*Дальневосточный математический журнал.* 2019. Т. 19. № 1. С. 63–74

УДК 512.534+512.58
MSC2010 18F20+20M30

© Е. Е. Скурихин[1]

# Предпучки множеств и действия полугрупп

В работе доказываются теоремы о гомоморфизмах и о полугруппах эндоморфизмов предпучков множеств. Результаты применяются к множествам, на которых действуют полугруппы.

Ключевые слова: *предпучки множеств, действия полугрупп на множествах.*

## Введение

Объекты топосов Гротендика [1], так же, как и категорные топологические пространства [2,3], являются предпучками множеств на некоторой категории. Поскольку любой объект $k$ любой категории характеризуется с точностью до изоморфизма набором морфизмов со значением в $k$, то при изучении структур полезно, и часто необходимо изучать морфизмы.

В тезисах [4] к докладу на международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске-2018" сформулирована без доказательства теорема о гомоморфизмах предпучков множеств. Для её формулировки вводится понятие категории схем вписывания, а доказательство требует подробного анализа этого понятия.

В представляемой работе мы доказываем теорему о гомоморфизмах предпучков множеств, порождённых одним элементом. Она является базовой для рассмотрения общего случая, и не требует введения новых общих конструкций. Её прямым следствием является описание полугрупп эндоморфизмов, мономорфизмов, эпиморфизмов и группы автоморфизмов таких предпучков. Ещё одно следствие, частным случаем которого является, например, лемма Йонеда, даёт описание множества гомоморфизмов предпучка, порождённого одним элементом в произвольный предпучок множеств. Поскольку категория правых $H$-множеств, где $H$ — моноид, изоморфна категории предпучков множеств на категории с одним объектом, то частными случаями результатов теории предпучков являются результаты, относящиеся к действиям полугрупп на множествах. На содержательность последних результатов указывает, например, тот факт [5], что в случае, когда $H=\pi_1(X,x_0)$ — фундаментальная группа "хорошего" топологического пространства, $p\colon Y\to X$ — накрытие, то полугруппа эндоморфизмов слоя $p^{-1}(x_0)$, рассматриваемого, как правое $H$-множество, изоморфна группе топологических автоморфизмов накрытия $p$.

[1] Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690041, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: eeskur@gmail.com

## 1. Обозначения и термины

Пусть $K$ — категория. Через $Ob(K)$ обозначается класс всех объектов $K$, через $Hom(K)$ — класс всех морфизмов между объектами категории $K$, через $K^o$ — дуальная категория. Если $k,l \in Ob(K)$, то $Hom_K(k,l)$ обозначает множество всех морфизмов из $k$ в $l$.

Контравариантный функтор $D: K^o \to L$ из категории $K$ в категорию $L$ называется $L$-предпучком на $K$. Если $L = Sets$ — категория предпучков, то $L$-предпучок называется предпучком множеств, а если $L = Ab$ — категория абелевых групп, то абелевым предпучком. Таким образом, $D$ — это отображение, сопоставляющее каждому $k \in Ob(K)$ объект $D(k) \in Ob(L)$ и каждому морфизму $f: k_1 \to k_2$ морфизм $D(f): D(k_2) \to D(k_1)$, так что если $\mathrm{g}: k_2 \to k_3$, то $D(\mathrm{g} \circ f) = D(f) \circ D(\mathrm{g})$ и $D(1_k) = 1_{D(k)}$.

Класс всех $L$-предпучков на $K$ обозначается $\mathcal{P}_{K,L}$. Для случая $L = Sets$ употребляется обозначение $\hat{K}$.

Как правило, $\mathcal{P}_{K,L}$ (в том числе и $\hat{K}$) будем рассматривать как категорию, объекты которой — это все $L$-предпучки, а морфизмы — естественные преобразования функторов, которые будем называть гомоморфизмами предпучков. Таким образом, $u: D \to E$ — гомоморфизм предпучков, если $u = \{u(k): D(k) \to E(k) \mid k \in Ob(K)\}$ — семейство морфизмов категории $L$, такое, что для любого $f: k_1 \to k_2$, $u(k_1) \circ D(f) = E(f) \circ u(k_2)$.

Зафиксируем объект $k \in Ob(\mathrm{K})$. Тогда $H = Hom_K(k,k)$ — моноид, то есть полугруппа с единицей относительно операции суперпозиции морфизмов. Если $D$ — предпучок множеств, $s \in D(k)$, то формула $sf = D(f)(s)$ задаёт правое действие полугруппы $H$ на множестве $D(\mathrm{k})$. Если $u: D \to E$ гомоморфизм предпучков множеств, $(f: k \to k) \in H$, то равенство $u(k) \circ D(f) = E(f) \circ u(k)$ означает, что $u(k)(sf) = (u(k)(s))f$, то есть что $u(k): D(k) \to E(k)$ — гомоморфизм правых $H$-множеств.

Таким образом, для всякого $k \in Ob(\mathrm{K})$ определён функтор из категории $\hat{K}$ в категорию правых $Hom_K(k,k)$-множеств.

В связи с этим мы будем применять следующие обозначения. Пусть $K$ — категория, $D$ — отображение, сопоставляющее каждому $k \in Ob(K)$ множество $D(k)$ и каждому морфизму $f: n' \to n$ категории $K$ отображение $D(f): D(n) \to D(n')$.

$s \in D \Leftrightarrow s \in D(n)$ для некоторого $n \in Ob(K)$.

$s' = sf \Leftrightarrow s \in D(n)$, $f: n' \to n$, $s' = D(f)(s)$.

$u: D \to E$, $s \in D$, $u(s) = t \Leftrightarrow u = \{u(k): D(k) \to E(k) \mid k \in Ob(K)\}$, $s \in D(n)$, $u(n)(s) = t \in E(n)$.

В этих обозначениях тот факт, что отображение $k \mapsto D(k), f \mapsto D(f)$ является предпучком множеств, выражается соотношением:

$$\forall s \in D \, \forall f, \mathrm{g} \in Hom(K), \quad s(\mathrm{g} \circ f) = (s\mathrm{g})f, \quad s1_k = s$$

каждый раз, когда левые (а тогда и правые) части равенств определены.

