

УДК 519.212.3+004.89
MSC2010 60J05+70Q05

© Гузев М. А.^{1,2}, Цициашвили Г. Ш.^{1,2}, Осипова М. А.^{1,2}

Защита сетевой структуры автономными аппаратами

Анализируются две стратегии защиты сетевой группы тел от проникновения постороннего объекта. Первая стратегия основана на индивидуальной охране каждого тела, вторая предполагает применение автономных аппаратов для интегральной защиты сети. Показано, что во втором случае отношение минимального количества аппаратов, необходимых для обнаружения с вероятностью единица постороннего объекта, к количеству аппаратов, используемых в первой стратегии, обратно пропорционально корню квадратному из числа элементов сетевой структуры.

Ключевые слова: *мобильный объект, автономный аппарат, вероятность обнаружения.*

Введение

В настоящее время внимание исследователей сосредоточено на изучении структур, порождаемых группами самодвижущихся частиц [1–5]. Анализ этих структур приводит к необходимости решения различных задач, связанных с теорией динамических систем. Модельными объектами могут быть системы частиц, изучаемые в рамках статистики Максвелла – Больцмана, Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна [6]. Бильярдные системы, для которых стохастические свойства в их поведении могут возникать при малом числе частиц и даже при отсутствии случайных факторов [7], являются важным аналогом самодвижущихся частиц.

Число самодвижущихся частиц, как правило, считается достаточно большим. В частности, такие предположения используются при моделировании движения транспортных средств, толпы и стаи [4], финансовых рынков и других социально-экономических систем [5]. В связи с этим следует отметить модель квантовой экономики [8], в которой большое количество самодвижущихся частиц приводит к появлению синергетических эффектов — нелинейной (экспоненциальной или степенной) зависимости характеристик модели от числа частиц.

¹ Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8.

² Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7.

Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru (Гузев М. А.), guram@iam.dvo.ru (Цициашвили Г. Ш.), ma01975@list.ru (Осипова М. А.).

В то же время системы самодвижущихся частиц аналогичны по механическим свойствам системам мобильных роботов, для описания которых используются модели дифференциальных игр [9–11], лежащие в основе систем искусственного интеллекта. В рамках этих моделей решаются различные задачи: определение кратчайшей траектории робота или группы роботов, охватывающей всю область наблюдения [11–13], поиск минимального количества роботов, гарантирующих захват [13], и многие другие.

В последнее время особый интерес приобретают задачи защиты сетевых структур тел с помощью систем самодвижущихся частиц. Попытки решения этих задач привели исследователей к использованию моделей случайных графов [11–13].

Однако в этих моделях отсутствуют геометрические факторы, связанные с макроскопическими характеристиками исследуемой системы. В данной работе для макроскопической модели сетевой структуры самодвижущихся частиц специального вида показано уменьшение минимального числа аппаратов, защищающих рассматриваемую структуру.

1. Постановка задачи

Исследуемая в статье сетевая структура состоит из группы $N(n)$ тел, расположенных в узлах квадратной решетки, содержащейся в окружности радиусом $2nR_c$, где n — натуральное число (см. рис. 1). Защита этой группы тел может выполняться различными способами. Это приводит к необходимости рассмотрения нескольких моделей.

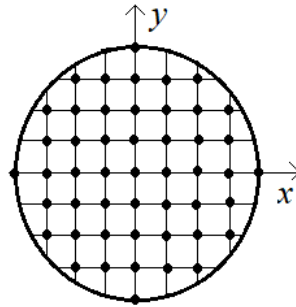


Рис. 1. Расположение тел в сетевой структуре.

Рассмотрим базовую модель (БМ), в соответствии с которой тело защищает от проникновения постороннего объекта группа аппаратов, движущихся по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью. Каждый аппарат снабжен локатором кругового обзора с радиусом обзора r (см. рис. 2). БМ подробно проанализирована в [14–16]. При этом предполагается, что движение аппаратов является равномерным по углу. Показано [14–16], что минимальное число M аппаратов, обеспечивающих единичную вероятность обнаружения объекта, приблизительно пропорционально радиусу R окружности, по которой движутся аппараты, деленному на

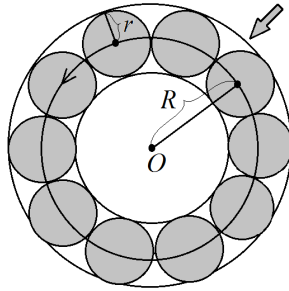


Рис. 2. Расположение кругов обзора локаторов для обнаружения постороннего объекта.

