Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 10–19

УДК 519.68
MSC2010 65J01

© В. А. Быковский[1]

Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов

Пусть $E^{(\alpha;s)}$ — класс периодических функций вида

$$f(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s} c(m_1,\ldots,m_s)\exp\left(2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)\right)$$

с

$$|c(m_1,\ldots,m_s)| \leqslant \prod_{j\,=\,1} \left(\max(1,|m_j|)\right)^{-\alpha},$$

где $1<\alpha<\infty$. В работе при любом натуральном $1<N<\infty$ доказывается неулучшаемая оценка

$$R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right) \ll_{\alpha,s} \frac{(\log N)^{s-1}}{N^\alpha}$$

для погрешности наилучшей кубатурной формулы на классе $E^{(\alpha;s)}$, содержащей N узлов и весов. Подобного рода результаты доказаны и для других классов функций.

Ключевые слова: *кубатурные формулы, анизотропные классы функций.*

1. Введение

Пусть s — любое натуральное и $\mathbb{T}^s=[0,1)^s\subset\mathbb{R}^s$. Назовем сеткой любое конечное подмножество $\mathfrak{S}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{T}^s$, элементы которого будем записывать в виде $(\lambda;x)=(\lambda;x_1,\ldots,x_s)$, где $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{T}^s$. При этом x — узел сетки, а λ — вес сетки x.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое семейство интегрируемых по Риману функций $f:\mathbb{E}^s\to\mathbb{C}$, где $\mathbb{E}^s=[0,1]^s$ — единичный куб в $\mathbb{R}^s$. Кубатурная формула, построенная на сетке $\mathfrak{S}$, имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{E}^s} f(x)dx = \sum_{(\lambda;x)\in\mathfrak{S}} \lambda f(x) + R(f;\mathfrak{S}).$$

По определению

$$R(\mathfrak{M};\mathfrak{S}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} |R(f;\mathfrak{S})|$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

— погрешность кубатурной формулы на классе $\mathfrak{M}$, а

$$R_N(\mathfrak{M}) = \inf_{\mathfrak{S}} R(\mathfrak{M}; \mathfrak{S})$$

— погрешность наилучшей кубатурной формулы на сетках из N элементов.

В одномерном случае ($s=1$) для некоторых классов функций удалось даже точно вычислить $R_N(\mathfrak{M})$ (см. [1]). Задача существенно усложняется при переходе в размерности $2 \leqslant s < \infty$.

Нас будут интересовать два класса функций, для которых интенсивно изучались величины $R_N(\mathfrak{M})$, начиная со второй половины 50-х годов. Класс $E^{(\alpha;s)}$ введен Н. М. Коробовым в [2] (см. также [3]) и состоит из периодических функций вида

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c(m)|m|_1^{-\alpha} \exp\left(2\pi i(m, x)\right)$$

с $|c(m)| \leqslant M$ $\forall m \in \mathbb{Z}^s$. Здесь $1 < \alpha < \infty$ и

$$|m|_1 = |(m_1, \ldots, m_s)|_1 = \prod_{j=1}^{s} \max(1, |m_j|).$$

Второй класс, $W_p^{(\alpha;s)}$ с $1 \leqslant p < \infty$ и $1 < \alpha p < \infty$, состоит из функций вида

$$f(x) = \int_{\mathbb{E}^s} \varphi(y) F_\alpha(x - y) dy,$$

где $\|\varphi\|_p \leqslant M$ и

$$F_\alpha(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \frac{\exp\left(2\pi i(m, x)\right)}{|m|_1^\alpha}.$$

Очевидно, что для $1 < \alpha < \infty$ $W_p^{(\alpha;s)}(M) \subset E^{(\alpha;s)}(M)$. В дальнейшем полагаем

$$E^{(\alpha;s)} = E^{(\alpha;s)}(1), \quad W_p^{(\alpha;s)} = W_p^{(\alpha;s)}(1).$$

В работе [4] Н. М. Коробов построил сетки вида

$$\left\{ \left(\frac{1}{N}; \left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{N} \right\} \right) \quad \middle| \quad 0 \leqslant k < N \right\}, \tag{1}$$

где $a = (a_1, \ldots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$. Из полученных им результатов следует, что для $1 < N < \infty$

$$R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right) \ll_{\alpha,s} \frac{(\log N)^{\alpha s}}{N^\alpha}. \tag{2}$$

