Дальневосточный математический журнал. 2018. Т. 18. № 2. С. 267–270

УДК 519.218.5
MSC2010 60J27

© Г. Ш. Цициашвили[1]

Инвариантные свойства систем массового обслуживания с несколькими потоками

Доказано, что в одноканальной системе массового обслуживания с показательно распределенными временем обслуживания и интервалами между приходами заявок стационарные выходные потоки совпадают по распределению с независимыми пуассоновскими входными потоками при условии, что прибор работает, если в системе имеются заявки.

Ключевые слова: *система массового обслуживания с несколькими потоками, эргодичность, дисциплина обслуживания.*

Введение

В настоящей работе исследуются стационарные потоки заявок, выходящие из системы массового обслуживания с независимыми пуассоновскими входными потоками и одним обслуживающим устройством с показательным распределением времени обслуживания. В случае одного потока в [1] доказано, что входной пуассоновский поток и стационарный выходной поток совпадают по распределению.

Однако в системах с несколькими потоками задача существенно усложняется. Система с одним потоком описывается дискретным марковским процессом, характеризующим число заявок в текущий момент времени. Для описания марковским процессом системы с несколькими потоками и даже простейшей дисциплиной обслуживания "первым пришел — первым обслужился" требуется охарактеризовать всю очередь, т.е. указать, к каким потокам принадлежат заявки, находящиеся в системе, и упорядочить их по моментам поступления.

В результате фазовое пространство дискретного марковского процесса, описывающего такую систему, состоит из векторов, размерность которых совпадает с числом заявок в системе и потому не является постоянной. Каждая компонента такого вектора является номером потока, к которому принадлежит заявка, находящаяся в системе. Это создает значительные аналитические и вычислительные трудности при

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `guram@iam.dvo.ru`

исследовании марковских процессов, описывающих системы с несколькими потоками. Такое описание во многом напоминает конструкцию кусочно-линейного марковского процесса [2, 3], используемого не в аналитических расчетах, а при численном моделировании систем массового обслуживания.

В настоящей работе рассмотрена одноканальная система массового обслуживания с показательно распределенными временем обслуживания и интервалами между приходами заявок из нескольких потоков. Доказано, что стационарные выходные потоки совпадают по распределению с независимыми пуассоновскими входными потоками при условии, что прибор работает, если в системе имеются заявки. Используя технику работы [4], в которой выходу из системы обслуживания очередной заявки соответствует скачок одной из компонент описанного выше марковского процесса, мы проверили условие независимости числа заявок выходных потоков на непересекающихся интервалах времени [5].

Однако для определения интенсивностей выходных потоков требуется использовать теорему эргодичности анализируемого марковского процесса [6]. Для установления эргодичности марковского процесса, описывающего принадлежность находящихся в системе заявок различным входным потокам, используются условия стохастической монотонности [7] и теорема эргодичности для регенерирующего процесса [8]. Теорема эргодичности позволила устанавливать равенство интенсивностей входных и выходных потоков без вычисления предельных распределений.

Основные результаты

Рассмотрим одноканальную систему массового обслуживания A_m с m независимыми пуассоновскими входными потоками $1,\dots,m$ интенсивностью $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ и экспоненциальным распределением времен обслуживания интенсивностью μ.

Опишем состояние системы вектором $Z=(z,a_1,\dots,a_z)$, где z – общее количество заявок в системе. Компоненты a_k, $1\leqslant k\leqslant z$, характеризуют принадлежность заявок, находящихся в системе, соответствующим входным потокам, $a_k\in\{1,\dots,m\}$ (при $z=0$ вектор $Z=0$). Причем эти компоненты упорядочены по моментам поступления заявок в систему.

Марковский процесс $Z(t)$, описывающий динамику системы, задается следующими переходными интенсивностями. Если система находится в состоянии Z, $z>0$, то в соответствии с дисциплиной обслуживания прибор начинает обслуживание заявки с номером $i(Z)\in\{1,\dots,z\}$. Тогда с интенсивностью μ происходит ее обслуживание, приводящее к переходу системы из состояния Z в состояние $Z'=(z-1,a_1,\dots,a_{i(Z)-1},a_{i(Z)+1},\dots,a_z)$. Например, для дисциплины "первым пришел — первым обслужился" выбирается заявка с номером $i(Z)=1$. Этот переход означает поступление в выходной поток с номером $a_{i(Z)}$ новой заявки. Из состояния Z возможен также переход в состояние $Z''=(z+1,a_1,\dots,a_z,a_{z+1})$, означающий, что с интенсивностью $\lambda_{a_{z+1}}$ в систему поступает заявка потока a_{z+1}. Подобное описание возможно для любой дисциплины обслуживания, у которой невозможен простой прибора при наличии в системе заявок.

