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, евклидовой метрикой на $\mathbb{R}^3$ и инерциальным наблюдателем, определяемым в стандартных координатах на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ выражением $\imath := \partial_t$. Тогда в этих координатах уравнение принимает вид

$$\partial_\lambda(\rho u^\lambda u^i - \sigma^{\lambda i}) = \rho b^i, \tag{29}$$

который совпадает с традиционной координатной формулировкой баланса количества движения относительно инерциального наблюдателя в декартовых координатах [17, 38, 39]. Это совпадение может служить оправданием предложенной формулировки.

С учетом закона сохранения массы

$$\begin{aligned} d^\nabla(u \rfloor m \otimes U) &= d(u \rfloor m) \otimes U + (-1)^n u \rfloor m \wedge \nabla U = \\ &= (-1)^n u \rfloor m \wedge \nabla U = -(-1)^n(-1)^{n+1} m \wedge u \rfloor \nabla U = m \otimes u \rfloor \nabla U, \end{aligned} \tag{30}$$

и уравнение (28) принимает вид

$$m \otimes u \rfloor \nabla U = d^\nabla \varsigma + m \otimes b. \tag{31}$$

Замечание 6. a) В работе [11] уравнение (31) выводится из интегральной формулировки баланса количества движения. При этом для вывода и записи уравнения используется формализм исчисления касательнозначных форм [4,29,40]. Формулировки баланса количества движения в терминах векторнозначных форм имеются также в [12], однако в этой работе время рассматривается как параметр и формы определяются на конфигурации тела, а не на траектории, как у нас.

b) Уравнению (28) соответствует следующая интегральная формулировка баланса количества движения:

$$\frac{d}{d\tau}\int_{\mathrm{Fl}^u_\tau(X')} m \otimes U = \int_{\mathrm{Fl}^u_\tau(\partial X')} \varsigma + \int_{\mathrm{Fl}^u_\tau(X')} m \otimes b, \tag{32}$$

где Fl^u_τ — поток векторного поля u и $X' \subset X$ — ограниченная область.

3.1.3. Формулировки для произвольного наблюдателя

При рассмотрении закона сохранения массы мы выделили два подхода к формулированию законов баланса для произвольного наблюдателя. Проиллюстрируем эти подходы на примере уравнения (31).

В соответствии с первым подходом положим в этом уравнении $u = o + v$ и $U = o + v - \imath$ и и воспользуемся выкладкой

$$\begin{aligned} u \rfloor \nabla U &= (o + v) \rfloor \nabla(o + v - \imath) = (o + v) \rfloor \nabla(o + v) = \\ &= o \rfloor \nabla o + o \rfloor \nabla v + v \rfloor \nabla o + v \rfloor \nabla v = [o, v] + v \rfloor \nabla v + 2v \rfloor \nabla o + o \rfloor \nabla o = \\ &= [o, v] + \nabla_v v + 2\nabla_v o + \nabla_o o, \end{aligned} \tag{33}$$

где при получении второго равенства мы использовали определение инерциального наблюдателя, а при получении четвертого — симметричность связности. В результате уравнение (31) принимает вид

$$m \otimes a = d^{\nabla}\varsigma + m \otimes b, \tag{34}$$

где

$$a := [o, v] + \nabla_v v + 2\nabla_v o + \nabla_o o. \tag{35}$$

Выражение (35) представляет собой абсолютное ускорение тела. Первые два слагаемых описывают относительное ускорение тела, третье — ускорение Кориолиса и четвертое — центробежное ускорение. В координатах, адаптированных к наблюдателю o,

$$a = (\partial_t v^i + \partial_j v^i + \Gamma^i_{jk} v^k + 2\Gamma^i_{j0} v^j + \Gamma^i_{00})\partial_i. \tag{36}$$

Используя определение инерциального наблюдателя, производную ∇o в выражении (35) можно заменить на ∇O. В координатах эта замена означает, что символы Кристоффеля в выражении (36) представляются в виде

$$\Gamma^i_{\lambda 0} = O^i_\lambda. \tag{37}$$

В соответствии со вторым подходом положим в уравнении (31) $u = o - O + U$ и воспользуемся равенством $\nabla_o U - \nabla_O U = [o, U] - [O, U]$, являющимся следствием определения инерциального наблюдателя и симметричности связности. Получим

$$m \otimes ([o, U] + \nabla_U U - [O, U]) = d^{\nabla}\varsigma + m \otimes b. \tag{38}$$

Замечание 7. a) Выражение (36) для абсолютного ускорения по существу совпадает с соответствующим ему выражением из [20, p. 161]. Отличие состоит в том, что в [20] сумма $[o, v] + \nabla_v v$ отнесена посредством касательного отображения к типичному слою тривиализации, индуцированной наблюдателем. Это отличие связано с тем, что кинематика в этой работе строится на основе понятия тела.

b) Формулировка баланса количества движения для произвольного наблюдателя в формализме векторнозначных форм имеется в [11]. Однако в этой работе переход от инерциального наблюдателя к произвольному осуществляется посредством координатного формализма описания относительного движения (см. замечание 3).