радиус r кругового обзора локатора, установленного на аппарате (см. затемненные круги на рис. 2):

$$\frac{\pi}{d} \leq M \leq \frac{\pi}{d} + 1, \quad d = \arcsin \frac{r}{R} \quad (r \ll R). \quad (1)$$

Возвращаясь к рассмотрению сетевой структуры, мы выбираем параметр $R_c = R + r$, а расстояние между узлами решетки равным $2(R + r)$. БМ приводит к следующей стратегии защиты сети: вокруг каждого тела формируется независимая группа аппаратов (модель I, см. рис. 3).

Рассмотрим альтернативную систему защиты $N(n)$ тел, в соответствии с которой аппараты движутся по окружности радиусом $2(n + 1)(R + r)$ (модель II, см. рис. 4). Задачей работы является оценка отношения числа аппаратов, необходимых для реализации модели I, к числу аппаратов, необходимых для реализации модели II, при обнаружении постороннего объекта с единичной вероятностью.

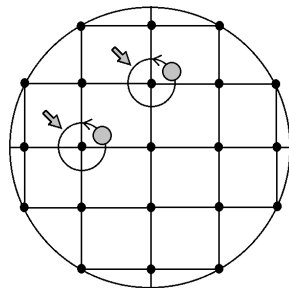


Рис. 3. Модель I.

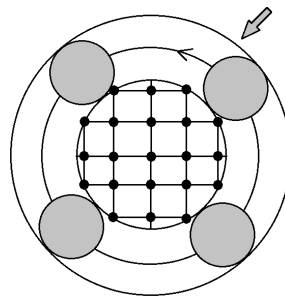


Рис. 4. Модель II.

2. Основные результаты

Очевидно, что в модели I окружности, по которым движутся аппараты вокруг разных $N(n)$ тел, не пересекаются и лежат полностью в круге радиусом $2(n + 1)(r +$

+R). Пусть $M_1(n)$ — минимальное количество аппаратов, позволяющих с вероятностью 1 обнаружить объект и реализующих данную стратегию. Тогда из (1) следует, что

$$N(n)\frac{\pi}{d} \leq M_1(n) \leq N(n) \left(\frac{\pi}{d} + 1 \right).$$

Ясно, что величина $M_1(n)$ имеет порядок $N(n)/d$: $M_1(n) \sim N(n)/d$.

В свою очередь, минимальное число $M_2(n)$ аппаратов, движущихся по окружности радиусом $2(n+1)(R+r)$ и позволяющих обнаружить с вероятностью единица объект в модели II, удовлетворяет соотношению

$$\pi \left(\arcsin \frac{r}{2(n+1)(R+r)} \right)^{-1} \leq M_2(n) \leq \pi \left(\arcsin \frac{r}{2(n+1)(R+r)} \right)^{-1} + 1.$$

Поскольку $r \ll R$, то $d \sim r/R \ll 1$, и числа $M_1(n)$, $M_2(n)$ имеют следующий порядок:

$$M_1(n) \sim \frac{N(n)R}{r}, \quad M_2(n) \sim \frac{nR}{r}. \quad (2)$$

Для вычисления $N(n)$ переходим от декартовой системы координат (x, y) к системе безразмерных координат (X, Y) : $X = \frac{x}{2(r+R)}$, $Y = \frac{y}{2(r+R)}$. Тогда окружность радиусом $r+R$ преобразуется в окружность радиусом $1/2$, а окружность C_n , содержащая сетевую структуру $N(n)$ тел, преобразуется в окружность радиусом n . При этом образом круга диаметром $2(R+r)$ является круг единичного диаметра. Тогда задача вычисления $N(n)$ редуцируется к задаче нахождения площади фигуры, состоящей из единичных квадратов, целиком содержащихся в круге радиусом n .

Теперь используем известные оценки для $N(n)$. Так, в [17, 18] (см., также [19]) приведена оценка К. Гаусса, который показал, что все единичные квадраты, пересекающие границу круга C_n , содержатся в кольце

$$\{(X, Y) : (n - \sqrt{2})^2 \leq X^2 + Y^2 \leq (n + \sqrt{2})^2\},$$

имеющем площадь $4\pi\sqrt{2}n$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left| \frac{N(n)}{\pi n^2} - 1 \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{n}. \quad (3)$$

Отсюда для больших значений n получаем следующую оценку:

$$N(n) \sim \pi n^2. \quad (4)$$

Комбинирование (2) с (4) дает

$$\frac{M_1(n)}{M_2(n)} \sim \frac{N(n)}{n} \sim n.$$

Оценка значения $N(n)$, приведенная в формуле (4), неоднократно уточнялась. В частности, К. Гаусс показал, что $\left| \frac{N(10)}{\pi \cdot 10^2} - 1 \right| \leq 0,01$, тогда как для $n = 10$ правая часть неравенства (3) примерно равна 0,566. Уточнение оценки значения $N(n)$ продолжается исследователями [20].

