УДК 517.54
MSC2010 30C75, 30C85

© В. Н. Дубинин[1]

Круговая симметризация и функция Грина

Изучается поведение функции Грина при круговой симметризации области, расположенной на римановой поверхности.

Ключевые слова: *круговая симметризации, функция Грина, гриновая энергия дискретного заряда.*

Введение и формулировки результатов

Поведение функции Грина при симметризации области ее определения изучалось многими математиками [1–8]. В указанных работах рассматривались симметризация Штейнера, круговая симметризация и их модификации в n-мерном евклидовом пространстве. Автором дано определение круговой симметризации множеств и конденсаторов на римановых поверхностях [9, 10]. Отличие этого преобразования от классических видов симметризации состоит в том, что результат преобразования расположен на римановой поверхности, а именно на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышева первого рода. Данная симметризация получила существенные приложения в геометрической теории функций (см., например, [9, 11–14]). В настоящей статье изучается поведение функции Грина и гриновой энергии дискретного заряда при симметризации множеств, расположенных на римановой поверхности [10].

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathscr{R}$, склеенная из конечного или счетного числа областей замкнутой комплексной плоскости таким образом, чтобы выполнялись условия: проекция каждой точки поверхности $\mathscr{R}$ совпадает с точкой склеиваемой области; окрестность каждой точки $\mathscr{R}$ представляет собой или однолистный круг, или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре. Мы ограничимся рассмотрением класса $\mathfrak{R}_p, p \geqslant 2$, всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

(1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho) := \{w : |w| = \rho\}$, с учетом кратности не превосходит $2\pi\rho p$, $0 < \rho < \infty$;

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `dubinin@iam.dvo.ru`

(2) для всех ρ, $1 \leqslant \rho < \infty$, любая замкнутая жордановая кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

В первом параграфе данной статьи приводится определение симметризации Sym [10] открытых $\mathscr{B}$ и замкнутых $\mathscr{E}$ множеств, лежащих на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$. Результат такой симметризации $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ ($\operatorname{Sym}\mathscr{E}$) расположен на римановой поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \ldots$. Пусть $\mathscr{B}$ — открытое множество на поверхности $\mathscr{R} \in \mathfrak{R}_p$. Обозначим через $g_{\mathscr{B}}(Z,W)$ функцию Грина связной компоненты $\mathscr{B}$, содержащей точки Z и W. Если точки Z и W принадлежат разным компонентам $\mathscr{B}$, полагаем $g_{\mathscr{B}}(Z,W) = 0$.

Теорема 1. *Предположим, что подмножество $\mathscr{B}$ поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ и множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B} \in \mathscr{R}(T_p)$ являются односвязными областями, и пусть Z, W — точки области $\mathscr{B}$, отличные от точек разветвления $\mathscr{R}$, $|\operatorname{pr} Z| \neq |\operatorname{pr} W|$. Тогда*

$$g_{\mathscr{B}}(Z,W) \leqslant g_{\operatorname{Sym}\mathscr{B}}(\operatorname{Sym} Z, \operatorname{Sym} W). \tag{1}$$

Для открытого множества $\mathscr{B}$, имеющего функцию Грина, и любой точки $Z \in \mathscr{B}$, отличной от точки разветвления $\mathscr{R}$, положим по определению

$$g_{\mathscr{B}}(Z,Z) = \lim_{W \to Z} \{g_{\mathscr{B}}(W,Z) + \log|\operatorname{pr} W - \operatorname{pr} Z|\}.$$

Рассмотрим теперь совокупность $\{Z_k\}_{k=1}^n$ различных точек множества $\mathscr{B}$, отличных от точек ветвления $\mathscr{R}$, и совокупность неотрицательных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^n$, $n \geqslant 1$. Гриновую энергию дискретного заряда $\{\nu_k\}_{k=1}^n$ относительно $\mathscr{B}$ определим равенством

$$E(\mathscr{B}, \{Z_k\}_{k=1}^n, \{\nu_k\}_{k=1}^n) = \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \nu_k \nu_l g_{\mathscr{B}}(Z_k, Z_l).$$

(ср. [15, гл. I, §4]). Следующее утверждение дополняет теорему 1.