3.1.4. Формулировка, свободная от наблюдателя

В классической нерелятивистской континуальной механике все формулировки баланса количества движения предполагают зависимость от инерциального наблюдателя. В наших формулировках это проявляется наличием в них абсолютной скорости тела U. В работе [17] показано, что формально от этой зависимости можно избавиться, если в уравнении баланса количества движения заменить скорость тела относительно инерциального наблюдателя (в наших обозначениях — U) на мировую скорость тела (в наших обозначениях — u).

Выполним такую замену в (28). Получим

$$d^{\nabla}(u \rfloor m \otimes u) = d^{\nabla}\varsigma + m \otimes b. \tag{39}$$

Поясним смысл этого уравнения. Рассмотрим уравнение относительно инерциального наблюдателя, то есть положим в нем $u = \imath + U$. Используя равенство $\nabla \imath = 0$, получим

$$d(u \rfloor m) \otimes \imath + d^{\nabla}(u \rfloor m \otimes U) = d^{\nabla}\varsigma + m \otimes b. \tag{40}$$

Так как второе слагаемое слева в этом уравнении и слагаемые справа суть формы со значениями в вертикальном касательном расслоении, то в силу трансверсальности поля $\imath$ слоям траектории тела $d(u \rfloor m) = 0$. Таким образом, уравнение (39), рассматриваемое относительно инерциального наблюдателя, выражает одновременно баланс массы и баланс количества движения.

3.2. Тензорные формулировки

Рассмотрим традиционный подход к ковариантному формулированию баланса количества движения, когда количество движения и напряжение представляются тензорными полями второго порядка, а массовые силы — векторными полями.

Будем исходить из уравнения (28).

Лемма 1. *Для произвольной векторнозначной формы*

$$\alpha := \partial_\mu \rfloor \operatorname{vol} \otimes \alpha^{\mu\nu} \partial_\nu \tag{41}$$

имеем

$$d^{\nabla}\alpha = \operatorname{vol} \otimes \alpha^{\lambda\mu}_{,\lambda} \partial_\mu. \tag{42}$$

Доказательство. Применим к левой части равенства (42) формулу (6). Имеем, опуская знак суммирования,

$$\begin{aligned}(d^{\nabla}\alpha)(\partial_0, \ldots, \partial_n) &= (-1)^\lambda (\nabla_\lambda \alpha)(\partial_0, \ldots, \widehat{\partial}_\lambda, \ldots, \partial_n) = \\ &= (-1)^\lambda (\nabla_\lambda \partial_\mu \rfloor \operatorname{vol})(\partial_0, \ldots, \widehat{\partial}_\lambda, \ldots, \partial_n) \otimes \alpha^{\mu\nu}\partial_\nu + \\ &+ (-1)^\lambda (\partial_\mu \rfloor \operatorname{vol})(\partial_0, \ldots, \widehat{\partial}_\lambda, \ldots, \partial_n) \otimes \nabla_\lambda(\alpha^{\mu\nu}\partial_\nu) = \\ &= \sqrt{|\mathrm{g}|}\Gamma^\lambda_{\lambda\mu}\alpha^{\mu\nu}\partial_\nu + \sqrt{|\mathrm{g}|}\nabla_\lambda(\alpha^{\lambda\nu}\partial_\nu) = \sqrt{|\mathrm{g}|}\alpha^{\lambda\nu}_{,\lambda}\partial_\nu,\end{aligned} \tag{43}$$

где при получении второго равенства мы использовали (11). Формула (42) теперь следует из (43) и равенства $\sqrt{|\mathrm{g}|} = \operatorname{vol}(\partial_0, \ldots, \partial_n)$. □

С помощью (42) уравнение (28) можно записать в виде

$$(\rho u^\lambda U^i)_{,\lambda} = \sigma^{\lambda i}_{,\lambda} + \rho b^i \tag{44}$$

или, с учетом сохранения массы,

$$\rho u^\lambda U^i_{,\lambda} = \sigma^{\lambda i}_{,\lambda} + \rho b^i. \tag{45}$$

Уравнения (44) и (45) выражают баланс количества движения тела в традиционной тензорной форме.

