Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 261–266

Краткие сообщения

УДК 517.54
MSC2010 31B99

© С. И. Калмыков[1]

О полиномах, нормированных на отрезке

В сообщении представлены новые теоремы покрытия, двуточечные теоремы искажения и оценки коэффициентов для полиномов с криволинейной мажорантой на отрезке. Экстремальными в этих теоремах являются полиномы Чебышева второго, третьего и четвертого рода. Доказательства опираются на новую версию леммы Шварца и условия однолистности для голоморфных функций, предложенные Дубининым.

Ключевые слова: *полиномы Чебышева, неравенство Бернштейна, конформные отображения.*

1. Введение

Неравенства для полиномов имеют богатую историю и многочисленные приложения (см., например, [1–3]). Целью настоящего краткого сообщения является дополнение некоторых результатов работ [4, 5]. В основе доказательств лежат новая версия леммы Шварца и условие однолистности для голоморфных функций из работы [6]. Нами рассматриваются полиномы вида

$$P_n(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \qquad a_n \neq 0, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

удовлетворяющие одному из следующих условий

$$|P(z)\sqrt{1-z^2}| \leqslant 1, \qquad z \in [-1, 1], \tag{2}$$

$$|P(z)\sqrt{(1+z)/2}| \leqslant 1, \qquad z \in [-1, 1], \tag{3}$$

$$|P(z)\sqrt{(1-z)/2}| \leqslant 1, \qquad z \in [-1, 1]. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathcal{PU}_n$ класс полиномов вида (1), удовлетворяющих условию (2); через $\mathcal{PV}_n$ — класс полиномов вида (1), удовлетворяющих условию (3); через $\mathcal{PW}_n$ — класс полиномов вида (1), удовлетворяющих условию (4). В полученных ниже результатах полиномы Чебышева $U_n(z)$, $V_n(z)$ и $W_n(z)$ являются экстремальными в классах $\mathcal{PU}_n$, $\mathcal{PV}_n$, $\mathcal{PW}_n$ соответственно. Отметим несколько работ, посвященных

[1] Дальневосточный федеральный университет, 690091, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `sergeykalmykov@inbox.ru`

неравенствам для полиномов с криволинейными мажорантами на отрезке (см. [7,8]). Случай более общих компактов рассмотрен, например, в работе [9].

Во многих задачах при доказательстве экстремальных свойств полиномов Чебышева ключевую роль играет следующее хорошо известное представление

$$T_n(z)=\frac{1}{2}((z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n).$$

Аналогичные представления существуют и у полиномов Чебышева второго, третьего и четвертого рода соответственно (см., например, [10]).

$$U_n(z)=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+1}-(z-\sqrt{z^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{z^2-1}}, \tag{5}$$

$$V_n(z)=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}+(z-\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}+(z-\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}}, \tag{6}$$

$$W_n(z)=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}-(z-\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}-(z-\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}}.$$

2. Основные результаты

Первые три результата — это теоремы покрытия для аналитических функций, связанных с полиномами из классов, описанных выше.

Теорема 1. (ср. [4, Теорема 3]) *Пусть полином P принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$ и пусть число $r>1$. Тогда образ эллипса $|z-1|+|z+1|=r+1/r$ при отображении $w=\sqrt{1-z^2}P(z)$ либо лежит строго внутри эллипса*

$$|w-1|+|w+1|=r^{n+1}d\left(\frac{1}{r},|a_n|2^{-n}\right)+\frac{1}{r^{n+1}d(1/r,|a_n|2^{-n})}\leqslant r^{n+1}+r^{-n-1},$$

либо совпадает с ним, и тогда $P(z)\equiv U(z)=2^nz^n+\ldots$.