Теорема 2. *В принятых выше обозначениях пусть $|\operatorname{pr} Z_k| \neq |\operatorname{pr} Z_l|$ при $k \neq l$, $k,l = 1, \ldots, n$. Тогда справедливо неравенство*

$$E(\mathscr{B}, \{Z_k\}_{k=1}^n, \{\nu_k\}_{k=1}^n) \leqslant E(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \{\operatorname{Sym} Z_k\}_{k=1}^n, \{\nu_k\}_{k=1}^n). \tag{2}$$

Теорема 2 не содержит теорему 1, поскольку в неравенстве для энергией (2) присутствуют слагаемые вида $\nu_k^2 g_{\mathscr{B}}(Z_k, Z_k)$, $k = 1, \ldots, n$. С другой стороны, из (1) не следует (2), так как в теореме 1 рассматриваются только односвязные области.

1. Симметризация и емкости конденсаторов

Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p$ является риманова поверхность $\mathscr{R}(T_p)$. Приведем описание этой поверхности в случае $p \geqslant 2$. Пусть D_1 есть w-плоскость с разрезом по лучу $L^- = [-\infty, -1]$, области $D_2, \ldots, D_{p-1}$ суть w-плоскости с разрезами вдоль лучей L^- и $L^+ = [-1, +\infty]$ и D_p — w-плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное.

Риманову поверхность $\mathscr{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k=1,\ldots,p$, следующим образом (подробнее см. [10]). Область D_1 склеивается крест-накрест с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^-. Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и вдоль луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$, $k=1,\ldots,p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[1,+\infty]$.

Рассмотрим теперь произвольную поверхность $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$. Пусть $\mathscr{B}$ — открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0\leqslant\rho\leqslant\infty$, над “окружностью” $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1\leqslant\rho\leqslant\infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ также покрывает окружность $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $0\leqslant\rho<l$, l-кратно, $l\leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1\leqslant\rho<\infty$ часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$. Линейная мера этой дуги равна мере множества $\mathscr{B}(\rho):=\{W\in\mathscr{B}:|\operatorname{pr}W|=\rho\}$. При $0<\rho<1$ часть $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ и открытой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k=\Gamma_k(\mathscr{B},\rho)\subset\mathscr{D}_k$, $k=1,\ldots,m+1$, $0\leqslant m\leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m=0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E}\subset\mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0\leqslant\rho\leqslant\infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1\leqslant\rho\leqslant\infty$, p-кратно, то множество $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p-кратно. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $0\leqslant\rho<1$, l-кратно, $l\leqslant p$, то часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1,\ldots,\mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1\leqslant\rho<\infty$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(T_p)$ с центром на луче $\mathscr{L}$. Линейная мера этой дуги равна мере множества $\mathscr{E}(\rho):=\{W\in\mathscr{E}:|\operatorname{pr}W|=\rho\}$ (в случае, когда данная мера равна нулю, соответствующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\operatorname{Sym}\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0<\rho<1$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k\subset\mathscr{D}_k$, $k=1,\ldots,m+1$, $0\leqslant m\leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m — целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Конденсатором на поверхности $\mathscr{R}$ называют упорядоченную пару множеств $\mathscr{C}=(\mathscr{B},\mathscr{E})$, где $\mathscr{B}$ – открытое подмножество $\mathscr{R}$, а $\mathscr{E}$ — компакт в $\mathscr{B}$. *Емкость* $\operatorname{cap}\mathscr{C}$

конденсатора $\mathscr{C}=(\mathscr{B},\mathscr{E})$ определяется равенством

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} = \inf \int\limits_{\mathscr{B}} |\bigtriangledown \mathscr{V}|^2 d\sigma,$$

где нижняя грань берется по всем вещественнозначным функциям $\mathscr{V}$, финитным в $\mathscr{B}$, равным единице на $\mathscr{E}$ и удовлетворяющим условию Липшица локально в $\mathscr{B}$. Обозначим через

$$\operatorname{Sym}\mathscr{C} = (\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym}\mathscr{E})$$

результат круговой симметризации конденсатора $\mathscr{C}=(\mathscr{B},\mathscr{E})$.