В работе рассмотрена модельная сетевая структура, элементы которой расположены в вершинах единичной квадратной решетки, содержащихся в круге большого радиуса. Однако полученные для этой модели оценки минимального числа аппаратов, обеспечивающих с единичной вероятностью обнаружение постороннего объекта, позволяют распространить результаты работы на другие условия геометрического расположения элементов сетевой структуры.

Список литературы

- [1] A. C. Corte, A. Battista, F. dell'Isola, "Referential description of the evolution of swarm of robots interacting with the closer neighbours: Perspectives of continuum modelling via higher gradient continua", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **80**, (2016), 209–220.
- [2] M. Brambilla, E. Ferrante, M. Birattari, M. Dorigo, "Swarm robotics: a review from the swarm engineering perspective", *Swarm Intell.*, **7**:1, (2013), 1–41.
- [3] A. Adamatzky, J. Jones, "Towards Physarum robots: computing and manipulating on water surface", *J. Bionic Eng.*, **5**:4, (2008), 348–357.
- [4] N. Bellomo, F. Brezzi, "Mathematics, complexity and multi scale features of large systems of self-propelled particles", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **25**, (2016), 207–214.
- [5] M. A. Herrero, J. Soler, "Cooperation, competition, organization: The dynamics of interacting living populations", *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **25**, (2015), 2407–2415.
- [6] M. Kardar, *Statistical Physics of Particles*, Cambridge University Press, 2007.
- [7] G. M. Zaslavsky, *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems. Second edition*, Imperial College Press, 2007.
- [8] V. P. Maslov, "Nonlinear Averages in Economics", *Mathematical Notes*, **78**:3-4, (2005), 347–363.
- [9] B. Alspach, "Searching and sweeping graphs: a brief survey", *Le Matematiche*, **59**:1, 2, (2006), 5–37.
- [10] P. Kafka, J. Faigl, P. Vana, "Random Inspection Tree Algorithm in visual inspection with a realistic sensing model and differential constraints", *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2016, 2782–2787.
- [11] C. M. Monasterio, G. Oshanin, G. Schehr, "First passages for a search by a swarm of independent random searchers", *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, **2011**:6, (2011), 6–22.
- [12] E. Galceran, M. Carreras, "A survey on coverage path planning for robotics?", *Robotics and Autonomous Systems*, **61**:12, (2013), 1258–1276.
- [13] T. H. Chung, G. A. Hollinger, V. Isler, "Search and pursuit-evasion in mobile robotics", *Autonomous Robots*, **31**:4, (2011), 299–316.
- [14] М. А. Гузев, Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, "Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта необитаемыми подводными аппаратами", *Материалы седьмой всероссийской научно-технической конференции "Технические проблемы освоения мирового океана"*, 2017, 426–433.
- [15] М. А. Гузев, Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова, М. С. Спорышев, "Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта необитаемыми подводными аппаратами как решение задачи Бюффона", *Дальневосточный математический журнал*, **2**, (2017), 191–200.
- [16] М. А. Guzev, G. Sh. Tsitsiashvili, M. A. Osipova, M. S. Sporyshev, "Probability of detection

- of an extraneous mobile object by autonomous unmanned underwater vehicles as a solution of the Buffon problem”, *ArXiv: 1801.10318 [cs.RO]*, 2018.
- [17] В. Вавилов, А. Устинов, “Окружности на решетках”, *Квант*, **6**, (2006).
- [18] G. H. Hardy, “On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares”, *Quart. J. Math.*, **46**, (1915), 263–283.
- [19] G. H. Hardy, Ramanujan, *Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*, Chelsea, New York, 1999.
- [20] M. N. Huxley, “Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function”, *Number theory for the millennium*, **II**, (2002), 275–290.

Поступила в редакцию
16 октября 2018 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ПФИ ДВО РАН “Дальний Восток” (проекты 18-5-050, 18-5-083), РФФИ (проект 17-07-00177).

Guzev M. A., Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. Protection of the network structure by autonomous vehicles. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2018. V. 18. No 2. P. 177–182.

ABSTRACT

Two strategies of protection of network group of bodies from penetration of foreign object are analysed. The first strategy is based on the individual protection of each body, the second involves the use of autonomous vehicles for integrated network protection. It is shown that in the second case the ratio of the minimum number of vehicles required for detection with probability one foreign object to the number of vehicles used in the first strategy is inversely proportional to the square root of the number of elements of the network structure.

Key words: *mobile object, autonomous vehicle, the probability of detection.*