Тот факт, что $u = \{u(k): D(k) \to E(k) \mid k \in Ob(K)\}$ является гомоморфизмом предпучков множеств, выражается соотношением:

$$\forall s \in D \, \forall f \in Hom(K), \quad u(sf) = u(s)f$$

каждый раз, когда левая (а тогда и правая) часть равенства определена.

*Замечание.* Описанный выше функтор из категории $\hat{K}$ в категорию правых $Hom_K(k,k)$-множеств, задаваемый соответствием $D \mapsto D(k)$, $u \mapsto u(k)$, в случае, когда категория $K$ содержит единственный объект, является изоморфизмом категорий. Этот факт мы будем использовать в дальнейшем, применяя результаты, относящиеся к гомоморфизмам предпучков, к гомоморфизмам множеств с действием полугруппы.

Пусть $D, E$ — предпучки множеств на категории $K$. Через $D \times E$ обозначается произведение предпучков в категории $\hat{K}$, определяемое так. $(D\times E)(k) = D(k) \times E(k)$, и если $(s,t) \in D(k) \times E(k)$, $f : l \to k$ — морфизм, то $(s,t)f = (sf, tf)$. Если $u : D \to D'$, $v : E \to E'$ гомоморфизмы предпучков множеств, то гомоморфизм $u \times v : D \times E \to D' \times E'$ определяется равенством $(u \times v)(k)(s,t) = (u(k)(s), v(k)(t))$.

Пусть $D$ — предпучок множеств на категории $K$. Выражение $A \subset D$ будем использовать для обозначения того факта, что $A$ является подпредпучком $D$, то есть что $A$ — предпучок множеств на $K$, $\forall k \in Ob(K)$, $A(k) \subset D(k)$ и семейство включений $x(k) : A(k) \to D(k)$ является гомоморфизмом предпучков множеств.

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — подпредпучок $D$. Тогда $\forall k \in Ob(K)$, $\forall s \in A(k)$, $\forall f : l \to k$, $D(f)(s) = A(f)(s) \in A(l)$. Наоборот, если $A = \{A(k) \subset D(k) \mid k \in Ob(K)\}$ — семейство подмножеств, и $\forall k \in Ob(K)$, $\forall s \in A(k)$, $\forall f : l \to k$, $D(f)(s) \in A(l)$, то, полагая $A(f)(s) = D(f)(s)$, получаем предпучок множеств $A$, являющийся подпредпучком $D$.*

Доказательство. Пусть $A \subset D$. Тогда совокупность включений $x(k) : A(k) \to D(k)$ является гомоморфизмом предпучков множеств, то есть при $s \in A(k)$, $D(f)(x(k)(s)) = x(l)(A(f)(s))$, и так как $x(k), x(l)$ — включения, то $D(f)(s) = A(f)(s) \in A(l)$.

Наоборот, если $\forall k \in Ob(K), \forall s \in A(k), \forall f : l \to k : sf \equiv D(f)(s) \in A(l)$, то, полагая $A(f)(s) = D(f)(s)$, получаем отображение $A(f) : A(k) \to A(l)$ и — тем самым — структуру предпучка на $A = \{A(k) \subset D(k) \mid k \in Ob(K)\}$. Обозначив через $x(k)$ включение $A(k) \to D(k)$, получаем $(D(f) \circ (x(k))(s)) = D(f)(x(k)(s)) = D(f)(s) = A(f)(s) = x(l)(A(f)(s)) = (x(l) \circ A(f))(s)$. Таким образом, $D(f) \circ x(k) = x(l) \circ A(f)$, и значит, $x = \{x(k) : A(k) \to D(k) \mid k \in Ob(K)\}$ является гомоморфизмом предпучков $A \to D$. □

Через $\iota^K(k) : K^o \to Sets$ обозначается предпучок множеств, представляющий объект $k$, то есть $\iota^K(k)(l) = Hom_K(l,k)$, и для $f : l_1 \to l_2$, и $\iota^K(k)(f) : \iota^K(k)(l_2) = Hom_K(l_2,k) \to Hom_K(l_1,k) = \iota^K(k)(l_1)$ задаётся равенством

$$\iota^K(k)(f)(h) = (h \circ f : l_1 \to k) \in \iota^K(k)(l_1),$$

если $(h : l_2 \to k) \in \iota^K(k)(l_2)$.

Если $\mathrm{g} : k_1 \to k_2$, то определён гомоморфизм (естественное преобразование) $\iota^K(\mathrm{g}) : \iota^K(k_1) \to \iota^K(k_2)$, задаваемый так.

$$\iota^K(\mathrm{g})(l) : \iota^K(k_1)(l) = Hom_K(l,k_1) \to Hom_K(l,k_2) = \iota^K(k_2)(l).$$
$$\iota^K(\mathrm{g})(l)(v) = \mathrm{g} \circ v, \quad \text{если} \quad v : l \to k_1.$$

В результате получился (ковариантный) функтор $\iota^K : K \to \hat{K}$ из категории $K$ в категорию предпучков множеств на $K$.

Пусть $f : k \to n$ морфизм. Обозначим гомоморфизм предпучков множеств $\iota^K(f) \times \iota^K(f) : \iota^K(k) \times \iota^K(k) \to \iota^K(n) \times \iota^K(n)$ через $\hat{f}$. Таким образом, если $(h_1,h_2) \in \iota^K(k)(l) \times \iota^K(k)(l)$, то $\hat{f}(l)(h_1,h_2) = (f \circ h_1, f \circ h_2) \in \iota^K(n)(l) \times \iota^K(n)(l) = (\iota^K(n) \times \times \iota^K(n))(l)$.

Если $z : X \to Y$ — отображение множеств, то будем обозначать $kerz = \{(x,y) \in X \times \times X \mid z(x) = z(y)\}$.

**Определение 1.** Пусть $D$ — предпучок множеств на категории $K$.

Подпредпучок $R \subset D \times D$ называется отношением эквивалентности на $D$, если для каждого $k \in Ob(K)$ $R(k) \subset D(k) \times D(k)$ является отношением эквивалентности на $D(k)$.

