УДК 517.52+512.742.72
MSC2010 11B37 + 33E05

© А. А. Илларионов[1]

О последовательности Сомос-4

В 2005 г. A.N.W. Hone получил явную формулу для последовательностей Сомос-4, не содержащих нулевых членов, в терминах сигма-функции Вейерштрасса. Мы доказываем, что произвольная последовательность, удовлетворяющая уравнению Сомос-4, определяется такой же формулой, если и только если она удовлетворяет некоторому детерминантному тождеству (аналог формулы сложения). Приводятся примеры последовательностей, которые удовлетворяют уравнению Сомос-4 и не удовлетворяют этому детерминантному тождеству.

Ключевые слова: *последовательности Сомоса, эллиптические функции, теоремы сложения.*

1. Введение

Пусть $k\in\{2,3,...\}$ и $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{[k/2]})\in\mathbb{C}^{[k/2]}\setminus\{0\}$. Последовательность комплексных чисел $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющая квадратичному разностному уравнению

$$S_{n+k}S_n = \sum_{j\,=\,1}^{[k/2]} \alpha_j S_{n+k-j}S_{n+j} \qquad (n\in\mathbb{Z}),$$

называется *последовательностью Сомос-k*. Такие последовательности обладают рядом замечательных свойств и изучались многими авторами (см. [2–13] и ссылки там).

Последовательность Сомос-4 удовлетворяет (для любого $n\in\mathbb{Z}$) уравнению

$$S_{n+2}S_{n-2} = \alpha S_{n+1}S_{n-1} + \beta S_n^2. \tag{1}$$

Ее явный вид нетрудно найти при $\alpha\beta=0$. Если $\alpha\beta\neq 0$, то согласно [5]

$$S_n = \sigma(un+v)e^{P(n)}, \tag{2}$$

где $u,v\in\mathbb{C}$, P — многочлен степени $\leqslant 2$, а σ — сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированая с некоторой (возможно, вырожденной) решеткой. Приведенное в [5]

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск Электронная почта: `illar_a@list.ru`

доказательство основано на исследовании вспомогательной последовательности $\tau_n = S_{n+1}S_{n-1}S_n^{-2}$. Поэтому оно справедливо, если $S_n \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ (в [5] это условие явно не указано). Возникает задача: *можно ли любую последовательность, удовлетворяющую уравнению (1), записать в виде (2)?* Эта проблема тесно связана со следующим вопросом. Последовательность Сомос-4 удовлетворяет для любых целых $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ детерминантному равенству (аналог теоремы сложения):

$$D_S\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} S_{n_1+m_1}S_{n_1-m_1} & S_{n_1+m_2}S_{n_1-m_2} & S_{n_1+m_3}S_{n_1-m_3} \\ S_{n_2+m_1}S_{n_2-m_1} & S_{n_2+m_2}S_{n_2-m_2} & S_{n_2+m_3}S_{n_2-m_3} \\ S_{n_3+m_1}S_{n_3-m_1} & S_{n_3+m_2}S_{n_3-m_2} & S_{n_3+m_3}S_{n_3-m_3} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Однако все известные доказательства (см. [7, 11] и ссылки там) этого свойства справедливы для последовательностей без нулевых членов. Вопрос: *справедливо ли свойство (3) для любой последовательности, удовлетворяющей уравнению (1)?*

В настоящей заметке доказываются следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$, последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет уравнению (1). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

a) *последовательность S_n определяется формулой вида (2);*

b) *последовательность S_n удовлетворяет равенству (3).*

Теорема 2. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$. Тогда существует последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, которая удовлетворяет уравнению (1) и не определяется формулой вида (2) (не удовлетворяет равенству (3)).*

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$, последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет уравнению (1) и не равна тождественно нулю. Определим $T = \{n \in \mathbb{Z} : S_n = 0\}$. Тогда*

$$d \equiv \min\{|t' - t''| : \quad t', t'' \in T, \quad t' \neq t''\} \geqslant 4.$$

Доказательство. По определению величины d найдется такое целое k, что $S_k = S_{k+d} = 0$.

1. Пусть $d = 3$, то есть $S_k = S_{k+3} = 0$. Выбирая в (1) $n = k+1$, получаем, что $S_{k+1} = 0$. Это возможно только при $d = 1$.

