Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 195–205

УДК УДК 517.95+517.977
MSC2010 35J05

© Л. В. Илларионова[1]

О задаче оптимального управления для уравнений дифракции акустических волн

Рассматривается задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн на трехмерном включении в однородной среде. Она заключается в минимизации отклонения давления звукового поля во включении от заданного за счет изменения источников звука во внешней среде. Доказана разрешимость задачи в случае, когда коэффициент поглощения внешней среды отличен от нуля. Предложен алгоритм решения задачи и обоснована его сходимость.

Ключевые слова: *дифракция акустических волн, уравнение Гельмгольца, оптимальное управление.*

Введение

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненном однородной изотропной средой, имеется изотропное включение Ω_i (ограниченное открытое множество). Пусть $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_i$ (внешняя среда), а $\rho_{i(e)}$, $c_{i(e)}$, $\gamma_{i(e)}$ — плотность, скорость распространения акустических колебаний и коэффициент поглощения в Ω_i и Ω_e соответственно.

Предположим, что во множестве Ω_e имеются источники звука, которые возбуждают поле давлений с комплексной амплитудой Φ_0. Звуковые волны распространяются в пространстве и, достигая включения, рассеиваются. В результате в Ω_e возникают отраженные волны, а в Ω_i — проходящие волны. Комплексная амплитуда Φ полного поля давлений равна Φ_i в Ω_i и $\Phi_e+\Phi_0$ в Ω_e, где Φ_i, Φ_e — комплексные амплитуды поля давлений проходящего и отраженного волновых полей. При некоторых дополнительных предположениях они удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\Delta\Phi_i + k_i^2\Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \Delta\Phi_e + k_e^2\Phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \tag{1}$$

условиям непрерывности полного поля давлений и нормальных составляющих поля смещений при переходе через границу $S = \partial\Omega_i$ включения Ω_i

$$\Phi_i - \Phi_e = \Phi_0, \quad p_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - p_e\frac{\partial\Phi_e}{\partial n} = p_e\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \text{ на } S, \tag{2}$$

[1] ВЦ ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: illarionova_l@list.ru

а также условию излучения

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial |x|} - ik_e\Phi_e = o\left(|x|^{-1}\right) \qquad \text{при } |x| \to \infty, \tag{3}$$

которое заключается в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности [1]. Здесь $n = n(x)$ — вектор единичной нормали к поверхности S, направленный в сторону Ω_e,

$$k^2_{i(e)} = \frac{\omega(\omega + i\gamma_{i(e)})}{c^2_{i(e)}}, \quad p_{i(e)} = \frac{1}{\rho_{i(e)}\omega(\omega + i\gamma_{i(e)})}, \tag{4}$$

а ω — круговая частота колебаний.

Задача дифракции акустических волн в однородной безграничной среде с включением состоит в нахождении комплекснозначных функций Φ_i,Φ_e, удовлетворяющих уравнениям (1)–(3).

Исследованию задачи (1)–(3) посвящено большое число работ. Вопросы существования и единственности классического решения исследованы в [2, 3]. Для численного решения задачи применялись конечно-разностные и проекционно-сеточные методы [4, 5], а также прямой [6] и непрямой [2, 3, 7–9] варианты метода граничных интегральных уравнений. Различные задачи оптимизации для уравнений акустики рассматривались ранее в [6, 10–15] и ряде других статей.

Постоянно появляются новые области применения теории оптимизации акустических волн. В [16] такой подход применен для решения задачи о минимизации излучения мобильных телефонов.

В статье [17, 18] исследована следующая задача оптимального управления: изменяя источники звука в Ω_e (то есть управлением является Φ_0), нужно минимизировать отклонение поля давлений в Ω_i (либо на некотором $Q \subset \Omega_i$) от некоторого требуемого; при этом изменение источников звука не должно быть «большим». С математической точки зрения эта задача заключается в нахождении неизвестных функций $f : S \to \mathbb{C}$ (управление) и $\Phi_i : \overline{\Omega}_i \to \mathbb{C}$, $\Phi_e : \overline{\Omega}_e \to \mathbb{C}$ (состояние), удовлетворяющих условиям (см. [17])

$$\Delta\Phi_i + k_i^2\Phi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \qquad \Delta\Phi_e + k_e^2\Phi_e = 0 \text{ в } \Omega_e, \tag{5}$$

$$\Phi_i - \Phi_e = \mathrm{g}, \quad p_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial n} - p_e\frac{\partial\Phi_e}{\partial n} = f, \text{ на } S, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial |x|} - ik_e\Phi_e = o\left(|x|^{-1}\right) \qquad \text{при } |x| \to \infty, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_Q |\Phi_i - \Phi_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\int\limits_S |f - f_d|^2 \, ds \to \min, \qquad f \in K, \tag{8}$$

где g, Φ_d, f_d — заданные функции, K — некоторое множество функций, заданных на S (множество допустимых управлений), а $\lambda \in [0, +\infty)$.