Если $w : D \to E$ — гомоморфизм предпучков множеств, то обозначим $kerw = \{kerw(k) \subset D(k) \times D(k) \mid k \in Ob(K)\}$.

Если $s \in D(k)$, то определим $l$-ядро $(ker_D s)(l) \subset \iota^K(k)(l) \times \iota^K(k)(l)$ элемента $s$, где $l \in Ob(K)$, полагая $(h_1, h_2) \in (ker_D s)(l) \Leftrightarrow h_1, h_2 : l \to k$ и $sh_1 = sh_2$.

Обозначим также через $st_D s$ стабилизатор $s$, то есть множество всех морфизмов $h : k \to k$ таких, что $sh = s$. Ясно, что если рассматривать множество $Hom_K(k,k)$ как моноид, то есть полугруппу с единицей относительно операции суперпозиции морфизмов, то $st_D s$ является его подмоноидом.

**Лемма 2.** *1) Пусть $w : D \to E$ — гомоморфизм предпучков множеств на категории $K$, $A \subset D$, $B \subset E$ — подпредпучки. Тогда:*

*a) семейство $w(A) = \{w(k)(A(k)) \subset E(k) \mid k \in Ob(K)\}$ является подпредпучком предпучка $E$;*

*b) семейство $w^{-1}(B) = \{w(k)^{-1}(A(k)) \subset D(k) \mid k \in Ob(K)\}$ является подпредпучком предпучка $D$;*

*c) имеет место соотношение $w(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset w^{-1}(B)$;*

*d) $w(D) \subset B \Leftrightarrow w = x \circ w'$, где $w' : D \to B$ — однозначно определённый гомоморфизм, $x : B \to E$ — гомоморфизм включения.*

*2) Пусть $D$ — предпучок множеств на категории $K$, $s \in D(k)$.*

*a) Если $D_s(l) = \{sh \mid h \in Hom_K(l,k)\} \subset D(l)$, то $D_s = \{D_s(l) \mid l \in Ob(K)\}$ является наименьшим подпредпучком предпучка $D$, содержащим $s$.*

*b) $ker_D s = \{ker_D s)(l) \mid l \in Ob(K)\}$ является отношением эквивалентности на $\iota^K(k)$ и называется ядром $s$.*

*3) $kerw = \{kerw(k) \subset D(k) \times D(k) \mid k \in Ob(K)$ является отношением эквивалентности на $D$ и называется ядром $w$.*

Доказательство. 1)a) и 1)b) непосредственно проверяются с помощью леммы 1.

По лемме 1 доказываемое соотношение 1)c) равносильно тому, что $\forall k \in Ob(K)$, $u(k)(A(k)) \subset B(k) \Leftrightarrow A(k) \subset u(k)^{-1}(B(k))$, где $u(k) : D(k) \to E(k)$ — отображение множеств, $A(k) \subset D(k)$, $B(k) \subset E(k)$. Но для отображения множеств это очевидно.

Докажем 1)d). Так как $x : B \to E$ — гомоморфизм включения, то для каждого $l \in Ob(K)$, $B(l) \subset E(l)$ и $x(l) : B(l) \to E(l)$ — отображение включения. Пусть $w(D) \subset$

$B$. Тогда $w(l)(D(l)) \subset B(l)$, так что имеется однозначно определённое отображение $w'(l) : D(l) \to B(l)$, такое, что $w(l) = x(l) \circ w'(l)$. Непосредственно проверяется, что $w' = \{w'(l) : D(l) \to B(l) \mid l \in Ob(L)\}$ является гомоморфизмом предпучков, так что $w = x \circ w'$.

Наоборот, если $w = x \circ w'$, то $w(l)(D(l)) = x(l)(w'(l)(D(l)) \subset x(l)(B(l)) = B(l)$, так что $w(D) \subset B$.

2)a) прямо следуют из леммы 1.

Доказательство 2)b и 3) следует из очевидного факта, что $\{ker_D s)(l)$ и $kerw(k)$ являются отношениями эквивалентности на множествах $Hom_K(l,k)$ и $D(k)$ соответственно.

Докажем, что $ker_D s$ является подпредпучком $\iota^K(k) \times \iota^K(k)$. По лемме 1, достаточно проверить, что если $(h_1, h_2) \in (ker_D sf)(l)$, $\mathrm{g} : l' \to l$, то $(h_1, h_2)\mathrm{g} \in (ker_D sf)(l')$. По определению произведения предпучков, $(h_1, h_2)\mathrm{g} = (h_1 \circ \mathrm{g}, h_2 \circ \mathrm{g})$, и так как $sh_1 = sh_2$, то $s(h_1 \circ \mathrm{g}) = (sh_1)\mathrm{g} = (sh_2)\mathrm{g} = s(h_2 \circ \mathrm{g})$, так что $(h_1 \circ \mathrm{g}, h_2 \circ \mathrm{g}) \in (ker_D sf)(l')$, то есть $(h_1, h_2)\mathrm{g} \in (ker_D sf)(l')$.

С помощью леммы 1 непосредственно проверяется также, что $kerw = \{kerw(k) \subset D(k) \times D(k) \mid k \in Ob(K)$ является подпредпучком $D \times D$. □

**Лемма 3.** *Пусть $D$ — предпучок множеств, $s \in D(k)$, $f : l \to k$ морфизм категории $K$.*

*1) $ker_D(sf) = \hat{f}^{-1}(ker_D s)$.*

*2) a) $h \in st_D s \Leftrightarrow (h, 1_k) \in ker_D s$; b) пусть $\mathrm{g}, h : l \to k$. Если $(\mathrm{g}, h) \in (ker_D s)(l)$ и $h \circ h' = 1_k$, то $\mathrm{g} \circ h' \in st_D s$. Наоборот, если $\mathrm{g} \circ h' \in st_D s$ и $h' \circ h = 1_l$, то $(\mathrm{g}, h) \in (ker_D s)(l)$. Таким образом, если $h^{-1}$ обратный к $h$ морфизм, то $(\mathrm{g}, h) \in (ker_D s)(l) \Leftrightarrow \mathrm{g} \circ h^{-1} \in st_D s$.*

Доказательство. 1) Пусть $h_1, h_2 : l' \to l$ — морфизмы. По определению, $(h_1, h_2) \in (ker_D sf)(l') \Leftrightarrow s(f \circ h_1) = s(f \circ h_2) \Leftrightarrow (f \circ h_1, f \circ h_1) \in (ker_D s)(l') \Leftrightarrow \hat{f}(l')(h_1, h_2) \in (ker_D s)(l') \Leftrightarrow (h_1, h_2) \in (\hat{f}(l')^{-1}(ker_D s)(l')) = (\hat{f}^{-1}(ker_D s))(l')$.