Лемма 1. (см. [10, теорема 1.1]) *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p$ выполняется неравенство*

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap}\operatorname{Sym}\mathscr{C}.$$

Предположим, что для открытого множества $\mathscr{B}\subset\mathscr{R}$ существует функция Грина $g_{\mathscr{B}}(Z,W)$. Рассмотрим совокупность $\{Z_k\}_{k=1}^n$ различных конечных точек множества $\mathscr{B}$, отличных от точек разветвления поверхности $\mathscr{R}$, и совокупность неотрицательных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^n$. Для достаточно малого $r>0$ замкнутые однолистные круги $\mathscr{E}_k(r)$, центры которых расположены в точках Z_k а радиусы равны r^{1/ν_k} соответственно, лежат в $\mathscr{B}$ и попарно не пересекаются, $k=1,\ldots,n$. Обозначим через $\mathscr{C}(r)$ конденсатор $(\mathscr{B}, \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k(r))$.

Лемма 2. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\operatorname{cap}\mathscr{C}(r) = -2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\nu_k}{\log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \nu_k\nu_l g_{\mathscr{B}}(Z_k,Z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + \\ +o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \qquad r\to 0. \tag{3}$$

Доказательство леммы 2 повторяет по существу доказательство части теоремы 2.1 из книги [16] и поэтому здесь не приводится.

2. Доказательство теорем

Можно считать, что множество $\mathscr{B}$ ограничено конечным числом аналитических кривых. В этом случае граница множества $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых и существует функция Грина $g_{\operatorname{Sym}\mathscr{B}}(Z,W)$.

Начнем с доказательства теоремы 2. Рассмотрим конденсатор $\mathscr{C}(r)$, определенный перед леммой 2. Результат симметризации этого конденсатора $\operatorname{Sym}\mathscr{C}(r)$ расположен на поверхности $\mathscr{R}(T_p)$. Непосредственно из определения круговой симметризации Sym видно, что при малых значениях r множество

$$\operatorname{Sym} \bigcup_{k=1}^{n} \mathscr{E}_k(r) = \bigcup_{k=1}^{n} \operatorname{Sym}\mathscr{E}_k(r)$$

представляет собой объединение замкнутых попарно непересекающихся однолистных кругов $\mathscr{E}_k(r)$ на листе $\mathscr{D}_1$ поверхности $\mathscr{R}(T_p)$. Центр круга $\mathscr{E}_k(r)$ находится в точке $\operatorname{Sym} Z_k$, а радиус этого круга равен r^{1/ν_k}, $k=1,\dots,n$. Поэтому к конденсатору $\operatorname{Sym}\mathscr{E}_k(r)$ применима лемма 2, согласно которой

$$\operatorname{cap}\operatorname{Sym}\mathscr{C}(r) =$$
$$= -2\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{\nu_k}{\log r} - 2\pi\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\nu_k\nu_l g_{\operatorname{Sym}\mathscr{B}}(\operatorname{Sym} Z_k, \operatorname{Sym} Z_l)\right\}\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 +$$
$$+o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \qquad r\to 0.$$

Учитывая это разложение, формулу (3) и применяя лемму 1, приходим к неравенству (2). Теорема 2 доказана.

Отметим частный случай теоремы 2. Величину

$$r(\mathscr{B}, Z) = \exp g_{\mathscr{B}}(Z, Z)$$

называют *внутренним радиусом* множества $\mathscr{B}$ относительно точки Z [16, часть 2.1]. Из теоремы 2 вытекает неравенство

$$r(\mathscr{B}, Z) \leqslant r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, \operatorname{Sym} Z). \tag{4}$$

Следующее ниже доказательство теоремы 1 восходит в идейном плане к работе Кшижа [1]. Достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{pr} Z\neq\infty$, $\operatorname{pr} W\neq\infty$ и граница области $\mathscr{B}$ невырожденная. По теореме Римана существует голоморфная функция f, отображающая однолистно единичный круг $U=\{z\colon |z|<1\}$ на область $\mathscr{B}$ так, что $f(0)=Z$ и $f(x_0)=W$, где x_0 — некоторое вещественное число, $0<x_0<1$. Пусть f^* — функция, отображающая круг U на область $\operatorname{Sym}\mathscr{B}$, $f^*(0)=\operatorname{Sym} Z$, $f^*(x_0^*)=\operatorname{Sym} W$, $0<x_0^*<1$. Обозначим через γ образ отрезка $[0,x_0]$ на поверхности $\mathscr{R}$ при отображении функцией f, и пусть γ^* — образ $[0,x_0^*]$ при отображении f^*. По принципу симметрии Римана–Шварца γ^* есть отрезок, лежащий на луче $\mathscr{L}\subset\mathscr{R}(T_p)$. Можно считать, что кривая γ не проходит через точки разветвления поверхности $\mathscr{R}$. Из определения симметризации видно, что множество $\operatorname{Sym}\gamma$ содержит отрезок γ^*. Кроме того, из определения симметризации видно, что элемент длины кривой не возрастает при круговой симметризации. С учетом неравенства (4) заключаем, что