Далее всюду считаем, что $S \in C^{1,\beta}$, $\beta > 0$, $Q \subset \Omega_i$ — область с границей из $C^{0,1}$ либо поверхность класса $C^{0,1}$; ω, $c_{i(e)}$, $\rho_{i(e)}$ — положительные, а $\gamma_{i(e)}$ — неотрицательные вещественные числа, комплексные $k_{i(e)}$ и $p_{i(e)}$ определяются (4).

В [17] исследована корректность задачи (5)–(8), предложен алгоритм решения и обоснована его сходимость при условии, что коэффициенты поглощения γ_i и γ_e — положительные числа. В настоящей работе рассматривается более сложный случай, когда

$$\gamma_e > 0, \quad \gamma_i \geqslant 0.$$

Отметим, что задача дифракции в *безграничной* среде (5)–(7), как правило, исследуется с помощью метода граничных интегральных уравнений в пространствах Гельдера. Однако решение задачи оптимального управления (5)–(8) следует искать в пространствах Соболева. Это приводит к необходимости дополнительного исследования прямой задачи (5)–(7). Основная проблема заключается в получении априорных оценок ее решения. Дальнейшее рассмотрение проводится по схеме, предложенной в [17].

1. Разрешимость задачи дифракции

Пусть $W_p^s(D)$ $(s\in\mathbb{R},\ p\in[1,\infty))$ — пространство Соболева комплекснозначных функций, заданных на множестве D. Тогда $H^s(D)=W_2^s(D)$, $L^p(D)=W_p^0(D)$.

Пусть $H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)$ — множество, состоящее из функций $\Phi:\Omega_i\cup\Omega_e\to\mathbb{C}$ таких, что $\Phi|_{\Omega_i}\in H^1(\Omega_i)$, $\Phi|_{\Omega_e}\in H^1(\Omega_e)$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\Phi,\Psi)_{H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)} = (\Phi,\Psi)_{H^1(\Omega_i)} + (\Phi,\Psi)_{H^1(\Omega_e)}.$$

Через $v|_S$ обозначаем след функции v на поверхности S. Если X — некоторое нормированное пространство, то X^* — пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на X. Значение функционала $f\in X^*$ на элементе $x\in X$ обозначаем $\langle f,x\rangle$.

Лемма 1 ([17]). *Пусть $\gamma_e > 0$. Тогда любое решение $\Phi_i \in C^1(\overline{\Omega}_i)\cap C^2(\Omega_i)$, $\Phi_e \in C^1(\Omega_e\cup S)\cap C^2(\Omega_e)$ задачи дифракции (5)–(7) удовлетворяет соотношениям*

$$\Phi_e \in H^1(\Omega_e),$$

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^3) \qquad p_i\int\limits_{\Omega_i}\nabla\Phi_i\nabla v\,dx - p_ik_i^2\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i v\,dx + {}$$

$$+\,p_e\int\limits_{\Omega_e}\nabla\Phi_e\nabla v\,dx - p_ek_e^2\int\limits_{\Omega_e}\Phi_e v\,dx = \langle f, v|_S\rangle, \tag{9}$$

$$\Phi_i|_S - \Phi_e|_S = \mathrm{g}, \tag{10}$$

где

$$\langle f, v|_S\rangle = \int\limits_S f v\,dS.$$

Определение. Функцию $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)$, удовлетворяющую (9), (10), где

$$\Phi_i = \Phi|_{\Omega_i}, \qquad \Phi_e = \Phi|_{\Omega_e},$$

будем называть *обобщенным решением* задачи дифракции (5)–(7).

Согласно лемме 1 любое классическое решение задачи (5)–(7) является обобщенным. Далее (следствие 1) мы докажем, что при достаточно гладких исходных данных обобщенное решение является классическим. Значит, определение введено корректно.