Равенство 2)a) очевидно. Утверждение 2)b) прямо следует из a) и того факта, что $ker_D s$ является подпредпучком $\iota^K(k) \times \iota^K(k)$. □

## 2. Основная теорема

**Лемма 4**.

**Лемма 4.** *Пусть $D$, $E$ — предпучки множеств на категории $K$, $s \in D(k)$.*

*1) Если $w_1, w_2 : D_s \to E$ — гомоморфизмы предпучков множеств и $w_1(k)(s) = w_2(k)(s)$, то $w_1 = w_2$.*

*2) Пусть $w : D_s \to E$ — гомоморфизм предпучков множеств, $t = w(k)(s)$ и $x_t : E_t \to E$ — гомоморфизм включения. Тогда $w(D_s) = E_t$ и $w = x_t \circ w'$, где $w' : D_s \to E_t$ — эпиморфизм предпучков множеств. В частности, если $E = E_t$, то $w$ — эпиморфизм.*

Доказательство. 1) Пусть $l \in Ob(K)$, $s' \in D_s(l)$. Тогда $s' = sh$, где $h : l \to k$, поэтому $w_1(l)(s') = w_1(l)(sh) = w_1(k)(s)h = w_2(k)(s)h = w_2(l)(s')$, то есть $w_1 = w_2$.

2) Из определения $D_s$ (лемма 2) и равенства $t = w(k)(s)$ непосредственно получается, что $w(D_s) = E_t$. По лемме 2, $w = x_t \circ w'$, где $w' : D_s \to E_t$. Известно, что гомоморфизм предпучков множеств $v : D \to E$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $v(D) = E$. Так как $x_t$ — включение, то $w(D_s) = x_t(w'(D_s)) = w'(D_s)$, и так как $w(D_s) = E_t$, то $w'(D_s) = E_t$, то есть $w'$ — эпиморфизм. □

Пусть $D, E$ — предпучки множеств на категории $K$, $s \in D(k)$, $t \in E(n)$, $f : k \to n$ морфизм категории $K$. Тогда имеется не более одного гомоморфизма $u(f) = u^{s,t}(f) : D_s \to E_t$ предпучков множеств такого, что $u(f)(s) = tf$. Через $H(s,t) \subset Hom_K(k,n)$ обозначим множество всех $f$, для которых существует $u(f)$. Выражение $H(s,s)$ будем сокращать до $H(s)$. Таким образом, формулой $u(f)(s) = tf$ определено отображение $u = u^{s,t} : H(s,t) \to Hom_{\hat{K}}(D_s, E_t)$, в частности $u = u^s \equiv u^{s,s} : H(s) \to Hom_{\hat{K}}(D_s, D_s)$.

**Теорема 1.** *Пусть $D, E, F$ — предпучки множеств, $s \in D(k)$, $t \in E(n)$, $r \in F(m)$.*

*1)a) Отображение $u^{s,t} : H(s,t) \to Hom_{\hat{K}}(D_s, E_t)$ сюръективно;*

*b) $ker u^{s,t} \equiv \{(f,h) \in H(s,t) \mid u(f) = u(h)\} = (ker_E t)(k)) \cap (H(s,t) \times H(s,t))$, так что $\forall f, h \in H(s,t), u(f) = u(h) \Leftrightarrow (f,h) \in (ker_E t)(k)$;*

*c) если $f \in H(s,t), \mathrm{g} \in H(t,r)$, то $\mathrm{g} \circ f \in H(s,r)$ и $u(\mathrm{g} \circ f) \equiv u^{s,r}(\mathrm{g} \circ f) = u^{t,r}(\mathrm{g}) \circ u^{s,t}(f) = u(\mathrm{g}) \circ u(f)$;*

*d) $u(1_k) = 1_{D_s} : D_s \to D_s$.*

*2) Для любого морфизма $f : k \to n$ следующие условия эквивалентны:*

*(1) $f \in H(s,t)$;*

*(2) $ker_D s \subset \hat{f}^{-1}(ker_E t)$;*

*(3) $\hat{f}(ker_D s) \subset ker_E t$.*

*3) Для любого морфизма $f : k \to n$ следующие условия эквивалентны:*

*(1') $f \in H(s,t)$ и $u(f) : D_s \to E_t$ является мономорфизмом предпучков множеств;*

*(2') $ker_D s = \hat{f}^{-1}(ker_E t)$.*

*4) Для любого морфизма $f \in H(s,t)$, $u(f)(D_s) = E_{tf}$, так что следующие условия эквивалентны:*

*(1") $u(f) : D_s \to E_t$ является эпиморфизмом предпучков множеств;*

*(2") $\iota^K(f)^{-1}(st_E t) \neq \emptyset$.*

*5) Для любого морфизма $f : k \to n$ следующие условия эквивалентны:*

*(1"') $u(f) : D_s \to E_t$ является изоморфизмом предпучков множеств;*

*(2"') $ker_D s = \hat{f}^{-1}(ker_E t)$ и $\iota^K(f)^{-1}(st_E t) \neq \emptyset$.*

Доказательство. 1)a) Пусть $w : D_s \to E_t$ — гомоморфизм предпучков множеств. Тогда $w(k)(s) = t' \in E_t(k)$, и значит, $t' = th$ для некоторого $h : k \to n$. В силу введённых обозначений, $w = u(h)$.