Теорема 2. (ср. [4, Теорема 4]) *Пусть полином P принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$ и пусть число $r>1$. Тогда образ эллипса $|z-1|+|z+1|=r^2+1/r^2$ при отображении $w=\sqrt{(1+z)/2}P(z)$ либо лежит строго внутри эллипса*

$$|w-1|+|w+1|=r^{2n+1}d\left(\frac{1}{r},|a_n|2^{-n}\right)+\frac{1}{r^{2n+1}d(1/r,|a_n|2^{-n})}\leqslant r^{2n+1}+r^{-2n-1},$$

либо совпадает с ним, и тогда $P(z)\equiv V(z)=2^nz^n+\ldots$.

Теорема 3. *Пусть полином P принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$ и пусть число $r>1$. Тогда образ эллипса $|z-1|+|z+1|=r^2+1/r^2$ при отображении $w=\sqrt{(1-z)/2}P(z)$ либо лежит строго внутри эллипса*

$$|w-1|+|w+1|=r^{2n+1}d\left(\frac{1}{r},|a_n|2^{-n}\right)+\frac{1}{r^{2n+1}d(1/r,|a_n|2^{-n})}\leqslant r^{2n+1}+r^{-2n-1},$$

либо совпадает с ним, и тогда $P(z)\equiv W(z)=2^nz^n+\ldots$.

Теоремы 1 и 2 следуют из [6, Следствие 1], примененного к функциям

$$f_1(z) = \frac{i}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) P\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)$$

и

$$f_2(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) P\left(\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\right),$$

соответственно.

В случаях экстремальных многочленов в теоремах 1 и 2 из представлений (5) и (6) легко проверяется, что функции f_k, $k=1,2$ являются суперпозициями степенной функции и функции Жуковского. Что касается теоремы 3, то она вытекает из теоремы 2 и следующего замечания.

Замечание 1. Если полином $P(z)$ принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$, то полином $P(-z)$ принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, а также $|V_n(z)|=|W_n(-z)|$ для любых n и z.

Следующие три теоремы посвящены оценкам коэффициентов.

Теорема 4. *Если полином P принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$, $n \geqslant 4$, и $\lambda = \lambda(P) := |c_n|/2^n$, то справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\lambda \leqslant 1,\\ |a_{n-1}| \leqslant 2^n(1-\lambda),\\ |(n-1)a_n + 4a_{n-2}| \leqslant 2^n(\lambda^{-1}-\lambda),\\ |(n-2)a_{n-1} + 4a_{n-3}| \leqslant 2^n(\lambda^{-2}-\lambda^{-1}),\\ |n(n-3)a_n + 8(n-3)a_{n-2} + 32a_{n-4}| \leqslant 2^{n+1}(5\lambda^{-3} - 8\lambda^{-2} + 3\lambda^{-1}).\end{gathered}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышева второго рода U_n.

Теорема 5. *Если полином P принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, $n \geqslant 3$, и $\lambda = \lambda(P) := |c_n|/2^n$, то справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\lambda \leqslant 1,\\ |a_n + 2a_{n-1}| \leqslant 2^n(\lambda^{-1}-\lambda),\\ |na_n + 2a_{n-1} + 4a_{n-2}| \leqslant 2^n(5\lambda^{-3} - 8\lambda^{-2} + 3\lambda^{-1}),\\ |na_n + 2(n-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} + 8a_{n-3}| \leqslant 2^n(42\lambda^{-5} - 112\lambda^{-4} + 105\lambda^{-3} - 40\lambda^{-2} + 5\lambda^{-1}).\end{gathered}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышева третьего рода V_n.

Теорема 6. *Если полином P принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$, $n \geqslant 3$, и $\lambda = \lambda(P) := |c_n|/2^n$, то справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\lambda \leqslant 1,\\ |a_n - 2a_{n-1}| \leqslant 2^n(\lambda^{-1}-\lambda),\\ |na_n - 2a_{n-1} + 4a_{n-2}| \leqslant 2^n(5\lambda^{-3} - 8\lambda^{-2} + 3\lambda^{-1}),\\ |na_n - 2(n-1)a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}| \leqslant 2^n(42\lambda^{-5} - 112\lambda^{-4} + 105\lambda^{-3} - 40\lambda^{-2} + 5\lambda^{-1}).\end{gathered}$$

Равенство во всех случаях достигается для полинома Чебышева четвертого рода W_n.