В работе [5] Н. С. Бахвалов доказал более точные верхние оценки для погрешностей кубатурных формул на сетках вида (1), из которых следует, что в правой части (2) показатель логарифма можно заменить на $\alpha(s-1)$. Отметим также, что в [6]

Н. М. Коробов построил сетки, обобщающие (1), обладающие некоторыми интересными свойствами. В настоящей работе мы используем эту конструкцию. С другой стороны, И. Ф. Шарыгин в [7] доказал нижнюю оценку

$$\frac{(\log N)^{s-1}}{N^{\alpha}} \ll_{\alpha,s} R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right). \tag{3}$$

Для размерности $s=2$ Н. С. Бахвалов в [5], используя последовательность чисел Фибоначчи, построил сетки вида (1), которые позволяют получить окончательный (с точностью до констант) результат

$$R_N\left(E^{(\alpha;2)}\right) \asymp_{\alpha} \frac{\log N}{N^{\alpha}}. \tag{4}$$

Известно, что узлы сетки (1) совпадают с узлами некоторой невырожденной дискретной решетки в $\mathbb{R}^s$, определяемой матрицей с рациональными коэффициентами. В работе [8] К. К. Фролов начал изучать погрешности кубатурных формул на сетках, построенных с помощью дискретных решеток, соответствующих конечным вещественным расширениям поля рациональных чисел степени s. Из полученных им результатов для натурального α и $2\leqslant p<\infty$ следует оценка

$$R_N\left(W_p^{(\alpha;s)}\right) \ll_{\alpha,s,p} \frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N^{\alpha}}. \tag{5}$$

Метод К. К. Фролова был усовершенствован в работах автора [9] и М. М. Скриганова [10]. В частности, из результатов М. М. Скриганова следует, что (5) распространяется и на интервал $1<p<2$ (другим методом этот факт доказан в [11]). В работах автора [9,11] и В. Н. Темлякова [12,13] были предложены методы для доказательства нижних оценок

$$\frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N^{\alpha}} \ll_{\alpha,s,p} R_N\left(W_p^{(\alpha;s)}\right).$$

при любых $0<\alpha<\infty$, $1<p<\infty$, $1<\alpha p<\infty$.

Главными результатами настоящей работы являются правильные (с точностью до констант) верхние оценки для классов $E^{(\alpha;s)}$ с любыми $1<s<\infty$ и $1<\alpha<\infty$, а также для классов $W_p^{(\alpha;s)}$ с $1<s<\infty$, $1<p<\infty$, $\max(1/p,1/2)<\alpha<\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < \alpha < \infty$. *Тогда для любого натурального* $1 < N < \infty$

$$R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right) \asymp_{\alpha,s} \frac{(\log N)^{s-1}}{N^{\alpha}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $1 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\max(1/p, 1/2) < \alpha < \infty$. *Тогда для любого натурального* $1 < N < \infty$

$$R_N\left(W_p^{(\alpha;s)}\right) \asymp_{\alpha,s,p} \frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N^{\alpha}}.$$

Автор благодарен В. Н. Темлякову за многочисленные дискуссии по рассматриваемому кругу вопросов, а также М. М. Скриганову, предоставившему детали доказательства обобщения теоремы Литтлвуда–Пэли из работы [14].

2. Тригонометрические суммы сеток и их свойства

Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольная сетка в $\mathbb{R}\times\mathbb{T}^s$. Для $m\in\mathbb{Z}^s$ положим

$$S(\mathfrak{S};m) = \sum_{(\lambda;x)\in\mathfrak{S}} \lambda \exp\left(2\pi i(x;m)\right)$$

— тригонометрическая сумма сетки. Определим операцию прямого произведения сеток

$$\mathfrak{S}'\otimes\mathfrak{S}'' = \left\{(\lambda'\lambda''; \{x_1'+x_1''\},\ldots,\{x_s'+x_s''\}) \quad \middle| \quad (\lambda';x')\in\mathfrak{S}', (\lambda'';x'')\in\mathfrak{S}''\right\}.$$

Очевидно, что

$$S(\mathfrak{S}'\otimes\mathfrak{S}'';m) = S(\mathfrak{S}';m)S(\mathfrak{S}'';m). \tag{6}$$