1)b) По лемме 4, $u(f) = u(h) \Leftrightarrow u(f)(s) = u(h)(s) \Leftrightarrow tf = th \Leftrightarrow (f,h) \in ker_E t(k)$.

1)c) Пусть $f \in H(s,t), \mathrm{g} \in H(t,r)$. Обозначим $w = u(\mathrm{g}) \circ u(f)$. Тогда

$w(s) = u(\mathrm{g})(u(f)(s)) = u(\mathrm{g})(tf) = u(\mathrm{g})(t)f = (r\mathrm{g})f = r(\mathrm{g} \circ f)$, так что $w = u(\mathrm{g} \circ f)$ и $\mathrm{g} \circ f \in H(s,r)$.

1)d) очевидно.

2) Условия (2) и (3) эквивалентны по лемме 2.

(1)⇒(3). По условию существует гомоморфизм предпучков множеств $u(f) : D_s \to E_t$, такой, что $u(f)(s) = tf$. Если $(h_1, h_2) \in ker_D s$, то $sh_1 = sh_2$, и значит $u(f)(s)h_1 =$

$= u(f)(s)h_2$, то есть $t(f \circ h_1) = (tf)h_1 = u(f)(s)h_1 = u(f)(s)h_2 = (tf)h_2 = t(f \circ h_2)$, откуда $\hat{f}(h_1, h_2) = (f \circ h_1, f \circ h_2) \in ker_E t$.

(3)⇒(1). Пусть $l \in Ob(K)$. Зададим отображение $w(l) : D_s(l) \to E_t(l)$. Если $s' \in D_s(l)$, то $s' = sh$, где $h : l \to k$. Положим $w(l)(s') = (tf)h \in E_t(l)$. Если $sh = sh'$, то $(h, h') \in ker_D s$ и по (3) $(f \circ h_1, f \circ h_2) = \hat{f}(h_1, h_2) \in ker_E t$, так что $(tf)h' = (tf)h$. Таким образом, равенство $w(l)(s') = (tf)h \in E_t(l)$ задаёт (однозначное) отображение $w(l) : D_s(l) \to E_t(l)$. Проверим, что $w = \{w(l) : D_s(l) \to E_t(l) \mid l \in Ob(K)\}$ является гомоморфизмом (естественным преобразованием) предпучков, то есть что для любого морфизма $\mathrm{g} : l' \to l$, $E_t(\mathrm{g}) \circ w(l) = w(l') \circ D_s(\mathrm{g})$. Имеем

$(E_t(\mathrm{g}) \circ w(l))(s') = E(\mathrm{g})(w(l)(s') = E(\mathrm{g})((tf)h))) = ((tf)h)\mathrm{g} = t(f \circ h \circ \mathrm{g})$,

$(w(l') \circ D_s(\mathrm{g}))(s') = w(l')(D(\mathrm{g})(s')) = w(l')(s'\mathrm{g}) = w(l')((sh)\mathrm{g}) = w(l')(s(h \circ \mathrm{g})) = (tf)(h \circ \mathrm{g}) = t(f \circ h \circ \mathrm{g})$.

Равенство $E(\mathrm{g}) \circ w(l) = w(l') \circ D(\mathrm{g})$ проверено.

3) Воспользуемся тем, что гомоморфизм предпучков множеств $w : D \to E$ является мономорфизмом в категории $\hat{K} \Leftrightarrow \forall l \in Ob(K)$, отображение $w(l) : D(l) \to E(l)$ инъективно.

(1') ⇒ (2'). Так как $f \in H(s,t)$, то по 2) $ker_D s \subset \hat{f}^{-1}(ker_E t)$.

Если $(h_1, h_2) \in \hat{f}^{-1}(ker_E t)(l)$, то $(f \circ h_1, f \circ h_2) \in ker_E t(l)$, то есть $u(f)(l)(sh_1) = (tf)h_1 = t(f \circ h_1) = t(f \circ h_2) = u(f)(l)(sh_2)$. Так как $u(f)(l)$ инъективно, то $sh_1 = sh_2$, то есть $(h_1, h_2) \in ker_D s$. Включение $\hat{f}^{-1}(ker_E t) \subset ker_D s$ доказано.

(2') ⇒ (1'). Так как $ker_D s \subset \hat{f}^{-1}(ker_E t)$, то по 2) $f \in H(s,t)$.

Если $u(f)(l)(sh_1) = u(f)(l)(sh_2)$, то $(tf)h_1 = (tf)h_2$, то есть $\hat{f}(h_1, h_2) = (f \circ h_1, f \circ h_2) \in ker_E t$, откуда $(h_1, h_2) \in \hat{f}^{-1}(ker_E t)$. Так как $\hat{f}^{-1}(ker_E t) \subset ker_D s$, то $sh_1 = sh_2$. Инъективность $u(f)(l)$ доказана.

4) По лемме 4 $u(f)(D_s) = E_{tf}$. Известно, что гомоморфизм предпучков множеств $w : D \to E$ является эпиморфизмом в категории $\hat{K} \Leftrightarrow w(D) = E$. Таким образом, $u(f) : D_s \to E_t$ является эпиморфизмом $\Leftrightarrow E_{tf} = E_t$, то есть $\Leftrightarrow t \in E_{tf}$. Последнее равносильно существованию такого морфизма $h : n \to k$, что $t = (tf)h = t(f \circ h)$. Равенство $t = t(f \circ h)$ как раз и означает $\iota^K(f)(h) = f \circ h \in st_E t$, то есть $h \in \iota^K(f)^{-1}(st_E t)$.

5) Известно, что гомоморфизм предпучков множеств является изоморфизмом тогда и только тогда, когда он одновременно является мономорфизмом и эпиморфизмом. Поэтому утверждение следует из 3) и 4). □

Все остальные результаты данной работы являются прямыми следствиями доказанной теоремы.

