Дальневосточный математический журнал. 2019. Т. 19. № 1. С. 75–83

УДК 517.946
MSC2010 45Q05

© П. Б. Суляндзига[1], А. Н. Иванов[2], Е. П. Суляндзига[3]

Внутренняя обратная задача комплексного магнитного потенциала

Рассматривается двумерная задача определения области по ее внутреннему комплексному магнитному потенциалу. Решение обратной задачи сведено к отысканию пары аналитических функций в единичном круге или вне его по нелинейным краевым условиям, линейная часть которых является обобщенной задачей Гильберта. Доказано существование решения задачи «в малом».

Ключевые слова: *обратная задача, магнитный потенциал.*

Введение

В работе рассматривается двумерная обратная задача комплексного магнитного потенциала, т. е. проблема определения области по заданным значениям внешнего и внутреннего потенциалов [1]. Объектом исследования данной работы является проблема существования решения двумерной обратной задачи магнитного потенциала «в малом». Решение обратной задачи сведено к отысканию пары аналитических функций в единичном круге или вне его по нелинейным краевым условиям, линейная часть которых является обобщенной задачей Гильберта [2]. Доказано существование решения задачи «в малом», т. е. для области, близкой к данной.

Отметим, что потребности в решении обратных задач комплексного магнитного потенциала возникли в связи с потребностями магниторазведки — одного из геофизических методов исследования земной коры [3, 4].

1. Постановка задачи и ее редукция к краевой задаче

Пусть $U^-(z)$, $U^+(z,\overline{z}) \equiv U^+(z,\overline{z},D^+,\nu,\mu)$ есть внешний и внутренний комплексные магнитные потенциалы области D^+ с границей $S \in C^{1,\alpha}$ действительнозначных

[1] Вычислительный центр ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65.
[2] Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.
[3] Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680000, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.
Электронная почта: tanod0308@rambler.ru (П. Б. Суляндзига).

плотностей $\nu(z,\overline{z})$ на S и $\mu(z,\overline{z})$ в D^+. Запишем

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_S \frac{\nu(\tau,\overline{\tau})}{\tau - z}\, dS_\tau - \frac{1}{\pi}\int\limits_{D^+} \frac{\mu(\tau,\overline{\tau})}{\tau - z}\, d\xi\, d\eta = \begin{cases} U^-(z), & z \in D^- \\ U^+(z,\overline{z}), & z \in D^+ \end{cases}, \ \tau = \xi + i\eta.$$

Известно, что $U^-(z)$ аналитична в D^-, а $U^+_{\overline{z}} = \mu$ в D^+. Тогда

$$U^+(z,\overline{z}) = M(z,\overline{z}) + \mathrm{g}(z), \quad z \in D^+, \tag{1}$$

где $\mathrm{g}(z) \equiv \mathrm{g}(z,D^+)$ — аналитическая функция, функцию $M(z,\overline{z})$ для данной области D^+ можно считать зафиксированной.

Если зафиксирована односвязная область T^+ и определена плотность $\mu \in C^{0,\alpha}(T^+)$, то всегда можно считать определенной функцию $M(z,\overline{z})$, $M_{\overline{z}} = \mu$ в T^+.

Задача. По действительным функциям ν, $\mu \in C^{0,\alpha}(T^+)$ и аналитической функции $h(z) \in A(T^+)$ требуется отыскать такую область D^+ с границей S в T^+, что

$$U^+(z,\overline{z},D^+,\nu,\mu) = M(z,\overline{z}) + h(z), \quad z \in D^+.$$

Пусть задача имеет решение, т. е. найдется такая область D^+, что $\mathrm{g}(z) = h(z)$, $z \in D^+$. Тогда, в силу свойства потенциала масс и простого слоя, получаем

$$U^-(z) - U^+(z,\overline{z}) = 2\nu \cdot (\cos \hat{nx} - i \sin \hat{nx}), \quad z \in S, \tag{2}$$

где $\hat{nx}$ — угол между внешней нормалью и положительным направлением оси Ox, а единичный вектор касательной $\vec{s}$ направлен так, что поворот от $\vec{n}$ к $\vec{s}$ совершается против часовой стрелки [5].