Из определений следует, что

$$R\left(E^{(\alpha;s)};\mathfrak{S}\right) = |S(\mathfrak{S};0)-1| + {\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}}' |m|_1^{-\alpha}|S(\mathfrak{S};m)| \tag{7}$$

и

$$R\left(W_p^{(\alpha;s)};\mathfrak{S}\right) = \left\|S(\mathfrak{S};0)-1+{\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}}'|m|_1^{-\alpha}|S(\mathfrak{S};m)\exp\left(-2\pi i(m,\ldots)\right)\right\|_{p'}, \tag{8}$$

где p и p' связаны соотношением $1/p+1/p'=1$. Для любого натурального k положим

$$\varphi_k(u) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \Theta_k(l)\exp(2\pi i l u),$$

где $\Theta_k(0)=1$, $\Theta_k(l)=0$ при $l\in\mathbb{Z}\setminus(-k/2,k/2]$, а для остальных l при $2\leqslant k<\infty$ $\Theta_k(l)$ однозначно определяются из соотношений

$$\varphi_k^{(j)}(0) = \varphi_k^{(j)}(1) = 0 \quad \text{при} \quad 0\leqslant j<k-1.$$

В частных случаях

$$\varphi_1(u)=1,\quad \varphi_2(u)=1-\exp(2\pi i u),\quad \varphi_3(u) = -\frac{1}{2}\exp(-2\pi i u)+1-\frac{1}{2}\exp(2\pi i u),$$
$$\varphi_4(u) = -\frac{1}{3}\exp(-2\pi i u)+1-\exp(2\pi i u)+\frac{1}{3}\exp(4\pi i u) \quad \text{и т.д.}$$

Интегрированием по частям k раз получим

$$\hat\varphi_k(v) = \int_0^1 \varphi_k(u)\exp(2\pi i u v)du \ll_k \frac{1}{|v|_1^k}. \tag{9}$$

Кроме того, $\forall l\in\mathbb{Z}$

$$\hat\varphi_k(l) = \Theta_k(l). \tag{10}$$

Следовательно, для $l \in \mathbb{Z} \setminus (-k/2, k/2]$

$$\hat{\varphi}_k(l) = 0. \tag{11}$$

Пусть Γ — произвольная невырожденная дискретная решетка в $\mathbb{R}^s$ и

$$\mathbb{R}^s/\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^s \;\middle|\; \|x\| \leqslant \|x - y\|,\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} \right\}$$

— многогранник Дирихле – Вороного решетки Γ с

$$D(\Gamma) = \mathrm{vol}(\mathbb{R}^s/\Gamma) = \int\limits_{\mathbb{R}^s/\Gamma} dx > 0.$$

Здесь

$$\|x\|^2 = \|(x_1, \dots, x_s)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_s^2$$

— обычная евклидова норма. Трансляции $\gamma + \mathbb{R}^s/\Gamma$ многогранника Дирихле – Вороного на элементы $\gamma \in \Gamma$ покрывают все $\mathbb{R}^s$ и могут пересекаться только по границам. Положим

$$N(\Gamma) = \inf \left\{ |\gamma_1 \dots \gamma_s| \;\middle|\; \gamma = (\gamma_1 \dots \gamma_s) \in \Gamma \setminus \{0\} \right\}.$$

В любой размерности s существуют решетки Γ с $0 < N(\Gamma)$. По поводу способов их построения см. [14, 15]. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие решетки. Через Γ^* обозначим взаимную к Γ решетку в $\mathbb{R}^s$, состоящую из всех $\gamma^* \in \mathbb{R}^s$, для которых $(\gamma, \gamma^*) \in \mathbb{Z}$ при любом $\gamma \in \Gamma$.

