Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 3–5

УДК 511.21+517.965+517.582
MSC2010 11B37+33F05

© М. О. Авдеева[1], В. А. Быковский[1]

О подпоследовательностях Сомос-6 с четными номерами

Известно, что подпоследовательности последовательностей Сомос-4 и Сомос-5 являются последовательностями Сомос-4. В работе доказывается, что это свойство нарушается для последовательностей Сомос-6.

Ключевые слова: *нелинейные рекуррентные последовательности, квадратичные последовательности, последовательности Сомоса.*

1. Последовательности Сомос-4, 5

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$ — независимые формальные переменные. Выбрав начальные значения

$$S_4(-1) = x_{-1}, \quad S_4(0) = x_0, \quad S_4(1) = x_1, \quad S_4(2) = x_2,$$

с помощью рекуррентного соотношения

$$S_4(n+2)S_4(n-2) = \alpha_1 S_4(n+1)S_4(n-1) + \alpha_2 S_4^2(n),$$

построим последовательность рациональных функций Сомос-4

$$\{S_4(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

с коэффициентами α_1, α_2. Из результатов работы [1] (см. также [2]) следует, что подпоследовательности

$$S_4^{(0)}(n) = S_4(2n), \qquad S_4^{(1)}(n) = S_4(2n+1)$$

также являются Сомос-4.

Последовательность Сомос-5 $S_5(n)$ определяется рекуррентным соотношением

$$S_5(n+3)S_5(n-2) = \alpha_1 S_5(n+2)S_5(n-1) + \alpha_2 S_5(n+1)S_5(n)$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54.
Электронная почта: avdeeva@iam.khv.ru (М. О. Авдеева), vab@iam.khv.ru (В. А. Быковский).

и начальными значениями

$$S_5(-2) = x_{-2}, \quad S_5(-1) = x_{-1}, \quad S_5(0) = x_0, \quad S_5(1) = x_1, \quad S_5(2) = x_2.$$

Из результата работы [3] следует, что подпоследовательности

$$S_5^{(0)}(n) = S_4(2n), \qquad S_5^{(1)}(n) = S_4(2n+1)$$

являются Сомос-4.

2. Последовательность Сомос-6

Последовательность Сомос-6 определяется рекуррентным соотношением

$$S_6(n+3)S_6(n-3) = \alpha_1 S_6(n+2)S_6(n-2) + \alpha_2 S_6(n+1)S_6(n-1) + \alpha_3 S_6^2(n) \qquad (1)$$

и начальными значениями

$$S_6(-2) = x_{-2},\ S_6(-1) = x_{-1},\ S_6(0) = x_0,\ S_6(1) = x_1,\ S_6(2) = x_2,\ S_6(3) = x_3.$$

Легко проверить, что рекуррентное соотношение (1) можно представить в виде

$$0 = \mathscr{D}(S_6; n) =$$
$$= \det \begin{pmatrix} S_6(n+3)S_6(n-3) & S_6(n+2)S_6(n-2) & S_6(n+1)S_6(n-1) & S_6^2(n) \\ S_6(5)\,S_6(-1) & S_6(4)\,S_6(0) & S_6(3)\,S_6(1) & S_6^2(2) \\ S_6(4)\,S_6(-2) & S_6(3)\,S_6(-1) & S_6(2)\,S_6(0) & S_6^2(1) \\ S_6(3)\,S_6(-3) & S_6(2)\,S_6(-2) & S_6(1)\,S_6(-1) & S_6^2(0) \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$S_6^{(0)}(n) = S_6(2n), \qquad S_6^{(1)}(n) = S_6(2n+1).$$

Результаты вычислений на компьютере с помощью математического пакета Wolfram Mathematica показали, что

$$\mathscr{D}\left(S_6^{(0)}; 3\right) \neq 0, \qquad \mathscr{D}\left(S_6^{(1)}; 3\right) \neq 0.$$

В частности, при $x_3 = x$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = x_{-2} = x_{-1} = x_0 = x_1 = x_2 = 1$

$$\mathscr{D}\left(S_6^{(0)}; 3\right) = \frac{5}{x^4}\left(3+3x+x^2\right)\left(9+8x+3x^2\right)^2\left(-9-29x-17x^2+4x^3+10x^4+3x^5\right)\times$$
$$\times\left(810-441x-5650x^2-9057x^3-6145x^4-1047x^5+1269x^6+993x^7+310x^8+40x^9\right),$$
$$\mathscr{D}\left(S_6^{(1)}; 3\right) = \frac{5}{x^6}\left(3+3x+x^2\right)\left(9+8x+3x^2\right)^2\left(540+1041x+526x^2-273x^3-389x^4-\right.$$
$$\left.-112x^5+34x^6+26x^7+5x^8\right)\left(81000+331515x+587746x^2+557136x^3+253113x^4-\right.$$
$$\left.-24617x^5-102095x^6-56560x^7-10208x^8+3414x^9+2326x^{10}+508x^{11}+40x^{12}\right).$$

Список литературы

[1] A. Hone, “Elliptic curves and quadratic recurrence sequences”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, v. 37, London Mathematical Society, London, 2005, 161–171.

[2] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, “Гиперэллиптические системы последовательностей и функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **16**:2, (2016), 115–122.

[3] A. Hone, “Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences”, *Trans. Am. Math. Soc.*, **359**:10, (2007), 5019–5034.

Поступила в редакцию
30 апреля 2019 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00225).

Avdeeva M. O., Bykovskii V. A. On subsequences of even elements of Somos-6 sequenses. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 3–5.

ABSTRACT

It is known that the subsequences of Somos-4 and Somos-5 sequences are Somos-4 sequences. In the paper, it is proved that this property is broken for Somos-6 sequences.

Key words: *nonlinear recurrent sequences, quadratic sequences, Somos sequences.*