Тензорные формулировки баланса количества движения для произвольного наблюдателя могут быть получены из уравнений (34) и (38) аналогичным образом. Например, для уравнения (38) сразу получаем

$$[o, U]^i + U^j U^i_{,j} - [O, U]^i = \rho^{-1}\sigma^{ij}_{,j} + b^i, \tag{46}$$

или, в адаптированных к наблюдателю координатах,

$$\partial_t U^i + U^j U^i_{,j} - [O, U]^i = \rho^{-1}\sigma^{ij}_{,j} + b^i. \tag{47}$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением (28) из работы [21], полученным в результате трудоемких координатных преобразований.

Тензорная формулировка, свободная от наблюдателя, получается из (44) заменой U на u и имеет вид

$$(\rho u^\lambda u^\mu)_{,\lambda} = \sigma^{\lambda\mu}_{,\lambda} + \rho b^\mu. \tag{48}$$

Она имеется в работе [17].

3.3. Формулировки в терминах форм со значениями в дуальных расслоениях

Рассмотрим подход к формулированию закона баланса количества движения, когда кинематические и кинетические величины (количество движения, напряжение и массовые силы) представляются формами со значениями в расслоениях, дуальных к вертикальному касательному расслоению $VX \to X$ (см. работу [12], где приведены аргументы в пользу этого подхода). Такими расслоениями у нас являются собственно дуальное расслоение $V^*X \to X$ и определяемое ниже расслоение $T^*X \wedge T^*\mathbb{R} \to X$.

3.3.1. Формулировка в терминах V^*X-значных форм

Мы получаем уравнение баланса количества движения в терминах V^*X-значных форм, заменяя в уравнении (28) VX-значные формы на соответствующие им V^*X-значные формы. Ковариантное дифференцирование при этом понимается как индуцированное связностью на $VX \to X$.

Указанное соответствие мы определяем как естественное продолжение канонического линейного изоморфизма $\flat\colon \Gamma(VX) \to \Gamma(V^*X)$, индуцированного вертикальной метрикой g, на VX-значные формы. Напомню, что этот изоморфизм задается условием

$$w \rfloor v^\flat = \mathrm{g}(v, w) \tag{49}$$

для любых $v, w \in \Gamma(VX)$, где $v^\flat$ — образ v относительно $\flat$. Для разложимых форм продолжение определяется правилом

$$\alpha := \omega \wedge \beta \to \alpha^\flat := \omega \wedge \beta^\flat \tag{50}$$

и продолжается по линейности на все VX-значные формы.

Утверждение 5. 1) *Для произвольного* $v \in \Gamma(VX)$

$$\nabla v \rfloor v^\flat = \tfrac{1}{2} d(v \rfloor v^\flat). \tag{51}$$

2) *Для любой* VX*-значной формы* α *на* X

$$d^\nabla \alpha^\flat = (d^\nabla \alpha)^\flat. \tag{52}$$

Доказательство. 1). Тождество (51) следует из условия $\nabla \mathrm{g} = 0$, представленного в виде

$$\mathrm{g}(\nabla_u v, w) + \mathrm{g}(v, \nabla_u w) = u(\mathrm{g}(v, w)), \tag{53}$$

где $v, w \in \Gamma(VX)$ и $u \in \Gamma(TX)$ произвольны. Полагая здесь $w = v$, получаем (51).

2). В силу правила (50) достаточно проверить, что для любого $v \in \Gamma(VX)$

$$\nabla v^\flat = (\nabla v)^\flat. \tag{54}$$

Эту проверку осуществляет цепочка равенств

$$w \rfloor \nabla_u v^\flat = u \rfloor d(w \rfloor v^\flat) - \nabla_u w \rfloor v^\flat = \\ = u \rfloor d\mathrm{g}(v, w) - \mathrm{g}(v, \nabla_u w) = \mathrm{g}(\nabla_u v, w) = w \rfloor (\nabla_u v)^\flat, \tag{55}$$

справедливых для любых $w \in \Gamma(VX)$ и $u \in \Gamma(TX)$. Первое равенство в этой цепочке получено с использованием условия (2), второе и четвертое — условия (49), третье — условия (53). □

В терминах так определенных V^*X-значных форм уравнение (28) переписывается в виде

$$d^\nabla (u \rfloor m \otimes U^\flat) = d^\nabla \varsigma^\flat + m \otimes b^\flat. \tag{56}$$

3.3.2. Формулировка в терминах $T^*X \wedge T^*\mathbb{R}$-значных форм

Уравнение (56) представляет баланс количества движения в терминах V^*X-значных форм. Такие формы не являются тензорными полями на X. В этом разделе, следуя установке, что все физические поля должны быть тензорными, мы определяем расслоение $T^*X \wedge T^*\mathbb{R} \to X$ и ставим в соответствие V^*X-значным формам на X формы со значениями в этом расслоении. Последние уже являются тензорными полями на X, и мы формулируем баланс количества движения в терминах этих форм. Ковариантное дифференцирование при этом понимается уже как индуцированное связностью на $TX \to X$.