$$\int_{\gamma}\frac{ds}{r(\mathscr{B}, Z)} \geqslant \int_{\gamma^*}\frac{ds}{r(\operatorname{Sym}\mathscr{B}, Z)}.$$

Отсюда, в силу конформной инвариантности величины

$$\frac{ds}{r(\mathscr{B}, Z)},$$

выполняется

$$\int_0^{x_0}\frac{dx}{1-x^2} \geqslant \int_0^{x_0^*}\frac{dx}{1-x^2}.$$

Следовательно, $\log x_0 \geqslant \log x_0^*$. Напомним, что $r(U,x)=1-x^2$, а функция Грина круга U с полюсом в точке $z=0$ равна $-\log|z|$. Инвариантность функций Грина при отображениях f и f^* приводит нас к неравенству (1). Теорема 1 доказана.

Заметим, что, в отличие от классической круговой симметризации Полиа, в нашем случае множество $\mathrm{Sym}\,\mathscr{B}$ не обязано быть областью, даже если $\mathscr{B}$ — односвязная область. Таким образом, требование в теореме 1, чтобы открытое множество $\mathrm{Sym}\,\mathscr{B}$ также было связным, существенно. Приведенные выше доказательства можно распространить на случай симметризации Sym_τ [13] вместо Sym.

Список литературы

[1] J. Krzyz, “Circular symmetrization and Green’s function”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys.*, **7**, (1959), 327–330.

[2] A. Baernstein, “Integral means, univalent functions and circular symmetrization”, *Acta math.*, **133**:3-4, (1974), 139–169.

[3] A. Baernstein, B. A. Taylor, “Spherical rearrangements, subharmonic functions, and *-functions in n-space”, *Duke Math. J.*, **43**, (1976), 245–268.

[4] M. Essen , D. Shea, “On some questions of uniqueness in the theory of symmetrization”, *Ann. Acad. Sci. Rain. Ser. A I Math.*, **4**, (1978/1979), 311–340.

[5] A. Weitsman, “Symmetrization and the Poincari metric”, *Ann. of Math.*, **124**:2, (1986), 159–169.

[6] A. Fryntov, “Extremal properties of Green functions and A. Weitsman’s conjecture”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **345**:2, (1994), 511–525.

[7] А. Ю. Солынин, “Поляризация и функциональные неравенства”, *Алгебра и анализ*, **8**:6, (1996), 148–185.

[8] В. Н. Дубинин, “Симметризация, функция Грина и конформные отображения”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **226**, (1996), 80—92.

[9] В. Н. Дубинин, “Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям”, *Матем. сб.*, **203**:7, (2012), 79—94.

[10] В. Н. Дубинин, “Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях”, *Матем. сб.*, **206**:1, (2015), 69—96.

[11] V. N. Dubinin, “Four-point distortion theorem for complex polynomials”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **59**:1, (2014), 59—66.

[12] V. N. Dubinin, V. Y. Kim, “Covering theorem for p-valent functions with Montel’s normalization”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **428**:1, (2015), 502–507.

[13] В. Н. Дубинин, “О логарифмической энергии нулей и полюсов рациональной функции”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:6, (2016), 1255—1261.

[14] В. Н. Дубинин, “Пояс лемнискат и теоремы искажения для многолистных функций. II”, *Матем. заметки*, **104**:5, (2018), 700—707.

[15] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[16] V. N. Dubinin, *Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory*, Springer, Basel: Birkhauser, 2014, xii+344 pp.

Поступила в редакцию
22 февраля 2019 г.

Dubinin V. N. Circular symmetrization and Green function. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 24–30.

ABSTRACT

We study the behaviour of the Green function under the circular symmetrization of a domain on the Riemann surface.

Key words: *circular symmetrization, Green function, Green energy of a discrete charge.*