Теорема 1. *При выполнении условия* $\lambda = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k < \mu$ *процесс* $Z(t)$ *является эргодическим и стационарные выходные потоки, состоящие из заявок входных потоков* $1, \ldots, m$, *являются пуассоновскими.*

Доказательство. Процесс $z(t)$, $t \geqslant 0$, описывающий общее число заявок в системе A_m в момент t, совпадает с процессом, описывающим общее число заявок в системе $M|M|1|\infty$ с пуассоновским входным потоком интенсивностью λ и экспоненциальным распределением времен обслуживания интенсивностью μ. Поэтому процесс $z(t)$ является марковским и эргодическим, причем моменты $T_1, T_2, \ldots$, обнуления процесса $z(t)$ являются моментами его регенерации, т.е. куски случайного процесса $\{z(t), T_n < t \leqslant T_{n+1}\}, n=1,2,\ldots$, независимы и одинаково распределены. Тогда из условия данной теоремы следует, что среднее время между соседними моментами регенерации $M(T_{n+1} - T_n) < \infty$.

Однако моменты $T_1, T_2, \ldots$, являются также моментами регенерации процесса $Z(t)$. Поэтому из теоремы эргодичности для регенерирующих процессов [8] следует, что марковский процесс $Z(t)$ также является эргодическим. Т.к. выход из системы заявки потока k соответствует скачку процесса $Z(t)$ из состояния $Z\,(i(Z) = k)$ в состояние Z', то интенсивность стационарного выходного потока заявок входного потока k удовлетворяет равенству $b_k = \sum\limits_{Z:\, z>0,\, a_{i(Z)} = k} \mu P(Z)$, где $P(Z)$ — стационарное распределение случайного процесса $Z(t)$. □

Теорема 2. *Справедливы равенства* $b_k = \lambda_k,\ k = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Пусть $x_k(t)$ — число заявок входного потока k, пришедших в систему на полуинтервале времени $(0,t], x_k(0)=0$. Аналогично полагаем $y_k(t)$ — число заявок выходного потока на полуинтервале времени $(0, t]$. Обозначим $z_k(t)$ число заявок, принадлежащих входному потоку k в системе. Очевидно, что $z(t) = \sum\limits_{k=1}^{m} z_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$, и поэтому $z_k(t) \leqslant z(t)$, $t \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому выполняется сходимость по вероятности $z_k(t)/t \to 0$, $t \to \infty$. Т.к. случайная величина $x_k(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_k t$, то несложно установить сходимость по вероятности $x_k(t)/t \to \lambda_k, t \to \infty$. Отсюда с помощью равенств $x_k(t) = y_k(t) + z_k(t), k = 1, \ldots, m$, приходим к справедливости утверждения теоремы 2, а это значит, что интенсивность b_k стационарного выходного потока, состоящего из заявок входного потока k, совпадает с интенсивностью λ_k входного потока, $k = 1, \ldots, m$. □

Замечание 1. Если каждая точка пуассоновского потока независимо от других точек с вероятностью λ_k/λ попадает в поток k, то полученные в результате потоки являются независимыми [9].

Список литературы

[1] P. J. Burke, “The output of a queuing system”, *Operations Research*, **4**, (1956), 699–704.

[2] Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, *Введение в теорию массового обслуживания*, Наука, Москва, 1966.

[3] Н. П. Бусленко, *Моделирование сложных систем*, Наука, Москва, 1968.

[4] G. Sh. Tsitsiashvili, M. A. Osipova, “Generalization and Extension of Burke Theorem”, *Reliability: Theory and Applications*, 2018, № 1, 59–62.

[5] А. Я. Хинчин, *Работы по математической теории массового обслуживания*, Наука, Москва, 1963.

[6] G. Sh. Tsitsiashvili, “Ergodicity and invariance of flows in queuing systems”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **6**:7, (2018).

[7] Д. Штойян, *Качественные свойства и оценки стохастических моделей*, Мир, Москва, 1979.

[8] Г. П. Климов, “Эргодическая теорема для регенерирующих процессов”, *Теория вероятностей и ее применения*, **21**:2, (1976), 402–405.

[9] В. И. Тихонов, М. А. Миронов, *Марковские процессы*, Советское радио, Москва, 1977.

Поступила в редакцию
24 июля 2018 г.

Tsitsiashvili G. Sh. Invariant properties of queuing systems with multiple flows. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2018. V. 18. No 2. P. 267–270.

ABSTRACT

It is proved that in a single-server queuing system with exponentially distributed service time and intervals between the arrivals of customers, the stationary output flows coincide in distribution with independent Poisson input flows, provided that the server works if there are customers in the system.

Key words: *queuing system with multiple flows, ergodicity, service discipline.*