Пусть Π — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^s$, грани которого параллельны координатным гиперплоскостям. Так как $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$

$$0 < N(\Gamma) \leqslant \prod_{j=1}^{s} |\gamma_j|,$$

то в Π с $\mathrm{vol}(\Pi) < N(\Gamma)$ содержится не более одного узла решетки Γ. Поэтому для произвольного Π

$$\mathrm{card}\{\gamma \in \Gamma \cap \Pi\} \ll_\Gamma (1 + \mathrm{vol}(\Pi)). \tag{12}$$

Для $0 < P < \infty$ определим сетку

$$\mathfrak{S}_\Gamma^{(k)}(P) = \left\{ (\lambda(\gamma^*); \gamma_1^*/P, \dots, \gamma_s^*/P) \;\middle|\; \gamma^* \in \Gamma^* \cap \mathbb{T}^s(P) \right\},$$

где

$$\lambda(\gamma^*) = \frac{D(\Gamma^*)}{P^s} \cdot \prod_{j=1}^{s} \varphi_k(\gamma_j^*/P)$$

и

$$\mathbb{T}^s(P) = \left\{ (P_{x_1}, \dots, P_{x_s}) \;\middle|\; (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{T}^s \right\}.$$

Лемма 1. *Пусть $1 < k < \infty$, $1 \leqslant P < \infty$. Тогда $\forall m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$*

$$S(\mathfrak{S}_\Gamma^{(k)}(P); m) - \prod_{j=1}^{s} \Theta_k(m_j) \ll_{k,s} \sum_{\gamma \in \Gamma}{}' \left(\prod_{j=1}^{s} |m_j - P\gamma_j|_1 \right)^{-k},$$

где штрих над знаком суммы означает, что значение $\gamma = (0, \dots, 0)$ при суммировании по $\gamma \in \Gamma$ опускается.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть$\chi_{[0,1)}(u)$ — характеристическая функция полуинтервала $[0,1)$ в $\mathbb{R}$. Применяя формулу суммирования Пуассона, находим

$$S(\mathfrak{S}_\Gamma^{(k)}(P);m) = \frac{D(\Gamma^*)}{P^s} \cdot \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \left(\prod_{j=1}^{s} \chi_{[0,1)}(\gamma_j^*/P)\varphi_k(\gamma_j^*/P) \right) \exp\left(2\pi i(\gamma^*, m)/P\right) =$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \prod_{j=1}^{s} \hat{\varphi}_k(m_j - P\gamma_j).$$

Отсюда с помощью (9) и (10) получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $1 < k < \infty$, $1 \leqslant Q_1, \ldots, Q_s < \infty$, $Q = Q_1 \ldots Q_s$, $1 \leqslant P < \infty$, $R = P^s$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{|m_j| \leqslant Q_j \\ 1 \leqslant j \leqslant s}} \left| S(\mathfrak{S}_\Gamma^{(k)}(P);m) - \prod_{j=1}^{s} \Theta_k(m_j) \right| \ll_{k,\Gamma} \min\left(\frac{Q}{R}, \left(\frac{Q}{R}\right)^k \log^{s-1}\left(2 + \frac{Q}{R}\right) \right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим левую часть доказываемого неравенства через G. С помощью леммы 1 находим

$$G \ll_{k,\Gamma} {\sum_{\gamma \in \Gamma}}' \prod_{j=1}^{s} \left(\sum_{|m_j| \leqslant Q_j} |m_j - P\gamma_j|_1^{-k} \right) \ll_{k,\Gamma} {\sum_{\gamma \in \Gamma}}' \Psi_k\left(\frac{|P\gamma_1|_1}{Q_1}\right) \cdots \Psi_k\left(\frac{|P\gamma_s|_1}{Q_s}\right),$$

где $\Psi_k(u) = \min(1, u^{-k})$ для $u > 0$. С помощью (12) получаем ($l_1, \ldots, l_s$ — неотрицательные целые)

$$G \ll_{k,\Gamma} \sum_{N(\Gamma)P^s \leqslant 2^{l_1+\cdots+l_s}} \frac{2^{l_1+\cdots+l_s}}{P^s} \cdot \Psi_k\left(\frac{2^{l_1}}{Q_1}\right) \cdots \Psi_k\left(\frac{2^{l_s}}{Q_s}\right) \ll_{k,\Gamma}$$

$$\ll_{k,\Gamma} \frac{1}{R} \cdot \underset{N(\Gamma)R \leqslant u_1 \ldots u_s < \infty}{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty} \Psi_k\left(\frac{u_1}{Q_1}\right) \cdots \Psi_k\left(\frac{u_s}{Q_s}\right) du_1 \ldots du_s =$$

$$= \frac{Q}{R} \underset{N(\Gamma)R/Q \leqslant v_1 \ldots v_s < \infty}{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty} \Psi_k(v_1) \cdots \Psi_k(v_s) dv_1 \ldots dv_s.$$