Определение 3. Расслоение $T^*X \wedge T^*\mathbb{R} \to X$ — это подрасслоение расслоения $\bigwedge^2 T^*X \to X$, составленное из элементов $\eta \in \bigwedge^2 T^*_x X$, обращающихся в нуль на любой паре векторов из $V_x X$.

Из этого определения следует, что произвольное сечение расслоения $T^*X \wedge T^*\mathbb{R} \to X$ имеет вид $\eta = \psi \wedge dt$, где $\psi \in \Gamma(T^*X)$. Мы сейчас покажем, что между такими формами и вертикальными ковекторными полями на X существует биективное соответствие.

Определение 4. Для произвольного $\phi \in \Gamma(V^*X)$ определим 2-форму $\phi \wedge dt \in \Gamma(T^*X \wedge T^*\mathbb{R})$, полагая

$$\phi \wedge dt = \phi' \wedge dt \tag{57}$$

для любого расширения $\phi' \in \Gamma(T^*X)$ формы ϕ. Расширение определяется условием $\phi(v) = \phi'(v)$ для любого $v \in VX$.

Утверждение 6. 1) *Форма $\phi \wedge dt$ определена корректно, то есть не зависит от выбора расширения ϕ'.*

2) *Форма $\phi \wedge dt$ уникально характеризуется условием: для любого $v \in \Gamma(VX)$*

$$v \rfloor (\phi \wedge dt) = v \rfloor \phi \wedge dt. \tag{58}$$

3) *Соответствие $\phi \to \phi \wedge dt$ — линейный изоморфизм $\Gamma(V^*X)$ и $\Gamma(T^*X \wedge T^*\mathbb{R})$.*

Доказательство. 1) В силу линейности форм достаточно показать, что из условия $\phi'(v) = 0$ для любого $v \in \Gamma(VX)$ следует $\phi' \wedge dt = 0$. Но это легко проверить, рассматривая форму $\phi' \wedge dt$ на координатном базисе (∂_λ).

2) Пусть $v \rfloor \eta = v \rfloor \phi \wedge dt$. Тогда $v \rfloor \eta = v \rfloor (\phi' \wedge dt)$, где ϕ' — расширение ϕ. Отсюда, так как v произвольно, $\eta = \phi' \wedge dt$. Рассматриваемый пункт утверждения 6 теперь следует из определения 4.

3) Этот пункт утверждения 6 является непосредственным следствием пункта 1) данного утверждения и определения (57). □

Продолжим отображение $\phi \to \phi \wedge dt$ на V^*X-значные формы, действуя как в случае продолжения отображения $\flat$, а именно — применяя правило

$$\alpha := \omega \wedge \beta \to \alpha \wedge dt := \omega \wedge (\beta \wedge dt). \tag{59}$$

Утверждение 7. *Для любой V^*X-значной формы α на X*

$$d^\nabla(\alpha \wedge dt) = d^\nabla \alpha \wedge dt. \tag{60}$$

Доказательство. В силу правила (59) и свойств дифференциала d^∇ из утверждения 2 достаточно проверить, что для произвольного $\phi \in \Gamma(V^*X)$

$$\nabla(\phi \wedge dt) = \nabla\phi \wedge dt. \tag{61}$$

Это доказывает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} v \rfloor (\nabla_u(\phi \wedge dt)) = v \rfloor \nabla_u(\phi' \wedge dt) = v \rfloor (\nabla_u \phi' \wedge dt + \phi' \wedge \nabla_u dt) = v \rfloor \nabla_u \phi' \wedge dt = \\ = [u(\phi'(v)) - \phi'(\nabla_u v)] \wedge dt = [u(\phi(v)) - \phi(\nabla_u v)] \wedge dt = v \rfloor \nabla_u \phi \wedge dt, \end{aligned} \tag{62}$$

в которой $v \in \Gamma(VX)$, $u \in \Gamma(TX)$ произвольны и ϕ' — любое расширение ϕ. Первое равенство в этой цепочке выполнено по определению расширения, второе — в силу известного свойства ковариантной производной, третье — в силу сохранения формы времени. В четвертом и шестом равенствах мы использовали (2), а в пятом — определение расширения и инвариантность вертикальных векторных полей относительно ∇_u. □