2. Пусть $d = 2$, то есть $S_k = S_{k+2} = 0$. Выбирая в (1) $n = k$, получаем, что $S_{k+1}S_{k-1} = 0$. Это возможно только при $d = 1$.

3. Пусть $d = 1$, то есть $S_k = S_{k+1} = 0$. Выбирая в (1) $n = k+2$, получаем, что $S_{k+2} = 0$. Тогда, выбирая $n = k+3$, получаем, что $S_{k+3} = 0$. Продолжая процесс, приходим к выводу $S_n = 0$ при всех $n > k+1$. Аналогичным образом доказывается, что $S_n = 0$ для всех $n < k$. Получили противоречие с условием. □

Лемма 2. *Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не равна тождественно нулю. Тогда равенство (3) выполняется, если и только если существуют такие последовательности $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, что для всех целых n и m*

$$S_{n+m}S_{n-m} = a_n b_m + c_n d_m. \tag{4}$$

Доказательство повторяет рассуждения из [14, § 4] (или см. [11,15]).

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет равенству (3) и не равна тождественно нулю. Если $S_0 = 0$, $S_1S_2S_3 \neq 0$, то последовательность S_n однозначно определяется своими членами с номерами $\pm1, 2, 3, 4$.*

Доказательство. Пусть $S_{\pm1}$, S_2, S_3, S_4 известны. Используя (3), получаем

$$D_S\begin{pmatrix}1 & 2 & n\\ 0 & 1 & n-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} S_1^2 & 0 & S_nS_{2-n}\\ S_2^2 & S_3S_1 & S_{n+1}S_{3-n}\\ S_n^2 & S_{n+1}S_{n-1} & S_{2n-1}S_1\end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

$$D_S\begin{pmatrix}1 & 2 & n+1\\ 0 & 1 & n-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} S_1^2 & 0 & S_nS_{2-n}\\ S_2^2 & S_3S_1 & S_{n+1}S_{3-n}\\ S_{n+1}^2 & S_{n+2}S_n & S_{2n}S_2\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Полагая в (6) $n=-1$, находим S_{-2}. Пусть мы определили все S_n с номерами $n\in\{-2k,\ldots,2k+2\}$, где $k\in\mathbb{N}$. Тогда S_{-2k-1}, S_{2k+3} находятся из соотношения (5), а S_{-2k-1}, S_{2k+3} — из соотношения (6). □

Лемма 4. *Пусть $S_2, S_3, S_4 \in \mathbb{C}$, причем $S_2S_3 \neq 0$. Тогда существуют $u \in \mathbb{C}$ и сигма-функция Вейерштрасса σ такие, что $\sigma(un)\sigma(u)^{-n^2} = S_n$ при $n = 2, 3, 4$.*

Лемма, по сути, доказана в [1, доказательство теоремы 12.1]. Отметим, что в [1] рассматривался случай целочисленных A_2, A_3, A_4. Однако приведенные там рассуждения остаются в силе и для случая комплексных A_2, A_3, A_4.

Доказательство теоремы 1. Пусть последовательность S_n определяется формулой (2). Используя классическую формулу сложения

$$\sigma(x+y)\sigma(x-y) = \sigma^2(x)\sigma^2(y)(\wp(y) - \wp(x)) \qquad (\wp = -(\ln\sigma)''), \tag{7}$$

нетрудно проверить, что выполняется разложение вида (4). Тогда по лемме 2 справедливо равенство (3).

Пусть последовательность S_n удовлетворяет уравнениям (1), (3). Если она не имеет нулевых членов, то эта последовательность определяется формулой вида (2) согласно результатам [5]. Пусть S_n имеет нулевые члены, например, $S_t=0$. Тогда $S_{t\pm1}\neq0$, $S_{t+2}S_{t+3}\neq0$ по лемме 1. Положим $\hat S_n = S_{n+t}e^{d_1n+d_2}$, где постоянные d_1, d_2 выберем так, что $\hat S(\pm1) = \pm1$. Тогда

$$\hat S_{\pm1} = \pm1, \quad \hat S_0 = 0, \quad \hat S_2\hat S_3 \neq 0.$$

Согласно лемме 4 найдутся $u\in\mathbb{C}$ и сигма-функция Вейерштрасса σ такие, что $A_n = \hat S_n$, $n=2,3,4$, где $A_n = \sigma(un)\sigma(u)^{-n^2}$. Так как S_n удовлетворяет разложению вида