Индукцией по s легко показать, что для $0 < \Delta < \infty$

$$\underset{\Delta \leqslant v_1 \ldots v_s < \infty}{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty} \Psi_k(v_1) \cdots \Psi_k(v_s) dv_1 \ldots dv_s \ll_{k,s} \min(1, \Delta^{1-k} \log^{s-1}(2 + \Delta)).$$

Поэтому

$$G \ll_{k,\Gamma} \min\left(\frac{Q}{R}, \left(\frac{Q}{R}\right)^k \cdot \log^{s-1}\left(2 + \frac{Q}{R}\right) \right).$$

Лемма 2 полностью доказана.

3. Доказательство верхних оценок

Пусть $q=1+[k/2]$ и $(q\mathbb{Z})^s=\{(qm_1,\dots,qm_s)\mid(m_2,\dots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\}$ — равномерная прямоугольная решетка в $\mathbb{R}^s$. Положим для $2\leqslant P<\infty$

$$\mathfrak{S}=\mathfrak{S}_q\otimes\mathfrak{S}_\Gamma^{(k)}(P),$$

где

$$\mathfrak{S}_q=\left\{\left(\frac{1}{q^s};\frac{n_1}{q},\dots,\frac{n_s}{q}\right)\ \middle|\ 0\leqslant n_1,\dots,n_s<q\right\}.$$

Заметим, что для $m\in\mathbb{Z}^s\setminus(q\mathbb{Z}^s)$

$$S(\mathfrak{S}_q;m)=0.$$

Принимая во внимание лемму 1 и (7), отсюда для $k=1+[\alpha]$ находим

$$R(E^{(\alpha;s)};\mathfrak{S})\ll_{\alpha,\Gamma}\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}|m|_1^{-\alpha}\left({\sum_{\gamma\in\Gamma}}'|m-P\gamma|_1^{-k}\right)=$$

$$={\sum_{\gamma\in\Gamma}}'\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{m_j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|m_j|_1^{\alpha}|m_j-P\gamma_j|_1^{k}}\right)\ll_{\alpha,s}{\sum_{\gamma\in\Gamma}}'|P\gamma|_1^{-\alpha}.$$

С помощью (12) получаем

$${\sum_{\gamma\in\Gamma}}'|P\gamma|_1^{-\alpha}\ll_{\alpha,\Gamma}\sum_{N(\Gamma)P^s\leqslant 2^l<\infty}\ \sum_{l_1+\dots+l_s=l}\left(\prod_{j=1}^{s}\max(1,2^{l_j})\right)^{-\alpha}\cdot\frac{2^{l_1+\dots+l_s}}{P^s}.$$

Индукцией по s легко доказать, что при $0<\beta<\infty$

$$\sum_{l_1+\dots+l_s=l}\left(\prod_{j=1}^{s}\max(1,2^{l_j})\right)^{-\beta}\ll_{\beta,s}\begin{cases}(l+1)^{s-1}2^{-\beta l}, & \text{для }\ 0\leqslant l<\infty;\\ |l|^{s-1}, & \text{для }\ -\infty<l<0.\end{cases}$$

Поэтому

$$R(E^{\alpha;s};\mathfrak{S})\ll_{\alpha,\Gamma}\frac{1}{P^s}\sum_{N(\Gamma)P^s\leqslant 2^l<\infty}2^l(1+|l|)^{s-1}2^{-\alpha l}\ll_{\alpha,\Gamma}\frac{(\log P)^{s-1}}{P^{\alpha s}}.$$

Заметим, что число элементов сетки $\mathfrak{S}$ асимптотически равно

$$q^sD(\Gamma)P^s+O_{\alpha,\Gamma}(P^{s-1})$$

при $P\to\infty$. Добавляя при необходимости узлы с нулевыми весами, отсюда получаем неравенство

$$R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right)\ll_{\alpha,s}\frac{(\log N)^{s-1}}{N^{\alpha}},$$

которое вместе с нижней оценкой И. Ф. Шарыгина из [7] и составляет утверждение теоремы 1.

Теперь рассмотрим классы $W_P^{(\alpha;s)}$.