С учетом (59) и (60) уравнение баланса количества движения (56) переписывается в виде

$$d^\nabla[u \rfloor m \otimes (U^\flat \wedge dt)] = d^\nabla(\varsigma^\flat \wedge dt) + m \otimes (b^\flat \wedge dt), \tag{63}$$

или с учетом баланса массы —

$$m \otimes u \rfloor \nabla(U^\flat \wedge dt) = d^\nabla(\varsigma^\flat \wedge dt) + m \otimes (b^\flat \wedge dt). \tag{64}$$

3.4. Уравнение Ламба невязкой гидродинамики

Применим формулировку (64) для вывода уравнения баланса количества движения невязкой (идеальной) жидкости в терминах обычных (не векторнозначных) форм. Укажем сначала на некоторые конструкции (определения 5 и 6) и их свойства (утверждения 8 и 9), используемые в этом выводе.

Определение 5. *Производная Ли вертикальной формы* $\phi \in \Gamma(V^*X)$ вдоль мировой скорости u на X — это вертикальная форма $L_u\phi \in \Gamma(V^*X)$, определяемая условием

$$v \rfloor L_u\phi = u \rfloor d(v \rfloor \phi) - [u,v] \rfloor \phi \tag{65}$$

для любого $v \in \Gamma(VX)$.

Замечание 8. a) Условие (65) корректно, так как $[u,v]$ — вертикальное векторное поле.

b) Для этого определения использовалось известное тождество

$$[u,v] \rfloor\ = L_u \circ v \rfloor - v \rfloor \circ L_u, \tag{66}$$

справедливое для обычной производной Ли на многообразии и для любых векторных полей u, v на нем.

Утверждение 8. *Справедливы тождества*

$$L_u(\phi \wedge dt) = L_u\phi \wedge dt, \tag{67}$$

$$L_u(\phi \wedge dt) = \nabla_u(\phi \wedge dt) + \nabla u \rfloor \phi \wedge dt. \tag{68}$$

Доказательство. Тождество (67) доказывает цепочка равенств

$$\begin{aligned} v \rfloor L_u(\phi \wedge dt) &= L_u(v \rfloor(\phi \wedge dt)) - [u,v] \rfloor(\phi \wedge dt) = L_u(v \rfloor \phi \wedge dt) - [u,v] \rfloor \phi \wedge dt = \\ &= L_u(v \rfloor \phi) \wedge dt - [u,v] \rfloor \phi \wedge dt = (L_u(v \rfloor \phi) - [u,v] \rfloor \phi) \wedge dt = v \rfloor L_u\phi \wedge dt, \end{aligned} \tag{69}$$

справедливых для произвольного $v \in \Gamma(VX)$. В первом равенстве этой цепочки мы использовали тождество (66), во втором — условие (58) и вертикальность поля $[u,v]$, в третьем — легко проверяемое равенство $L_u dt = 0$ и в пятом — условие (65).

В свою очередь, тождество (68) обосновывает цепочка

$$\begin{aligned} v \rfloor L_u(\phi \wedge dt) &= v \rfloor L_u\phi \wedge dt = [u \rfloor d(v \rfloor \phi) - [u,v] \rfloor \phi] \wedge dt = \\ &= [v \rfloor \nabla_u\phi + \nabla_u v \rfloor \phi - [u,v] \rfloor \phi] \wedge dt = [v \rfloor \nabla_u\phi + \nabla_v u \rfloor \phi] \wedge dt = \\ &= v \rfloor(\nabla_u\phi + \nabla u \rfloor \phi) \wedge dt = v \rfloor(\nabla_u\phi \wedge dt + \nabla u \rfloor \phi \wedge dt) = \\ &= v \rfloor[\nabla_u(\phi \wedge dt) + \nabla u \rfloor(\phi \wedge dt)]. \end{aligned} \tag{70}$$

В первом равенстве этой цепочки мы использовали тождество (67), во втором — условие (65), в третьем — условие (2), в четвертом — тождество $[u,v] = \nabla_u v - \nabla_v u$, справедливое для симметричной связности, в последнем — тождество (61) и условие (58). □

Определение 6. *Форма давления на траектории* X — это V^*X-значная форма на X вида

$$\boldsymbol{p} := p\boldsymbol{vol}, \tag{71}$$

где $p \in C^\infty(X)$ и

$$\boldsymbol{vol} := \partial_i \rfloor \operatorname{vol} \otimes dx^i. \tag{72}$$

Функция p называется *функцией давления.*

Утверждение 9. 1) *Справедливо равенство*

$$d^\nabla \boldsymbol{vol} = 0. \tag{73}$$

2) *Форма* $\boldsymbol{vol} \wedge dt$ *— каноническая форма на* X*, в том смысле, что ее определение не зависит от выбранной системы координат.*