Лемма 2. *Пусть* $\gamma_e > 0$. *Определим отображение* $A_0 : H^1(\mathbb{R}^3) \to \big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$ *по формуле*

$$\forall \Phi, v \in H^1(\mathbb{R}^3) \qquad \langle A_0\Phi, v\rangle = p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla v\, dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla v\, dx - p_e k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} \Phi v\, dx.$$

Тогда A_0 *— линейный ограниченный непрерывно обратимый оператор.*

Доказательство. Линейность и ограниченность оператора A_0 очевидны. Докажем его непрерывную обратность. Согласно теореме Банаха об обратном операторе для этого достаточно установить, что

$$\ker A_0 = \{0\}, \quad \operatorname{Im} A_0 = \big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*.$$

Здесь и далее $\ker A$ — ядро, а $\operatorname{Im} A$ — образ оператора A.

Пусть $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ и $F = A_0\Phi$. Докажем априорную оценку

$$\|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C\|F\|, \tag{11}$$

где $\|F\| = \|F\|_{(H^1(\Omega))^*}$. Здесь и далее через $C, C_1, \ldots$ обозначаем положительные вещественные постоянные, которые зависят только от поверхности S и коэффициентов $k_{i(e)}, p_{i(e)}$. Если постоянная C_1 зависит еще от одного параметра, например, δ, то пишем $C_1(\delta)$.

Прежде всего заметим, что функционал $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^3) \to \|\Phi\|$, где

$$\|\Phi\|^2 = \|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)}$$

является эквивалентной нормой на пространстве $H^1(\mathbb{R}^3)$. Это вытекает из оценки

$$\|\Phi\|_{L^2(\Omega_i)} \leqslant C(\|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega_i)} + \|\Phi|_S\|_{L^2(S)}) \leqslant C(\|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega_i)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega_e)}).$$

Рассмотрим вещественную часть равенства

$$\langle A_0\Phi, \overline{\Phi}\rangle \equiv p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx - p_e k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} \Phi\overline{\Phi}\, dx = \langle F, \overline{\Phi}\rangle. \tag{12}$$

Используя неравенства Гельдера и Коши ($ab \leqslant a^2/2 + b^2/2$), получаем

$$\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)} \leqslant C_1\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + C_2\|F\| \cdot \|\Phi\| \leqslant C_1\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{\|\Phi\|^2}{2} + \frac{C_2^2\|F\|^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\|\Phi\|^2 \leqslant C_3(\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|F\|^2). \tag{13}$$

Рассмотрим теперь мнимую часть равенства (12). Учитывая, что

$$\operatorname{Im} p_i \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} p_e < 0, \quad \operatorname{Im} p_e k_e^2 = 0, \tag{14}$$

приходим к оценке

$$\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)} \leqslant C_4 \|F\| \cdot \|\Phi\|. \tag{15}$$

Для любого $\delta \in (0,1)$ пусть θ_δ — функция-«срезка», удовлетворяющая условиям

$$\theta_\delta \in C^1(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leqslant \theta_\delta \leqslant 1, \quad \theta_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega_i, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega_e, \quad d(x,S) > \delta, \end{cases}$$

где $d(x,S)$ — расстояние от точки x до поверхности S. Пусть

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega_e : d(x,S) < \delta\}.$$

Отметим, что $\operatorname{meas}\Omega_\delta = O(\delta)$, $\|\theta_\delta\|_{L^3(\Omega_e)} = O(\delta^{1/3})$. Из равенства

$$\langle A_0\Phi, \overline{\Phi}\theta_\delta\rangle \equiv p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\,dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla(\overline{\Phi}\theta_\delta)\,dx - p_e k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} \Phi\overline{\Phi}\theta_\delta\,dx = \langle F, \overline{\Phi}\theta_\delta\rangle$$

вытекает, что

$$C_5 \|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\Omega_i)} \leqslant \left|\int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla(\overline{\Phi}\theta_\delta)\,dx\right| + \left|\int\limits_{\Omega_\delta} |\Phi|^2\theta_\delta\,dx\right| + |\langle F, \overline{\Phi}\theta_\delta\rangle|.$$