Случай $2<p<\infty$**.** С помощью (8) находим

$$R(W_P^{(\alpha;s)};\mathfrak{S}) \leqslant R(W_2^{(\alpha;s)};\mathfrak{S}) \leqslant \left(|S(\mathfrak{S};(0,\ldots,0))-1|^2 + {\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}}' \frac{|S(\mathfrak{S};m)|^2}{|m|_1^{2\alpha}}\right)^{1/2}.$$

Так как

$$S(\mathfrak{S};m) \ll_{\alpha,\Gamma} 1,$$

то, принимая во внимание ранее полученные оценки с $k=1+[2\alpha]$, получим

$$R(W_P^{(\alpha;s)};\mathfrak{S}) \ll_{\alpha,s} \frac{(\log P)^{\frac{s-1}{2}}}{P^{\alpha s}}$$

Отсюда следует оценка

$$R_N(W_P^{(\alpha;s)}) \ll_{\alpha,p,s} \frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N^{\alpha}}$$

для $2\leqslant p<\infty$, $1/2<\alpha<\infty$.

Случай $1<p\leqslant 2$. С помощью неравенства Гельдера из (8) для положительного δ, которое мы выберем в дальнейшем, получим

$$\left(R(W_P^{(\alpha;s)};\mathfrak{S})\right)^{p'} \ll_{\alpha,p,s,\delta} \sum_{l=1}^{\infty} 2^{\delta|l-L|} \int\limits_{\mathbb{T}^s} \left| \sum_{2^{l-1}\leqslant|m|_1<2^l} \frac{S^*(\mathfrak{S};m)}{|m|_1^{\alpha}} \exp(-2\pi i(m,x)) \right|^{p'} dx,$$

где

$$L = s\log_2 P, \qquad S^*(\mathfrak{S};(0,\ldots,0)) = S(\mathfrak{S};(0,\ldots,0)) - 1$$

и для $m\neq(0,\ldots,0)$ выполняется равенство $S^*(\mathfrak{S};m)=S(\mathfrak{S};m)$. Оценивая интеграл по теореме Литтлвуда-Пэли (см. [16]), находим

$$\left(R(W_P^{(\alpha;s)};\mathfrak{S})\right)^{p'} \ll_{\alpha,p,s,\delta}$$

$$\ll \sum_{l=1}^{\infty} 2^{\delta|l-L|} \int\limits_{\mathbb{T}^s} \left(\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_s=l\\ 1\leqslant l_1,\ldots,l_s<\infty}} \left| \sum_{\substack{2^{l_j-1}\leqslant|m_j|_1<2^{l_j}\\ 1\leqslant j\leqslant s}} \frac{S^*(\mathfrak{S};m)}{|m|_1^{\alpha}} \exp(-2\pi i(m,x)) \right|^2 \right)^{p'/2} dx.$$

В соответствии с леммой 2 внутренняя подинтегральная сумма с точностью до констант оценивается величиной

$$(l+1)^{s-1}\beta_k\left(\frac{2^l}{P^s}\right),$$

где $\beta_k(u)=\min\bigl(u, u^k \log^{s-1}\bigl(2+\frac{1}{u}\bigr)\bigr)$. При этом мы использовали очевидное равенство

$$S(\mathfrak{S}_q; m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m \in (q\mathbb{Z})^s; \\ 0, & \text{если } \ m \notin (q\mathbb{Z})^s. \end{cases}$$

Отсюда, применив равенство Парсеваля, находим

$$\Bigl(R(W_P^{(\alpha;s)}; \mathfrak{S})\Bigr)^{p'} \ll_{\alpha,p,\Gamma,\delta}$$

$$\ll \sum_{l\,=\,1}^{\infty} 2^{\delta|l-L|} \cdot (l+1)^{(p'-2)(s-1)/2} \beta_k^{p'-2}\left(\frac{2^l}{P^s}\right) \cdot 2^{-(p'-2)\alpha l} \sum_{2^{l-1} \leqslant |m|_1 < 2^l} \frac{|S^*(\mathfrak{S}; m)|^2}{|m|_1^{2\alpha}} \ll_{\alpha,\Gamma}$$

$$\ll_{\alpha,\Gamma} \sum_{l\,=\,1}^{\infty} 2^{\delta|l-L|} \cdot (l+1)^{p'(s-1)/2} \beta_k^{p'-1}\left(\frac{2^l}{P^s}\right) \cdot 2^{-p'\alpha l} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{P^{p'\alpha s}} \sum_{1 < 2^l \leqslant P^s} (l+1)^{p'(s-1)/2} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{\delta} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{p'\alpha} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{-k(p'-1)} \left(\log\left(2+\frac{P^s}{2^l}\right)\right)^{(s-1)(p'-1)} +$$

$$+ \frac{1}{P^{p'\alpha s}} \sum_{P^s < 2^l < \infty} (l+1)^{p'(s-1)/2} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{-\delta} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{p'\alpha} \left(\frac{P^s}{2^l}\right)^{-(p'-1)}.$$