3) *Справедливо равенство*

$$d\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{vol} \wedge dt) = \operatorname{vol} \otimes (dp \wedge dt). \tag{74}$$

Доказательство. 1) Равенство (73) есть следствие тождества

$$d^\nabla (\partial_i \rfloor \operatorname{vol} \otimes a^i_j dx^j) = \operatorname{vol} \otimes \alpha^i_{j,i} dx^j \tag{75}$$

при $a^i_j = \delta^i_j$, так как $\delta^i_{j,i} = \Gamma^i_{ik}\delta^k_j - \Gamma^k_{ij}\delta^i_k = 0$. Доказательство указанного тождества аналогично доказательству леммы 1.

2) Этот пункт утверждения легко проверяется для координатного представления $\boldsymbol{vol} \wedge dt = \partial_i \rfloor \operatorname{vol} \otimes dx^i \wedge dt$.

3) Равенство (74) проверяется в координатах:

$$d\boldsymbol{p} \wedge (\boldsymbol{vol} \wedge dt) = \partial_\lambda p dx^\lambda \wedge \partial_i \rfloor \operatorname{vol} \otimes dx^i \wedge dt = \\ = \operatorname{vol} \otimes \partial_i p dx^i \wedge dt = \operatorname{vol} \otimes (dp \wedge dt). \tag{76}$$

□

Перейдем непосредственно к выводу уравнения баланса количества движения невязкой жидкости. Форма напряжения Коши в этом случае имеет вид $\varsigma^\flat = -\boldsymbol{p}$. Массовые силы для простоты положим равными нулю.

Теорема 1. *Уравнения баланса количества движения невязкой жидкости имеет вид*

$$L_u(U^\flat \wedge dt) - \frac{1}{2} d[U \rfloor (U^\flat \wedge dt)] = -\rho^{-1} dp \wedge dt. \tag{77}$$

Доказательство. Представим в требуемом виде инерционное слагаемое из уравнения (64) (левая часть этого уравнения). Имеем

$$\nabla_u (U^\flat \wedge dt) = L_u(U^\flat \wedge dt) - \nabla u \rfloor (U^\flat \wedge dt) = L_u(U^\flat \wedge dt) - \nabla U \rfloor U^\flat \wedge dt = \\ = L_u(U^\flat \wedge dt) - \frac{1}{2} d(U \rfloor U^\flat) \wedge dt = L_u(U^\flat \wedge dt) - \frac{1}{2} d[U \rfloor (U^\flat \wedge dt)], \tag{78}$$

где для получения первого равенства мы использовали тождество (68), второго — свойство $\nabla i = 0$ инерциального наблюдателя, третьего — тождество (51) и четвертого — равенство (58).

Для правой части уравнения (64) в отсутствие массовых сил имеем

$$d^{\nabla}(\varsigma^{\flat} \wedge dt) = -\, d^{\nabla}(p\mathcal{vol} \wedge dt) = -\, dp \wedge (\mathcal{vol} \wedge dt) = -\, \mathrm{vol} \otimes dp \wedge dt, \qquad (79)$$

где для получения второго и третьего равенств использовались равенства (73) и (74) соответственно. □

Представление инерционного слагаемого в уравнении движения жидкости в форме, не содержащей ковариантной производной, в гидродинамике принято называть представлением Ламба. Поэтому выражение

$$\nabla_u(U^{\flat} \wedge dt) = L_u(U^{\flat} \wedge dt) - \tfrac{1}{2} d[U \rfloor (U^{\flat} \wedge dt)], \qquad (80)$$

полученное в (3.4), мы называем *представлением Ламба* для инерционного слагаемого, а уравнение (77) — *уравнением Ламба* баланса количества движения невязкой жидкости.

Замечание 9. В терминах вихря $\Omega := dU^{\flat} \wedge dt$ поля $U^{\flat} \wedge dt$ уравнение (77) записывается в виде

$$u \rfloor \Omega = -\, \rho^{-1} dp \wedge dt. \qquad (81)$$

3.5. Формулировки для произвольного наблюдателя и тензорные формулировки

Запись полученных в разделах 3.3 и 3.4 уравнений баланса количества движения в форме, пригодной для произвольного наблюдателя, выполняется по той же схеме, что использовалась для уравнений этого баланса, записанных в терминах векторнозначных форм. Например, переход к наблюдателю o в уравнении (77), соответствующий второму из рассмотренных в разделе 3.1.3 подходов ($u = o - O + U$), дает уравнение

$$L_o(U^{\flat} \wedge dt) + L_{U-O}(U^{\flat} \wedge dt) - \frac{1}{2} d[U \rfloor (U^{\flat} \wedge dt)] = -\, \rho^{-1} dp \wedge dt. \qquad (82)$$

Аналогично, по использованному ранее алгоритму, выполняется переход к тензорной формулировке полученных уравнений. Так, представляя в уравнениях (63) и (64) ковариантный внешний дифференциал через ковариантную производную, приходим к уравнениям

$$(\rho u^{\lambda} U_i)_{,\lambda} = \sigma^{\lambda}_{i,\lambda} + \rho b_i \qquad (83)$$

и

$$\rho u^{\lambda} U_{i,\lambda} = \sigma^{\lambda}_{i,\lambda} + \rho b_i \qquad (84)$$

соответственно.