Далее

$$\Psi(\omega)=\omega+\sqrt{\omega^2-1},\qquad \omega\in\overline{\mathbb{C}}_\omega\setminus[-1,1]$$

— одна из ветвей обратной функции Жуковского, $\Psi(\infty){=}\infty$. Говоря про значачения функции Ψ на отрезке $[-1{,}1]$, мы для определенности будем понимать значения на верхнем берегу разреза.

Теорема 7. *Предположим, что полином P степени n принадлежит классу $\mathcal{PU}_n$, и пусть x_1 и x_2 — различные точки на отрезке $[-1,1]$ такие, что $(1-x_k^2)P^2(x_k)\neq 1$, $k=1,2$. Тогда либо хотя бы в одной точке из точек x_k, $k=1,2$,*

$$\frac{|x_kP(x_k)-(1-x_k^2)P'(x_k)|}{\sqrt{1-(1-x_k^2)P^2(x_k)}}\leqslant n,$$

либо справедливо неравенство

$$\left(\frac{|x_1P(x_1)-(1-x_1^2)P'(x_1)|}{\sqrt{1-(1-x_1^2)P^2(x_1)}}-n\right)\left(\frac{|x_2P(x_2)-(1-x_2^2)P'(x_2)|}{\sqrt{1-(1-x_2^2)P^2(x_2)}}-n\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{\Psi^n(x_1)\Psi(\sqrt{1-x_1^2}P(x_1))-\Psi^n(x_2)\Psi(\sqrt{1-x_2^2}P(x_2))}{\Psi(x_2)-\Psi(x_1)}\right|^2.$$

Равенство достигается для полинома Чебышева второго рода U_n.

Теорема 8. *Предположим, что полином P степени n принадлежит классу $\mathcal{PV}_n$, и пусть x_1 и x_2 — различные точки на отрезке $[-1,1]$ такие, что $(1+x_k)P^2(x_k)\neq 2$, $k=1,2$. Тогда либо хотя бы в одной точке из точек z_k, $k=1,2$,*

$$\frac{\sqrt{1-x_k}|P(x_k)+2(x_k+1)P'(x_k)|}{\sqrt{2-(x_k+1)P^2(x_k)}}\leqslant 2n,$$

либо справедливо неравенство

$$\left(\frac{\sqrt{1-x_1}\,|P(x_1)+2(x_1+1)P'(x_1)|}{\sqrt{2-(x_1+1)P^2(x_1)}}-2n\right)\left(\frac{\sqrt{1-x_2}\,|P(x_2)+2(x_2+1)P'(x_2)|}{\sqrt{2-(x_2+1)P^2(x_2)}}-2n\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{\Psi^n(x_1)\Psi(\sqrt{(1+x_1)/2}P(x_1))-\Psi^n(x_2)\Psi(\sqrt{(1+x_2)/2}P(x_2))}{\sqrt{\Psi(x_2)}-\sqrt{\Psi(x_1)}}\right|^2.$$

Равенство достигается для полинома Чебышева третьего рода V_n.

Теорема 9. *Предположим, что полином P степени n принадлежит классу $\mathcal{PW}_n$, и пусть x_1 и x_2 — различные точки на отрезке $[-1,1]$ такие, что $(1-x_k)P^2(x_k)\neq 2$, $k=1,2$. Тогда либо хотя бы в одной точке из точек z_k, $k=1,2$,*

$$\frac{\sqrt{1+x_k}|P(x_k)+2(x_k-1)P'(x_k)|}{\sqrt{2+(x_k-1)P^2(x_k)}}\leqslant 2n,$$

