УДК 517.52, 512.742.72
MSC2010 11B37, 33E05

© М. Д. Монина[1]

О структуре последовательности рациональных функций Сомос-4

В работе уточняется результат Зелевинского и Фомина, говорящий о лорановости последовательности Сомос-4.

Ключевые слова: *последовательность Сомоса, эллиптические функции, теоремы сложения.*

Введение

Пусть α, β, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 — формальные переменные. Определим последовательность рациональных функций

$$S(n) = S(n;\alpha,\beta) = S(n;\alpha,\beta;x_{-1},x_0,x_1,x_2) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

с помощью рекуррентного соотношения

$$S(n+2)S(n-2) = \alpha S(n+1)S(n-1) + \beta S^2(n) \tag{1}$$

и начальных значений

$$S(-1) = x_{-1},\ S(0) = x_0,\ S(1) = x_1,\ S(2) = x_2.$$

В работе [1] было доказано, что

$$S(n) = \sum_{a_{-1},a_0,a_1,a_2 \in \mathbb{Z}} P_n(\alpha,\beta;a_{-1},a_0,a_1,a_2) x_{-1}^{a_{-1}} x_0^{a_0} x_1^{a_1} x_2^{a_2},$$

где $P_n(\alpha,\beta;...)$ — полиномы от α и β с целыми коэффициентами, отличными от нуля, только для конечных наборов четвёрок целых чисел (a_{-1},a_0,a_1,a_2).

Опираясь на идеи работы [2], мы уточняем результат Зелевинского и Фомина в следующем виде.

Теорема 1. *Для любого целого* n

$$S(n) = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n P_n\left(\alpha\frac{x_0x_1}{x_{-1}x_2}, \beta\frac{x_0x_1}{x_{-1}x_2}; \frac{x_{-1}x_1}{x_0^2}, \frac{x_0x_2}{x_1^2}\right),$$

где $P_n(u,v;x,y)$ – полином от переменных u и v, x и y с целыми коэффициентами.

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: monina@iam.khv.ru

1. Доказательство теоремы

В [2] было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть x, y, u, v — формальные переменные. Тогда для коэффициентов*

$$\alpha = xyu,\ \beta = xyv$$

и начальных значений

$$x_{-1} = x,\ x_0 = x_1 = 1, x_2 = y$$

последовательность $T(n)$, определяемая рекуррентным соотношением (1), *состоит из полиномов от переменных x, y, u, v с целыми коэффициентами.*

Определим новую последовательность

$$\widetilde{S}(n) = x_0^{-1}(x_0/x_1)^n S(n),$$

которая удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) и при этом $\widetilde{S}(0) = \widetilde{S}(1) = 1$. Далее,

$$\widetilde{S}(-1) = x = \frac{x_{-1}x_1}{x_0^2}, \quad \widetilde{S}(2) = y = \frac{x_0 x_2}{x_1^2}.$$

Из теоремы 2 следует, что

$$S(n) = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n \widetilde{S}(n) =$$

$$= x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n P_n\left(\alpha\frac{x_0x_1}{x_{-1}x_2}, \beta\frac{x_0x_1}{x_{-1}x_2}; \frac{x_{-1}x_1}{x_0^2}, \frac{x_0x_2}{x_1^2}\right).$$

Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. В работе [3] был доказан следующий результат.

Теорема 3. *Для любого целого n*

$$S(n) = x_0 \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^n \cdot \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} Q_n(\alpha, \beta; a, b) \left(\frac{x_{-1}x_1}{x_0^2}\right)^a \left(\frac{x_0x_2}{x_1^2}\right)^b,$$

где $Q_n(\alpha, \beta; a, b)$ — последовательность полиномов от переменных α и β с целыми коэффициентами, отличными от нуля, для конечного набора целочисленных пар (a, b).

На самом деле этот результат эквивалентен теореме Зелевинского и Фомина. Для того, чтобы это показать, достаточно воспользоваться переходом от последовательности $S(n)$ к $\widetilde{S}(n)$ и к последней применить теорему Зелевинского и Фомина. Обратные рассуждения позволяют из теоремы 3 получить терему Зелевинского и Фомина.

Автор благодарит В. А. Быковского за обсуждение полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (№17-01-00225).

Список литературы

[1] S. Fomin, A. Zelevinsky, “The Laurent phenomenon”, *Adv. Appl. Math.*, **28**, (2002), 119–144.

[2] М. Д. Монина, “Четырёхпараметрическое семейство целочисленных последовательностей Сомос-4”, *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1, (2018), 85–89.

[3] В. А. Быковский, “О лорановости последовательности Сомос-4”, *Дальневосточный математический журнал*, **18**:1, (2018), 18–22.

Поступила в редакцию
26 сентября 2018 г.

Monina M. D. On the structure of Somos-4 sequence of rational functions. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 216–218.

ABSTRACT

In the paper the result of Zelevinsky and Fomin on the Laurent property of the Somos-4 sequence is specified.

Key words: *Somos sequences, elliptic functions, addition theorems.*