Используя неравенства Гельдера, Коши и (15), получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi_i\nabla(\overline{\Phi}\theta_\delta)\,dx\right| \leqslant C_6(\delta)(\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)} + \|\nabla\Phi\|_{L^2(\Omega_e)}\|\Phi\|_{L^2(\Omega_e)}) \leqslant$$
$$\leqslant C_7(\delta)\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)} + \delta^{1/3}\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)} \leqslant C_8(\delta)\|\Phi\| \cdot \|F\| + \delta^{1/3}\|\Phi\|^2_{L^2(\Omega_e)}$$
$$\left|\int\limits_{\Omega_\delta} |\Phi|^2\theta_\delta\,dx\right| \leqslant \|\Phi\|^2_{L^3(\Omega_\delta)}\|\theta_\delta\|_{L^3(\Omega_\delta)} \leqslant C_9\|\Phi\|^2_{L^3(\Omega_1)}\delta^{1/3}.$$

Учитывая непрерывность вложения $H^1(\Omega_1) \subset L^3(\Omega_1)$, заключаем, что

$$\|\nabla\Phi\|^2_{L^2(\Omega_i)} \leqslant C_{10}(\delta)\|F\| \cdot \|\Phi\| + C_{11}\|\Phi\|^2\delta^{1/3}.$$

Подставляя последнюю оценку и (15) в (13), приходим к выводу:

$$\|\Phi\|^2 \leqslant C_{12}(\delta)\|F\| \cdot \|\Phi\| + C_{13}\|\Phi\|^2\delta^{1/3} + \|F\|^2.$$

Из него вытекает (11), так как δ можно выбрать сколь угодно малым, .

Согласно оценке (11) оператор A_0 является нормально разрешимым и имеет нулевое ядро. Осталось доказать, что $\operatorname{Im} A_0$ плотен в $\big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$. Пусть A_0^* — оператор, сопряженный к A_0. Возьмем любой $\Phi \in \ker A_0^*$. Тогда

$$0 = \langle A_0^* \overline{\Phi}, \Phi \rangle = p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx - k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} \Phi\overline{\Phi} dx.$$

Рассмотрим мнимую часть этого равенства. Учитывая (14), получаем $\nabla\Phi = 0$ в Ω_e. Так как $\Phi \in L^2(\Omega_e)$, то $\Phi = 0$ в Ω_e. Но тогда $\nabla\Phi = 0$ в Ω_i. Поэтому $\Phi = 0$, $\ker A_0^* = \{0\}$. Значит, $\operatorname{Im} A_0$ плотен в $\big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$. Так как множество $\operatorname{Im} A_0$ замкнуто, то $\operatorname{Im} A_0 = \big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$. Все условия теоремы Банаха выполнены, лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $\gamma_e > 0$. Тогда для любого $F \in \big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$ существует единственное решение $\Phi \in H^1(\mathbb{R}^3)$ уравнения*

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla v\, dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla v\, dx - \\ - p_e k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} \Phi v\, dx - p_i k_i^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi v\, dx. = \langle F, v \rangle, \quad (16)$$

причем справедлива априорная оценка:

$$\|\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C \|F\|_{(H^1(\mathbb{R}^3))^*}.$$

Доказательство. Уравнение (16) запишем в операторном виде

$$A\Phi = F,$$

где $A = A_0 + A_1 : H^1(\mathbb{R}^3) \to \big(H^1(\mathbb{R}^3)\big)^*$, оператор A_0 введен в лемме 2, а отображение A_1 определяется формулой

$$\forall \Phi, v \in H^1(\mathbb{R}^3) \quad \langle A_1\Phi, v \rangle = -p_i k_i^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi v\, dx.$$

Для доказательства леммы достаточно установить непрерывную обратимость оператора A. Оператор A_0 — линейный ограниченный и непрерывно обратимый. Оператор A_1 — линейный и, в силу компактности вложения $H^1(\Omega_i) \subset L^2(\Omega_i)$, компактный. Значит, оператор $A = A_0 + A_1$ — фредгольмовый. Согласно первой теореме Фредгольма осталось доказать, что $\ker A = \{0\}$.