4. Баланс энергии

Для полноты приведем еще формулировку баланса энергии в терминах векторнозначных дифференциальных форм на траектории:

$$L_u(m\epsilon + \frac{1}{2}mU \rfloor U^\flat) = d(\varsigma \rfloor U^\flat) - d(q \rfloor \mathrm{vol}) + mb \rfloor U^\flat, \tag{85}$$

где ϵ — удельная внутренняя энергия и $q\colon X \to VX$ — поток тепла. Ее оправданием, как и в случае баланса количества движения, служит то, что в стандартных координатах на траектории $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ с естественными вертикальной метрикой и инерциальным наблюдателем она дает обычное координатное представление баланса энергии.

Преобразуем формулу (85), используя уравнения балансов массы и количества движения. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}d[u \rfloor m(U \rfloor U^\flat)] &= \frac{1}{2}d[u \rfloor m)(U \rfloor U^\flat) + \frac{1}{2}(-1)^n u \rfloor m \wedge d(U \rfloor U^\flat) = \\ &= \tfrac{1}{2}mu \rfloor d(U \rfloor U^\flat) = mu \rfloor (\nabla U \rfloor U^\flat) = (m \otimes u \rfloor \nabla U) \rfloor U^\flat = \\ &= d^\nabla \varsigma \rfloor U^\flat + mb \rfloor U^\flat,\end{aligned} \tag{86}$$

где для получении второго, третьего и пятого равенств мы использовали уравнение (14), тождество (51) и уравнение (31) соответственно. Аналогично

$$d(u \rfloor m\epsilon) = d\epsilon \wedge u \rfloor m + \epsilon d(u \rfloor m) = d\epsilon \wedge u \rfloor m = mu \rfloor d\epsilon. \tag{87}$$

Подставляя (4) и (87) в (85), получаем

$$mu \rfloor d\epsilon = d(\varsigma \rfloor U^\flat) - d^\nabla \varsigma \rfloor U^\flat - d(q \rfloor \mathrm{vol}). \tag{88}$$

В тензорной форме уравнение (88) с учетом равенств

$$\begin{gathered} d(\varsigma \rfloor U^\flat) = d[(\partial_i \rfloor \mathrm{vol} \otimes \sigma^{ij}\partial_j) \rfloor U^\flat] = d(\partial_i \rfloor \mathrm{vol}\sigma^{ij}U_j) = \mathrm{vol}(\sigma^{ij}U_j)_{,i}, \\ d\varsigma \rfloor U^\flat = d(\partial_i \rfloor \mathrm{vol} \otimes \sigma^{ij}\partial_j) \rfloor U^\flat = \mathrm{vol} \otimes \sigma^{ij}_{,i}\partial_j \rfloor U^\flat = \mathrm{vol}\sigma^{ij}_{,i}U_j \end{gathered}$$

имеет вид

$$\rho u^\lambda \partial_\lambda \epsilon = \sigma^{ij}U_{j,i} - q^i_{,i}.$$

Список литературы

[1] W. Noll, “Materially uniform simple bodies with inhomogeneities”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **27**, (1967), 1–32.

[2] C.-C. Wang, “On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **27**, (1967), 33–94.

[3] M. Epstein, *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2010.

[4] G. Sardanashvily, *Advanced Differential Geometry for Theoreticians*, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013.

[5] D. G. B. Edelen, "A four-dimensional formulation of defect dynamics and some of its consequences", *Int. J. Engng Sci.*, **18**, (1980), 1095–1116.

[6] A. Yavari and A. Goriely, "Riemann–Cartan geometry of nonlinear disclination mechanics", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **205**, (2012), 59–118.

[7] A. Yavari, "A geometric theory of growth mechanics", *J. Nonl. Sci.*, **20**, (2010), 781–830.

[8] T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2004.

[9] R. Segev and G. Rodnay, "Cauchy's Theorem on Manifolds", *Journal of Elasticity*, **56**, (1999), 129–144.