(4), то и $\hat{S}_n$ удовлетворяет такому же разложению (с другими последовательностями в правой части). Из (7) следует, что A_n также удовлетворяет разложению вида (4). Кроме того, $A_{\pm 1} = \pm 1$. Следовательно, $A_n = \hat{S}_n$, $n = -1, 0, 1, 2, 3$. Поэтому $A_n = \hat{S}_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$ согласно лемме 3. Значит, последовательность $S_n = A_{n-t}e^{-d_1(n-t)-d_2}$ имеет вид (2).

3. Доказательство теоремы 2

Лемма 5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$, конечная последовательность $\{S_n\}_{n=-1}^{r}$ ($r \geqslant 3$) удовлетворяет уравнению (1) при $n = 1, 2, \ldots, r-2$, причем $S_0 = 0$, $S_1 S_2 S_3 \neq 0$. Определим $T = \{n \in \{-1, \ldots, r\} : S_n = 0\}$. Тогда*

$$d \equiv \min\{|t' - t''| : \quad t', t'' \in T, \quad t' \neq t''\} \geqslant 4.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 1 и поэтому опускается.

Лемма 6. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$. Пусть $S_n \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, 3$, причем*

$$S_0 = 0, \quad S_1 S_2 S_3 \neq 0, \quad \alpha S_1 S_3 + \beta S_2^2 = 0. \tag{8}$$

Для любых $x, y \in \mathbb{C}$ конечную последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{3}$ можно продолжить до последовательности $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющей уравнению (1), таким образом, что $S_4 = x$, $S_{-4} = y$.

Доказательство. Положим $S_4 = x$. Согласно (8) равенство (1) выполняется при $n = 2$. Определим

$$S_{-1} = \beta \frac{S_1^2}{S_3}, \quad S_{-2} = \alpha \frac{S_1 S_{-1}}{S_2}, \quad S_{-3} = \beta \frac{S_{-1}^2}{S_1}.$$

Так как $S_0 = 0$, то уравнение (1) справедливо при $n = \pm 1, 0$. Кроме того,

$$\alpha S_{-1} S_{-3} + \beta S_{-2}^2 = \alpha\beta \frac{S_{-1}^3}{S_1} + \beta\alpha^2 \frac{S_1^2 S_{-1}^2}{S_2^2} = \alpha\beta S_{-1}^2 \left(\frac{S_{-1}}{S_1} + \alpha \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) =$$
$$= \alpha\beta S_{-1}^2 \left(\beta \frac{S_1^2}{S_3 S_1} + \alpha \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) = \alpha\beta S_{-1}^2 S_1 \cdot \frac{\beta S_2^2 + \alpha S_1 S_3}{S_3 S_2^2} = 0.$$

Поэтому, полагая $S_{-4} = y$, получаем, что уравнение (1) выполняется и при $n = -2$. Таким образом, мы построили члены $S_{-4}, \ldots, S_4$ нашей последовательности так, что уравнение (1) выполняется при $n = 0, \pm 1, \pm 2$.

Элементы $S_5, S_6, \ldots$ определим по индукции. Пусть $S_4, \ldots, S_{r+3}$ ($r \in \mathbb{N}$) выбраны, причем уравнение (1) выполняется при всех n от -2 до $r+1$. Если $S_r \neq 0$, то полагаем

$$S_{r+4} = \frac{\alpha S_{r+3} S_{r+1} + \beta S_{r+2}^2}{S_r}.$$

Тогда соотношение (1) выполняется при $n=r+2$. Пусть $S_r=0$. Рассматривая (1) при $n=r-2,r-1,r,r+1$, получаем равенства

$$\alpha S_{r-1}S_{r-3}+\beta S_{r-2}^2=0, \quad S_{r+1}=\beta\frac{S_{r-1}^2}{S_{r-3}}, \quad S_{r+2}=\alpha\frac{S_{r+1}S_{r-1}}{S_{r-2}}, \quad S_{r+3}=\beta\frac{S_{r+1}^2}{S_{r-1}}.$$

Из них вытекает, что $\alpha S_{r+3}S_{r+1}+\beta S_{r+2}^2=0$. Поэтому (1) выполняется и для $n=r+2$ при любом выборе S_{r+4}.