Пусть $\Phi \in \ker A$. Рассмотрим мнимую часть уравнения

$$0 = \langle A\Phi, \overline{\Phi} \rangle = p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx + p_e \int\limits_{\Omega_e} \nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\, dx - p_e k_e^2 \int\limits_{\Omega_e} |\Phi|^2\, dx - p_i k_i^2 \int\limits_{\Omega_i} |\Phi|^2\, dx.$$

Учитывая (14), получаем, что $\nabla\Phi = 0$ в Ω_e. Так как $\Phi \in L^2(\Omega_e)$, то $\Phi = 0$ в Ω_e. Значит,

$$\forall v \in H^1(\Omega_i) \quad \int\limits_{\Omega_i} \nabla\Phi\nabla v\, dx - k_i^2 \int\limits_{\Omega_i} \Phi v\, dx = 0,$$

$$\Phi|_S = 0.$$

Поэтому

$$\Delta\Phi + k_i^2\Phi = 0 \text{ в } \Omega_i, \quad \Phi|_S = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_S = 0.$$

Отсюда, согласно классическим результатам об однозначности продолжения решений эллиптических уравнений, следует, что $\Phi = 0$ в Ω_i. Значит, $\Phi = 0$, $\ker A = \{0\}$, оператор A — непрерывно обратимый. Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть $\gamma_e > 0$, $\mathrm{g} \in H^{1/2}(S)$, $f \in H^{-1/2}(S)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задачи дифракции (5)–(7), причем*

$$\|\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)} \leqslant C\left(\|f\|_{H^{-1/2}(S)} + \|\mathrm{g}\|_{H^{1/2}(S)}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Функцию g можно продолжить непрерывным образом в Ω_i до функции из класса $H^1(\Omega_i)$. Обозначим продолжение через $\tilde{\mathrm{g}}$. Будем искать решение в виде $\Phi = \Phi_\mathrm{g} + \Psi$, где

$$\Phi_\mathrm{g} = \begin{cases} \tilde{\mathrm{g}} & \text{в } \Omega_i, \\ 0 & \text{в } \Omega_e, \end{cases}$$

Новая неизвестная функция $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ должна удовлетворять уравнению (16), в котором заменяем Φ на Ψ и полагаем

$$\langle F, v\rangle = -p_i \int\limits_{\Omega_i} \nabla\tilde{\mathrm{g}}\nabla v\, dx + p_i k_i^2 \int\limits_{\Omega_i} \tilde{\mathrm{g}} v\, dx + \langle f, v|_S\rangle,$$

а также граничному условию

$$\Psi_i|_S - \Psi_e|_S = 0.$$

Последнее требование эквивалентно тому, что $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Согласно лемме 3 существует единственная функция Ψ, удовлетворяющая этим условиям, причем

$$\|\Psi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\|F\|_{(H^1(\mathbb{R}^3))^*} \leqslant C_1\|\tilde{\mathrm{g}}\|_{H^1(\Omega_i)} + C_2\|f\|_{H^{-1/2}(S)} \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|\mathrm{g}\|_{H^{1/2}(S)} + C_2\|f\|_{H^{-1/2}(S)}.$$

Из последней оценки и очевидного неравенства

$$\|\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)} \leqslant \|\Phi_\mathrm{g}\|_{H^1(\mathbb{R}^3\setminus S)} + \|\Psi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_4\|\mathrm{g}\|_{H^{1/2}(S)} + \|\Psi\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}.$$

вытекает (17). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $\gamma_e > 0$, $f \in C^{0,\alpha}(S)$, $\mathrm{g} \in C^{1,\alpha}(S)$, *где* $\alpha \in (0,1)$. *Тогда обобщенное решение задачи дифракции (5)–(7) является классическим.*

Доказательство. Из условий следствия вытекает, что классическое решение существует и единственно (см., например, [3]). Согласно лемме 1 оно является обобщенным. По теореме 1 обобщенное решение единственно. Значит, классическое и обобщенное решения совпадают. Следствие доказано. □

Из теоремы 1 вытекает, что линейное отображение, которое каждой паре $(f,\mathrm{g}) \in H^{-1/2}(S) \times H^{1/2}(S)$ ставит в соответствие обобщенное решение Φ задачи дифракции (5)–(7), является непрерывным. Вложение $L^2(S) \subset H^{-1/2}(S)$ компактно. Значит, справедлив следующий результат.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma_e > 0$, $\mathrm{g} \in H^{1/2}(S)$. *Тогда аффинное отображение, которое каждой функции* $f \in L^2(S)$ *ставит в соответствие обобщенное решение* Φ *задачи дифракции (5)–(7) является усиленно непрерывным.*

Напомним, что отображение называется усиленно непрерывным, если оно слабо сходящиеся последовательности переводит в сходящиеся по норме.