Положив

$$\delta = \frac{p'}{2}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right), \quad k = 1 + \left[\frac{\delta + p'\alpha}{p'-1}\right],$$

получим

$$R(W_P^{(\alpha;s)}; \mathfrak{S}) \ll_{\alpha,p,\Gamma} \frac{(\log P)^{\frac{s-1}{2}}}{P^{\alpha s}},$$

откуда следует утверждаемая в теореме 2 верхняя оценка

$$R_N(W_P^{(\alpha;s)}) \ll_{\alpha,p,s} \frac{(\log N)^{\frac{s-1}{2}}}{N^{\alpha}}$$

для $1 < p \leqslant 2$, $1/p < \alpha < \infty$. Доказательство нижних оценок повторяет рассуждения из работ [9, 11–13].

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1974.

[2] Н. М. Коробов, "Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел", *Докл. АН СССР*, **115**:6, (1957), 1062–1065.

[3] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, МЦНМО, М., 2004.

[4] Н. М. Коробов, "О приближенном вычислении кратных интегралов", *Докл. АН СССР*, **124**:6, (1959), 1207–1210.

[5] Н. С. Бахвалов, "О приближенном вычислении кратных интегралов", *Вестник МГУ*, **6**, (1959), 3–18.

[6] Н. М. Коробов, “Квадратурные формулы с комбинированными сетками”, *Мат. заметки*, **55**:2, (1994), 83–90.

[7] И. Ф. Шарыгин, “Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций”, *Выч. матем. и матем. физики*, **3**, (1963), 370–376.

[8] К. К. Фролов, “Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций”, *Докл. АН СССР*, **231**:4, (1976), 818–821.

[9] В. А. Быковский, *О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток*, АН СССР. Дальневосточный научный центр. Вычислительный центр, Владивосток, 1985, 31 с.

[10] M. M. Skriganov, “Constructions of uniform distributions in terms of geometry of numbers”, *Алгебра и анализ*, **6**:3, (1994), 200–230.

[11] В. А. Быковский, *Оценки отклонений оптимальных сеток в -норме и теория квадратурных формул*, Дальнаука, Владивосток, 1995, 19 с.

[12] В. Н. Темляков, “Об оценках погрешностей квадратурных формул для классов функций с ограниченной смешанной производной”, *Мат.заметки*, **46**, (1989), 128–134.

[13] В. Н. Темляков, “Об одном приеме получения оценок снизу погрешностей квадратурных формул”, *Мат. сб.*, **181**:10, (1990), 1403–1413.

[14] В. С. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1965; Англ. перевод: J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer-Verlag, 1959.

[15] З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Наука, М., 1985.

[16] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

Поступила в редакцию
21 мая 2019 г.

Bykovskii V. A. Extremal cubature formulas for anisotropic classes. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 10–19.

ABSTRACT

Let $E^{(\alpha;s)}$ be a class of periodical functions

$$f(x_1,\dots,x_s) = \sum_{(m_1,\dots,m_s)\in\mathbb{Z}^s} c(m_1,\dots,m_s)\exp\left(2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)\right)$$

with $|c(m_1,\dots,m_s)| \leqslant \prod_{j=1}\left(\max(1,|m_j|)\right)^{-\alpha}$, and $1<\alpha<\infty$. In this work for all natural numbers $1<N<\infty$ we prove best possible estimation

$$R_N\left(E^{(\alpha;s)}\right) \ll_{\alpha,s} \frac{(\log N)^{s-1}}{N^{\alpha}}$$

for the error of the best cubature formula on the class $E^{(\alpha;s)}$ with N nodes and weights. Similar results are proved for other classes of functions.

Key words: *cubature formulas, anisotropic classes of functions.*