## 3. Гомоморфизмы предпучков и действия полугрупп

**Теорема 2.** *Пусть $D$, $E$ — предпучки множеств на категории $K$, $s \in D(k)$.*

*1) Отображение $\varphi : Hom_{\hat{K}}(D_s, E) \to E(k)$, задаваемое равенством $\varphi(w) = w(k)(s)$, инъективно, и $\varphi(Hom_{\hat{K}}(D_s, E)) = \{t \in E(k) \mid ker_D s \subset ker_E t\}$. В частности, если для всякого $t \in E(k)$, $ker_D s \subset ker_E t$, то $\varphi$ биективно.*

*2) Пусть $s \in D(k)$, $t \in E(k)$.*

*a) $ker_D s \subset ker_E t \Leftrightarrow$ существует гомоморфизм предпучков $w : D_s \to E$ такой, что $w(s) = t$. Если при этом $E = E_t$, то $w$ является эпиморфизмом.*

*b) $ker_D s = ker_E t \Leftrightarrow$ гомоморфизм $w : D_s \to E$ такой, что $w(s) = t$, является мономорфизмом. Если при этом $E = E_t$, то $w$ является изоморфизмом.*

Доказательство. 2)a) Если $w : D \to E$ произвольный гомоморфизм, и $w(s) = t$, то включение $ker_D s \subset ker_E t$ очевидно. Наоборот, пусть $ker_D s \subset ker_E t$. Полагая в пункте 2) теоремы 1 $f = 1_k$, получим, что существует эпиморфизм предпучков $w' : D_s \to E_t$ такой, что $w'(s) = t$. Таким образом, если $x_t : E_t \to E$ гомоморфизм включения, то $w = x_t \circ w' : D_s \to E$ — требуемый гомоморфизм.

2)b) По лемме 4 $w = x_t \circ w'$, где $w' : D_s \to E_t$ такой, что $w'(s) = t$. По пункту 3) теоремы 1 $ker_D s = ker_E t \Leftrightarrow$ гомоморфизм $w'$ является мономорфизмом, и так как $x_t$ — мономорфизм, то мономорфность $w = x_t \circ w'$ равносильна мономорфности $w'$. По лемме 4 $w'$ является мономорфизмом $\Leftrightarrow$ $w'$ — изоморфизм. Таким образом при $E_t = E$ мономорфность $w'$ равносильна изоморфности $w$.

1) Инъективность $\varphi$ доказана в лемме 4. Равенство $\varphi(Hom_{\hat{K}}(D_s, E)) = \{t \in E(k) \mid ker_D s \subset ker_E t\}$ следует из 2)a). $\square$

Отметим как частный случай лемму Йонеды.

**Теорема 3.** *Отображение $\varphi : Hom_{\hat{K}}(i^K(k), E) \to E(k)$, задаваемое равенством $\varphi(w) = w(k)(1_k)$, биективно.*

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $D = i^K(k)$, $s = 1_k \in D(k)$. Тогда $D = D_s$ и $(h_1, h_2) \in ker_D s \Leftrightarrow sh_1 = sh_2 \Leftrightarrow 1_k \circ h_1 = 1_k \circ h_2 \Leftrightarrow h_1 = h_2$, и значит, для любого $t \in E(k)$ $ker_D s \subset ker_E t$. $\square$

Пусть $D$ — предпучок множеств на категории $K$, $s \in D(k)$. Будем рассматривать множество $Hom_{\hat{K}}(D_s, D_s)$, всех гомоморфизмов предпучков $D_s \to D_s$, как моноид относительно суперпозиции. Через $Ep_{\hat{K}}(D_s)$, $Mon_{\hat{K}}(D_s)$, $Aut_{\hat{K}}(D_s)$ обозначим множества всех эпиморфизмов, мономорфизмов, изоморфизмов $D_s \to D_s$ соответственно. Очевидно, это подмоноиды $Hom_{\hat{K}}(D_s, D_s)$.

Выше через $H(s)$ обозначено множество всех морфизмов $f \in Hom_K(k, k)$, для которых существует такой гомоморфизм предпучков $u(f) : D_s \to D_s$, что $u(f)(s) = sf$. Введём также обозначения $H_M(s)$, $H_E(s)$, $H_I(s)$ для подмножеств $H(s)$:

$f \in H_M(s) \Leftrightarrow u(f)$ — мономорфизм предпучков.

$f \in H_E(s) \Leftrightarrow u(f)$ — эпиморфизм предпучков.

$f \in H_I(s) \Leftrightarrow u(f)$ — изоморфизм предпучков.

**Теорема 4.** *Пусть $D$ — предпучок множеств на категории $K$, $s \in D(k)$.*

*1) a) Множества $H(s)$, $H_M(s)$, $H_E(s)$, $H_I(s)$ являются подмоноидами $Hom_K(k, k)$.*

*b) Множества $Mon_{\hat{K}}(D_s)$, $Ep_{\hat{K}}(D_s)$, $Aut_{\hat{K}}(D_s)$ являются подмоноидами $Hom_{\hat{K}}(D_s, D_s)$.*

*2) a) Отображение $u = u^s : H(s) \to Hom_{\hat{K}}(D_s, D_s)$, задаваемое условием $u(f)(s) = sf$, является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и $ker u = (ker_D s)(k)) \cap (H(s) \times H(s))$, так что $(ker_D s)(k)) \cap (H(s) \times H(s))$ является подмоноидом моноида $Hom_K(k, k) \times Hom_K(k, k)$.*

*b) $f \in H(s) \Leftrightarrow ker_D s \subset \hat{f}^{-1}(ker_D s)$.*

*3) a) Имеется отображение* $u_M = u^s_M : H_M(s) \to Mon_{\hat{K}}(D_s)$, *задаваемое равенством* $u_M(f) = u(f)$, *оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его* $keru_M = (ker_D s)(k)) \cap (H_M(s) \times H_M(s))$.

*b)* $f \in H_M(s) \Leftrightarrow \hat{f}^{-1}(ker_D s) = ker_D s$.

*4) a) Имеется отображение* $u_E = u^s_E : H_E(s) \to Ep_{\hat{K}}(D_s)$, *задаваемое равенством* $u_E(f) = u(f)$, *оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его* $keru_E = (ker_D s)(k)) \cap (H_E(s) \times H_E(s))$.