2. Исследование задачи оптимального управления

Обозначим целевой функционал через

$$J(\Phi, f) = \frac{1}{2} \int\limits_Q |\Phi_i - \Phi_d|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int\limits_S |f - f_d|^2 \, ds.$$

Пусть множество допустимых управлений K содержится в $L^2(S)$. Определим множество допустимых пар «состояние – управление»:

$$U = \left\{ (\Phi, f) \in H^1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \times K : \ \ \Phi \text{ — обобщенное решение задачи (5)–(7)} \right\}.$$

Определение. Пару $(\Phi^*, f^*) \in U$, удовлетворяющую неравенствам

$$\forall (\Phi, f) \in U \quad J(\Phi^*, f^*) \leqslant J(\Phi, f)$$

будем называть *решением задачи оптимального управления (5)–(8).*

Лемма 4. *Пусть* $\gamma_e > 0$, $\mathrm{g} \in H^{1/2}(S)$, K *— выпуклое замкнутое множество в* $L^2(S)$. *Тогда множество* U *— выпуклое и слабо замкнутое в* $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus S) \times L^2(S)$.

Доказательство. Выпуклость U очевидна. Из замкнутости K и следствия 2 вытекает замкнутость множества U. Значит, U слабо замкнуто. Лемма доказана. □

Теорема 2. *Пусть* $\gamma_e > 0$, $\mathrm{g} \in H^{1/2}(S)$, $\Phi_d \in L^2(Q)$, $f_d \in L^2(S)$, K *— выпуклое замкнутое непустое множество из* $L^2(S)$, *причем либо* $\lambda > 0$, *либо множество* K *ограничено. Тогда существует единственное решение задачи управления (5)–(8).*

Доказательство. Единственность решения вытекает из выпуклости множества U и строгой выпуклости функционала J. Докажем существование. Функционал J ограничен снизу. Значит, он имеет точную нижнюю грань на U. Поэтому существует минимизирующая последовательность

$$(\Phi_n, f_n) \in U, \quad J(\Phi_n, f_n) \to j = \inf_{(\Phi,f)\in U} J(\Phi, f).$$

Последовательность f_n ограничена. Это вытекает из неравенства

$$\frac{\lambda}{2}\|f_n - f_d\|^2_{L^2(S)} \leqslant J(\Phi_n, f_n),$$

если $\lambda > 0$ и из ограниченности множества K, если $\lambda = 0$. Значит, можно извлечь подпоследовательность $f_{n_k} \to f^*$ слабо в $H^{1/2}(S)$. Тогда $\Phi_{n_k} \to \Phi^*$ в $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus S)$ по следствию 2. Так как множество U слабо замкнуто, то $(\Phi^*, f^*) \in U$. Поскольку функционал J слабо полунепрерывный снизу,

$$J(\Phi^*, f^*) \leqslant \underline{\lim}_{n_k\to\infty} J(\Phi_{n_k}, f_{n_k}) = \lim_{n_k\to\infty} J(\Phi_{n_k}, f_{n_k}) = j.$$

Это возможно только при $J(\Phi^*, f^*) = j$, то есть (Φ^*, f^*) — решение задачи (5)–(8). Теорема доказана. □

Перейдем теперь к описанию конечномерной аппроксимации задачи оптимального управления (5)–(8).

Так как пространство $L^2(S)$ сепарабельно, то существует счетное множество

$$\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(S),$$

линейная оболочка которого плотна в $L^2(S)$. Возьмем любое натуральное n. Положим

$$K_n = K \cap \mathrm{Span}\,\{e_k\}_{k=1}^{n}.$$

Здесь $\mathrm{Span}\{e_k\}_{k=1}^{n}$ — линейная оболочка множества $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Если множество K — выпуклое и замкнутое, то K_n — также выпуклое и замкнутое.