Элементы $S_{-5},S_{-6},\ldots$ определяются аналогичным образом. □

Лемма 7. *Пусть выполняются условия леммы 6. Для любого $x\in\mathbb{C}$ существует такой $y_0\in\mathbb{C}$, что для всех $y\neq y_0$ последовательность S_n, построенная в лемме 6, удовлетворяет уравнению (1) и не удовлетворяет равенству (3).*

Доказательство. Пусть S_n — последовательность, построенная в лемме 6. Элементы S_{-1}, S_3, S_4 однозначно определяются выбором трех параметров x,S_1,S_2. Предположим, что последовательность S_n также удовлетворяет уравнению (3). Тогда она единственным образом определяется своими членами с номерами $\pm1,2,3,4$ согласно лемме 3. Таким образом, элемент S_{-4} однозначно определяется числами S_1,S_2,x, т.е.

$$S_4=f(S_1,S_2,x), \quad f:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}.$$

Осталось положить $y_0=f(S_1,S_2,x)$. □

Доказательство теоремы 1 следует из леммы 7 и теоремы 1.

Список литературы

[1] M. Ward, “Memoir on elliptic divisibility sequences”, *Amer. J. Math.*, **70**, (1948), 31–74.

[2] R. M. Robinson, “Periodicity of Somos sequences”, *Proc. AMS*, **116**:3, (1992), 613–619.

[3] R. Shipsey, *Elliptic Divisibility Sequences*, PhD Thesis, L.: Univ. London, 2000.

[4] C. S. Swart, *Elliptic curves and related sequences*, PhD Thesis, L.: Royal Holloway, Univ. London, 2003.

[5] A. N. W. Hone, “Elliptic curves and quadratic reccurence sequences”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **37**, (2005), 161-171.

[6] A. J. van der Poorten, “Hyperelliptic curves, continued fractions, and Somos sequences”, *Dynamics & Stochastics, Lecture Notes–Monograph Series*, v. 48, ed. Denteneer, Dee and Hollander, Frank den and Verbitskiy, Evgeny, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio, USA, 2006, 212–224.

[7] A. J. van der Poorten, C. S. Swart, “Recurrence relations for elliptic sequences: every Somos 4 is a Somos k”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **38**:4, (2006), 546–554.

[8] A. N. W. Hone, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences”, *Trans. AMS*, **359**:10, (2007), 5019-5034.

[9] A. N. Hone, C. Swart, “Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences”, *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, **145**:1, (2008), 65–85.

[10] A. N. Hone, “Analytic solutions and integrability for bilinear recurrences of order six”, *Applicable Analysis: An International Journal*, **89**:4, (2010), 473–492.

[11] X.Ma, “Magic determinants of Somos sequences and theta functions”, *Discrete Math.*, **210**:1, (2010), 1–5.

[12] Y. Fedorov, A. N. Hone, "Sigma-function solution to the general Somos-6 recurrence via hyperelliptic Prym varieties", *Journal of Integrable Systems*, **1**:1, (2016).

[13] В. А. Быковский, А. В. Устинов, "Сомос-4 и эллиптические системы последовательностей", *ДАН*, **471**:1, (2016), 7–10.

[14] В. А. Быковский, "Гиперквазимногочлены и их приложения", *Функц. анализ и его приложения*, **50**:3, (2016), 34–46.

[15] А. А. Илларионов, "Функциональное уравнение и сигма-функция Вейерштрасса", *Функц. анализ и его приложения*, **50**:4, (2016), 43–54.

Поступила в редакцию
16 октября 2018 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 18-01-00638).

Illarionov A. A. On the Somos-4 sequence. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 183–188.

ABSTRACT

In 2005 A. N. W. Hone has obtained an explicit formula for Somos-4 sequences in terms of the Weierstrass sigma function. The proof is valid only for sequences without zero terms. We prove that arbitrary sequence satisfying the Somos-4 equation is determined by the same formula iff it satisfies some determinant identity (analogue of the formula of addition). We give examples of sequences that satisfy the Somos-4 equation but do not satisfy the determinant identity.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, addition theorems.*