*b)* $f \in H_E(s) \Leftrightarrow$ *(*$ker_D s \subset \hat{f}^{-1}(ker_D s)$ *и* $i^K(f)^{-1}(st_D s) \neq \emptyset$*).*

*5) a) Имеется отображение* $u_I = u^s_I : H_I(s) \to Aut_{\hat{K}}(D_s)$, *задаваемое равенством* $u_I(f) = u(f)$, *оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его* $keru_I = (ker_D s)(k)) \cap (H_I(s) \times H_I(s))$.

*b)* $f \in H_I(s) \Leftrightarrow$ *(*$ker_D s = \hat{f}^{-1}(ker_D s)$ *и* $\iota^K(f)^{-1}(st_D s) \neq \emptyset$*).*

Доказательство. 2)a) следует из пункта 1) теоремы 1, если положить $k = n = m$, $t = r = s$. 2)b) доказано в пункте 2) теоремы 1.

1)b) следует из того, что в любой категории суперпозиция мономорфизмов (соответственно эпиморфизмов, изоморфизмов) является мономорфизмом (соответственно эпиморфизмом, изоморфизмом).

Доказывая 1)a), предположим, что $f, g \in H_M(s)$, то есть $u(f), u(g) : D_s \to D_s$ — мономорфизмы. Так как суперпозиция мономорфизмов — мономорфизм, то $u(f \circ g) = u(f) \circ u(g)$ — мономорфизм, и значит $f \circ g \in H_M(s)$. Так как $1_k$ — мономорфизм, то $H_M(s)$ — подмоноид $Hom_K(k,k)$. Аналогично доказывается, что подмоноидами являются множества $H_E(s)$ и $H_I(s)$.

Докажем 3) a). В силу введённых обозначений $f \in H_M \Leftrightarrow u(f) \in Mon_{\hat{K}}(D_s)$, так что $H_M(s) = u^{-1}(Mon_{\hat{K}}(D_s))$. Поэтому отображение $u_M$ существует, и так как $u$ сюръективно, то и $u_M$ сюръективно. Формула для ядра следует из равенства $keru = (ker_E t)(k)) \cap (H(s) \times H(s)$, содержащегося в 2)a). 3)b) следует из пункта 3) теоремы 1.

4) a) доказывается аналогично пункту 3)a). 4) b) следует из 2)b) и пункта 4) теоремы 1.

5) a) доказывается аналогично пункту 3)a). 5) b) следует из пункта 5) теоремы 1.

□

Пусть $H$ — моноид, $D,E$ — правые $H$-множества. Через $Hom_H(D,E)$ будем обозначать множество всех гомоморфизмов $H$-множеств. Пусть $s \in D$, $t \in E$, $f \in H$. Тогда имеется не более одного гомоморфизма $u(f) = u^{s,t}(f) : D_s \to E_t$ правых $H$-множеств таких, что $u(f)(s) = tf$. Через $H(s,t) \subset H$ обозначим множество всех $f \in H$, для которых существует $u(f)$. Выражение $H(s,s)$ будем сокращать до $H(s)$. Таким образом, формулой $u(f)(s) = tf$ определено отображение $u = u^{s,t} : H(s,t) \to Hom_H(D_s, E_t)$, в частности, $u = u^s : H(s) \to Hom_H(D_s, D_s)$.

Будем также обозначать $ker_D s = \{(a,b) \in H \times H \mid sa = sb\}$.

Рассмотрим категорию $K$ с единственным объектом $k$ такую, что $Hom_K(k,k) = H$. Как уже отмечалось, в этом случае предпучки множеств на $K$ — это то же, что правые $H$-множества, так что частным случаем теоремы 1 является следующий результат.

**Теорема 1'.** *Пусть $H$ — моноид, $D, E, F$ — правые $H$-множества, $s \in D$, $t \in E$, $r \in F$.*

*1) а) Отображение $u : H(s,t) \to Hom_H(D_s, E_t)$ сюръективно.*

*b) $keru \equiv \{(f,h) \in H(s,t) \mid u(f) = u(h)\} = (ker_E t) \cap (H(s,t) \times H(s,t))$, так что $\forall f, h \in H(s,t), u(f) = u(h) \Leftrightarrow (f,h) \in ker_E t$.*

*c) Если $f \in H(s,t), \mathrm{g} \in H(t,r)$, то $\mathrm{g} \circ f \in H(s,r)$ и $u(\mathrm{g} \circ f) = u(\mathrm{g}) \circ u(f)$.*

*d) $u(1_k) = 1_{D_s} : D_s \to D_s$.*

*2) Для любого морфизма $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1) $f \in H(s,t)$;*

*(2) $f \cdot ker_D s \subset ker_E t$.*

*3) Для любого $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1') $f \in H(s,t)$ и $u(f) : D_s \to E_t$ является мономорфизмом $H$-множеств;*

*(2') $\forall a, b \in H, (a,b) \in ker_D s \Leftrightarrow (fa, fb) \in ker_E t$.*

*4) Для любого $f \in H(s,t)$, $u(f)(D_s) = E_{tf}$, так что следующие условия эквивалентны:*

*(1") $u(f) : D_s \to E_t$ является эпиморфизмом $H$-множеств;*

*(2") Имеется $h \in H : fh \in st_E t$.*

*5) Для любого $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1"') $u(f) : D_s \to E_t$ является изоморфизмом $H$-множеств;*

*(2"') $\forall a, b \in H, (a,b) \in ker_D s \Leftrightarrow (fa, fb) \in ker_E t$ и имеется $h \in H : fh \in st_E t$.*

Частным случаем теоремы 4 является следующее описание полугрупп эндоморфизмов правых $H$-пространств.

Пусть $D$ — правое $H$-множество, $s \in D$. Будем рассматривать множество $Hom_H(D_s, D_s)$ всех гомоморфизмов $H$-множеств $D_s \to D_s$, как моноид относительно суперпозиции. Через $Ep_H(D_s)$, $Mon_H(D_s)$, $Aut_H(D_s)$ обозначим множества всех эпиморфизмов, мономорфизмов, изоморфизмов $D_s \to D_s$ соответственно. Очевидно, это подмоноиды $Hom_H(D_s, D_s)$.