[10] R. Segev, "Geometric analysis of hyper-stresses", *International Journal of Engineering Science*, **100–118**, (2017).

[11] M. Schöerl and K. Schlacher, "Covariant formulation of the governing equations of continuum mechanics in an eulerian description", *J. Math. Phys.*, **48**, (2007), 052902.

[12] E. Kanso and et al, "On the geometric character of stress in continuum mechanics", *Z. angew. Math. Phys.*, **58**, (2007), 1–14.

[13] G. Romano, R. Barretta, and M. Diaco, "Geometric continuum mechanics", *Meccanica*, **49(1)**, (2014), 111–133.

[14] С. А. Лычев, К. Г. Койфман, "Геометрические аспекты теории несовместных деформаций простых структурно неоднородных тел переменного материального состава", *Дальневост. матем. журн.*, **17**:2, (2017), 221–245.

[15] L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Connections in classical and quantum field theory*, World Scientific, Singapore, NewJersey, London, Hong Kong, 2000.

[16] G. Giachetta, L. Mangiarotti, and G. Sardanashvily, *Geometric formulation of classical and quantum mechanics*, World Scientific, Singapore, 2011.

[17] C. Truesdell and R. Toupin, "The classical field theories", *Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1960.

[18] J. Ehlers, "The nature and structure of space-time", *The Physicist′s Conception of Nature*, ed. J. Mehra, Raidel, Dordrecht, 1973, 71–91.

[19] R. Aris, *Vectors, tensors, and the basic equations of fluid mechanics*, Dover, New York, 1989.

[20] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover, New York, 1983.

[21] H. Luo and T. R. Bewley, "On the contravariant form of the navier–stokes equations in time-dependent curvilinear coordinate systems", *Journal of Computational Physic*, **199**, (2004), 355–375.

[22] Y. Chen and X. Xie, "Vorticity vector-potential method for 3d viscous incompressible flows in time-dependent curvilinear coordinates", *Journal of Computational Physics*, **312**, (2016), 50–81.

[23] D. iVenturi, "Convective derivatives and reynolds transport in curvilinear time-dependent coordinates", *J. Phys. A: Math. Theor.*, **42**, (2009), 125203.

[24] M. Charron, A. Zadra, and C. Girard, “Four-dimensional tensor equations for a classical fluid in an external gravitational field”, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **140**, (2014), 908–916.

[25] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[26] R. S. Palais, *The geometrization of physics*, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1981.

[27] R. W. R. Darling, *Differential forms and connections*, Cambridge University Press, 1994.

[28] J. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate studies in mathematics, **107**, American mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

[29] I. Kolár, P. Michor, and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[30] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. 1, Interscience Publishers,, New York, London, 1963.

[31] A. Jadczyk, J. Janyška, and M. Modugno, “Galilei general relativistic quantum mechanics revisited”, *Geometria, Física-Matemática e outros Ensaios*, eds. A. S. Alves, F. J. Craveiro de Carvalho, and J. A. Pereira da Silva, Univerzita Coimbra, Coimbra, 1998, 253–313.

[32] A. Bernal and M. Sanchez, “Leibnizian, Galilean and Newtonian structures of space-time”, *J. Math. Phys.*, **44**, (2003), 1129–1149.

[33] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (premiére partie)”, *Ann École Norm Sup.*, **40**, (1923), 325–412.

[34] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (suite)”, *Ann École Norm Sup.*, **41**, (1924), 1–25.

[35] М. В. Федорюк, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1985.

[36] A. L. Cauchy, “Recherches sur 1'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques”, *Bull. Soc. Philomath.*, 1823, 9–13.

[37] A. L. Cauchy, “De la pression ou tension dans un corps solide”, *Ex. de math.*, **2**, (1827), 42–56.

[38] A. L. Cauchy, “Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre, ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique, ou non élastique”, *Ex. de math.*, **3**, (1828), 160–187.

[39] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[40] A. Frolicher and A. Nijenhuis, “Theory of vector-valued differential forms. Part I”, *Indagationes Math.*, **18(3)**, (1956), 338–359.

Поступила в редакцию
28 марта 2018 г.

Gudimenko A. I. Geometric formulations of the balance laws of continuum mechanics. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 150–176.

ABSTRACT

The balance laws of classical continuum mechanics are formulated in terms of differential forms (mass balance) and vector-valued differential forms (balances of momentum and energy) on the trajectory of material continuum. The traditional formulations of the laws are obtained as a consequence of the proposed formulations. Balance equations are written in a form suitable for an arbitrary observer. The formulation of the equation of motion of an ideal fluid in terms of differential forms is derived from the proposed formulations.

Key words: *conservation laws, vector-valued forms, reference frames.*