Через U_n обозначим множество пар (Φ, f) таких, что $f \in K_n$, Φ — обобщенное решение задачи (5)–(7), то есть

$$U_n = \left\{(\Phi, f) \in U : f \in K_n\right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу: найти пару $(\Phi^{(n)}, f^{(n)}) \in U_n$ такую, что

$$\forall (\Phi, f) \in U_n \quad J(\Phi^{(n)}, f^{(n)}) \leqslant J(\Phi, f). \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть линейная оболочка множества* $\{e_k\}_1^{\infty}$ *плотна в* $L^2(S)$, $\gamma_e > 0$, $g \in H^{1/2}(S)$, $\Phi_d \in L^2(Q)$, $f_d \in L^2(S)$, K *— выпуклое замкнутое множество из* $L^2(S)$, *имеющее внутренние точки, причем либо* K *ограничено, либо* $\lambda > 0$. *Тогда*

(a) *найдется номер* N *такой, что для любого* $n \geqslant N$ *существует единственное решение задачи (18);*

(б) при $n \to \infty$

$$\Phi^{(n)} \to \Phi^* \text{ в } H^1(\mathbb{R}^3 \setminus S), \quad f^{(n)} \to f^* \text{ слабо в } L^2(S), \quad J(\Phi^{(n)}, f^{(n)}) \to J(\Phi^*, f^*),$$

где (Φ^*, f^*) *— решение задачи оптимального управления (5)–(8);*

(в) если дополнительно $\lambda > 0$*, то* $f_n \to f$ *в* $L^2(S)$.

Доказательство теоремы повторяет рассуждения из статьи [17] и поэтому опускается.

Так как $\Phi^{(n)}$ однозначно определяется управлением $f^{(n)}$, то в задаче (18) можно считать неизвестной только функцию $f^{(n)}$, которая принадлежит конечномерному пространству. Поэтому задача (18) по сути относится к конечномерным экстремальным задачам. В [17] предложен, а в [18] численно реализован алгоритм ее решения.

Список литературы

[1] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1988, 512 с.

[2] С.И. Смагин, *Интегральные уравнения задач дифракции*, Дальнаука, Владивосток, 1995.

[3] С.И. Смагин, “Об одной системе интегральных уравнений теории дифракции”, *Дифференц. уравнения*, **26**:8, (1990), 1432–1437.

[4] А.А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1977, 656 с.

[5] Г.И. Марчук, В.И. Агошков, *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, М., 1981, 416 с.

[6] Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния*, Мир, М., 1987, 311 с.

[7] Н.Е. Ершов, Л.В. Илларионова, С.И. Смагин, “Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн”, *Вычислительные технологии*, **15**:1, (2010), 60–76.

[8] А.А. Каширин, С.И. Смагин, “О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **52**:8, (2012), 1429–1505.

[9] А.А. Каширин, С.И. Смагин, М.Ю. Талтыкина, “Применение мозаично-скелетонного метода при численном решении трехмерных задач Дирихле для уравнения Гельмгольца в интегральной форме”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:4, (2012), 625–638.

[10] A. Kirsch, “A weak bang-bang principle for the control of an exterior robin problem”, *Applicable Analysis*, **13**, (1982), 65–75.

[11] R. Kress, W. Rundell, “Inverse scattering for shape and impedance”, *Inverse Problems*, 2001, № 17, 1075–1085.

[12] T.S. Angell, A. Kirsch*Optimization methods in electromagnetic radiation*, Springer, 2004, 331 c.

[13] Cao Yanzhao, D. Stanescu, “Shape optimization for noise radiation problems”, *Computers and Mathenatics with Applications*, 2002, № 44, 1527–1537.

[14] A. Habbal, “Nonsmooth shape optimization applied to linear acoustic”, *SIAM Journal on Optimization*, **8**:4, (1998), 989–1006.

[15] А.А. Горюнов, А.В. Сасковец, *Обратные задачи рассеяния в акустике*, Изд-во МГУ, М., 1989.

[16] J. Jahn, A. Kirsch, C. Wagner, “Optimization of rod antennas of mobile phones”, *Math. Meth. Oper. Res.*, 2004, № 59, 37–51.

[17] Л.В. Илларионова, “Задача оптимального управления для стационарных уравнений дифракции акустических волн”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:2, (2008), 297–308.

[18] Илларионова, “Численное решение задачи оптимального управления стационарными акустическими полями”, *Вестник ТОГУ*, **23**:4, (2011), 75–84.

Поступила в редакцию
17 сентября 2018 г.

Illarionova L. V. On the optimal control problem for equations of acoustic wave diffraction. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 195–205.

ABSTRACT

One consider the optimal control problem for stationary equations of acoustic waves diffraction on three-dimensional inclusion in unbounded homogeneous medium. The problem is to minimize L^2-deviation of pressure field in inclusion from the given. The control is the field source in the exterior medium.

Key words: *acoustic wave diffraction, optimal control problem, Helmholtz equation.*