Выше через $H(s)$ обозначено множество всех $f \in H$, для которых существует такой гомоморфизм $H$-множеств $u(f) : D_s \to D_s$, что $u(f)(s) = sf$. Введём также обозначения $H_M(s)$, $H_E(s)$, $H_I(s)$ для подмножеств $H(s)$:

$f \in H_M(s) \Leftrightarrow u(f)$ — мономорфизм $H$-множеств.

$f \in H_E(s) \Leftrightarrow u(f)$ — эпиморфизм $H$-множеств.

$f \in H_I(s) \Leftrightarrow u(f)$ — изоморфизм $H$-множеств.

**Теорема 4'.** *Пусть $D$ — правое $H$-множество, $s \in D$.*

*1) а) Множества $H(s)$, $H_M(s)$, $H_E(s)$, $H_I(s)$ являются подмоноидами $H$.*

*b) Множества $Mon(D_s)$, $Ep(D_s)$, $Aut(D_s)$ являются подмоноидами $Hom_H(D_s, D_s)$.*

*2) а) Отображение $u = u^s : H(s) \to Hom_H(D_s, D_s)$, задаваемое условием $u(f)(s) = sf$, является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и $keru = (ker_D s) \cap (H(s) \times H(s))$, так что $(ker_D s) \cap (H(s) \times H(s))$ является подмоноидом моноида $H \times H$.*

*b) $f \in H(s) \Leftrightarrow f \cdot ker_D s \subset ker_D s$.*

*3) а) Имеется отображение $u_M = u^s_M : H_M(s) \to Mon_H(D_s)$, задаваемое равенством $u_M(f) = u(f)$, оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его $keru_M = (ker_D s) \cap (H_M(s) \times H_M(s))$.*

*b) Для любого $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1) $f \in H_M(s)$;*

*(2) $\forall a, b \in H, (a, b) \in ker_D s \Leftrightarrow (fa, fb) \in ker_D s$.*

*4) a) Имеется отображение $u_E = u^s_E : H_E(s) \to Ep_H(D_s)$, задаваемое равенством $u_E(f) = u(f)$, оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его $keru_E = (ker_D s) \cap (H_E(s) \times H_E(s))$.*

*b) Для любого $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1') $f \in H_E(s)$;*

*(2') $f \cdot ker_D s \subset ker_D s$ и имеется $h \in H : fh \in st_E t$.*

*5) a) Имеется отображение $u_I = u^s_I : H_I(s) \to Aut_H(D_s)$, задаваемое равенством $u_I(f) = u(f)$, оно является сюръективным гомоморфизмом моноидов, и ядро его $keru_I = (ker_D s) \cap (H_I(s) \times H_I(s))$.*

*b) Для любого $f \in H$ следующие условия эквивалентны:*

*(1") $f \in H_I(s)$;*

*(2") Имеется $h \in H : fh \in st_D s$, и $\forall a, b \in H, (a, b) \in ker_D s \Leftrightarrow (fa, fb) \in ker_D s$.*

Рассмотрим совсем частный случай, когда моноид $H$ является группой. В этом случае каждый элемент $H$ обратим, $st_D s$ является подгруппой группы $H$ и $(a,b) \in kers \Leftrightarrow ab^{-1} \in st_D s$, так что $c \in st_D s \Leftrightarrow (c,1) \in kers$. Поэтому условие (2") из пункта 5) предыдущей теоремы, означающее, что $f \in H_I$, может быть переписано так: $\forall c \in H, c \in st_D s \Leftrightarrow fcf^{-1} \in st_D s$. Таким образом, $f \in H_I \Leftrightarrow f st_D s f^{-1} \subset st_D s$, и значит $H_I$ — это нормализатор $N(st_D s)$ стабилизатора $st_D s$, то есть максимальная подгруппа $H$, в которой $st_D s$ является нормальной подгруппой. По пункту 5) предыдущей теоремы получаем эпиморфизм групп $u_I : N(st_D s) \to Aut_H(D_s)$, задаваемый равенством $u_I(f)(s) = sf$. Поскольку $u_I(f) = 1_{D_s} \Leftrightarrow u_I(f)(s) = s \Leftrightarrow f \in st_D s$, то имеется канонический изоморфизм $\tilde{u}_I : N(st_D s)/st_D s \to Aut_H(D_s)$ факторгруппы $N(st_D s)/st_D s$ на группу автоморфизмов $Aut_H(D_s)$. Этот стандартный результат используется, в частности, в теории накрытий [5], что указывает на содержательность результатов, сформулированных в теореме 1, даже в случаях, казалось бы, не имеющих отношения к теории категорных топологических пространств.

## Список литературы

[1] A. Grothendieck (with M. Artin and J.-L. Verdier), *Seminaire Geometrie Algebrique 4 [SGA4], Theorie de topos et cohomologie etale de schemas, Lect. Notes in Math.*, v. 269, 270, Springer, Heidelberg, 1972.

[2] Е. Е. Скурихин, "Категорные топологические пространства и размерности", *Дальневосточный математический журнал*, **8**:1, (2008), 98–111.

[3] Е. Е. Скурихин, *Топологии Гротендика и пучки на упорядоченных множествах*, Диссертация на соискание ученой степени доктора физ-мат. наук, Владивосток, 2003.

[4] Е. Е. Скурихин, "Полугруппы эндоморфизмов категорных топологических пространств", *Дни геометрии в Новосибирске - 2018*, Тезисы Международной конференции, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2018, 70–71.

[5] У. Масси, Дж. Столлингс, *Алгебраическая топология. Введение.*, Мир, Москва, 1977.

Поступила в редакцию
29 апреля 2019 г.

*Skurikhin E. E.* Presheaves of sets and actions of semigroups. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 63–74.

ABSTRACT

Some theorems on homomorphisms of presheaves of sets are proved. The results are applied to sets with action of semigroup.

Key words: *presheaves of sets, actions of semigroup on sets.*