либо справедливо неравенство

$$\left(\frac{\sqrt{1+x_1}\,|P(x_1)+2(x_1-1)P'(x_1)|}{\sqrt{2+(x_1-1)P^2(x_1)}}-2n\right)\left(\frac{\sqrt{1+x_2}\,|P(x_2)+2(x_2-1)P'(x_2)|}{\sqrt{2+(x_2-1)P^2(x_2)}}-2n\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left|\frac{\Psi^n(x_1)\Psi(\sqrt{(1-x_1)/2}P(x_1))-\Psi^n(x_2)\Psi(\sqrt{(1-x_2)/2}P(x_2))}{\sqrt{\Psi(x_2)}-\sqrt{\Psi(x_1)}}\right|^2.$$

Равенство достигается для полинома Чебышева четвертого рода W_n.

Для доказательства теорем 4 и 7 рассмотрим функцию

$$f_3(z)=z^{n+2}\Psi\left[\frac{i}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right],$$

заданную на множестве

$$G(f_3)=\left\{z\in D\ :\ \frac{i}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)P\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\notin[-1,1]\right\},$$

применим [6, Теорема 6] для оценок коэффициентов, а также [6, Теорема 7] для теоремы искажения.

Теоремы 5 и 8 доказываются аналогично теоремам 4 и 7 с заменой функции f_3 на функцию

$$f_4(z)=z^{2n+2}\Psi\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)P\left(\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)\right],$$

заданную на множестве

$$G(f_4)=\left\{z\in D\ :\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)P\left(\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\right)\notin[-1,1]\right\}.$$

Случаи равенства следуют из того факта, что при $P(z)\equiv U(z)$, справедливо $f_3(z)\equiv iz$, а при $P(z)\equiv V(z)$, выполняется $f_4(z)\equiv z$.

Теоремы 6 и 9 следуют соответственно из теорем 5 и 8, а также замечания 1.

Список литературы

[1] P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and polynomial inequalities*, Grad. Texts in Math, v. 161, Springer-Verlag, New York, 1995.

[2] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, “Analytic theory of polynomials”, *London Math. Soc. Monogr. (N.S.)*, v. 26, The Clarendon Press, Oxford; Oxford Univ. Press, 2002, xiv+742.

[3] T. Sheil-Small, *Complex polynomials*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, Cambridge Stud. Adv. Math., 75, 2002, xx+428 pp.

[4] В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков,, “Экстремальные свойства полиномов Чебышева”, *Дальневост. матем. журн.*, **5**:2, (2004), 169–177.

[5] В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, “О применении конформных отображений к неравенствам для полиномов”, *Аналитическая теория чисел и теория функций. 18, Зап. научн. сем. ПОМИ*, т. 286, ПОМИ, СПб., 2002, 85–102.

[6] В. Н. Дубинин“Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения”, *Матем. сб.*, **196**:11, (2005), 53–74.

[7] M. A. Lachance, “Bernstein and Markov inequalities for constrained polynomials”, *Lect. Notes Math*, v. 1045, 1984, 125–135.

[8] Q. I. Rahman, “On a problem of Turan about polynomials with curved majorants”, *Trans. Amer. Math. Soc*, **163**, (1972), 447–455.

[9] S. I. Kalmykov, B. Nagy, V. Totik, “Asymptotically Sharp Markov and Schur Inequalities on General Sets”, *Complex Analysis and Operator Theory*, **9**:6, (2014), 1287—1302.

[10] Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов*, М.: ГИТТЛ, 1950.

Поступила в редакцию
03 августа 2018 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-11-00022).

Kalmykov S. I. On polynomials normalized on an interval. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 261–266.

ABSTRACT

In this short communication new covering theorems, two-point distortion theorems and coefficient estimates for polynomials with a curved majorant on an interval are presented. Extremal polynomials in these therems are Chebyshev polynomials of the the second, third and forth kinds. Proofs are based on a new version of the Schwarz lemma and a univalent condition for holomorphic functions suggested by Dubinin.

Key words: *Chebyshev polynomials, Bernstein inequality, conformal mappings.*