Определение области D^+ суть нахождение внешней к ней области D^-. Введем функцию $z = z(t)$, отображающую конформно внешность единичного круга $|t| > 1$ на D^- с нормировкой

$$z(\infty) = \infty, \quad z'(\infty) > 0, \tag{3}$$

причем в окрестности $t = \infty$ получим

$$z(t) = at + \sum_{k\,=\,0}^{\infty} a_k t^{-k}. \tag{4}$$

Тогда равенство (2), если учесть (1), примет вид

$$\varphi_0^-(t) = M(z(t),\overline{z(t)}) + 2\nu(z(t),\overline{z(t)}) \cdot \frac{\overline{tz'(t)}}{|z'(t)|} + \mathrm{g}(z(t)), \quad |t| = 1, \quad \varphi_0^-(\infty) = 0, \tag{5}$$

где $\varphi_0^-(t) = U^-(z(t)) \in A(|t| > 1) \cap C(|t| \geqslant 1)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если однолистная функция $z(t)$ с условием* (3) *аналитична при* $|t|>1$ *и* $z(t)\in C^1(|t|\geqslant 1)$, *а* $\varphi_1^-(t)\in A(|t|>1)\cap C(|t|\geqslant 1)$ *удовлетворяет краевому условию*

$$\varphi_1^-(t)=M(z(t),\overline{z(t)})+2\nu(z(t),\overline{z(t)})\cdot\frac{\overline{tz'(t)}}{|z'(t)|}+h(z(t)),\quad |t|=1,\quad \varphi_1^-(\infty)=0,\tag{6}$$

тогда область $D^-=\{z:\ z=z(t),\ |t|>1\}$ *есть решение задачи.*

Доказательство. Вычитая из (6) равенство (4), получим

$$\Phi^-(t)=h(z(t))-\mathrm{g}(z(t)),\ \Phi^-(t)=\varphi_1^-(t)-\varphi_0^-(t),\quad \Phi^-(\infty)=0.$$

Используя обратное отображение $t=t(z)$, вычисляем $\Phi^-(t(z))=h(z)-\mathrm{g}(z)$, $z\in S$. Тогда, в силу того, что действует принцип непрерывности, функция

$$G(z)=\begin{cases}\Phi^-(t(z)), & z\in D^-\cup S\\ h(z)-\mathrm{g}(z), & z\in D^+\cup S\end{cases}$$

аналитична на расширенной комплексной плоскости. Значит $G(z)$ — константа. Имея ввиду то, что $\Phi^-(\infty)=0$, получаем $h(z)\equiv \mathrm{g}(z)$, $z\in D^+$. Что и требовалось доказать. □

2. О существовании решения задачи «в малом»

Пусть зафиксированы односвязные области D^+, T^+, $D^+\subset T^+$, границей D^+ является $S\in C^{2,\alpha}$ и определены действительнозначимые функции ν, $\mu\in C^{2,\alpha}(T^+)$, тогда $U^-(z)$, $U^+(z,\overline{z})\in C^{2,\alpha}(S)$. Причем плотности ν, μ и граница S таковы, что выполняется следующее требование

$$a=\mu+\nu k+\frac{\partial\nu}{\partial n}\not\equiv 0,\quad a\cdot\nu\geqslant 0,\quad |a+\nu|>0,\quad |t|=1,\tag{7}$$

где

$$k=\frac{\mathrm{Re}(\overline{z}'(tz')')}{|z'|^3}$$

есть кривизна кривой S, $z=z(t)$ — функция, отображающая конформно внешность единичного круга $|t|>1$ на D^- с нормировкой (3).

Введем два класса областей:

$$D_\omega^-=\{z:\ z=z(t)+\omega(t),\ |t|>1,\ \omega(\infty)=\infty,\ \mathrm{Im}\,\omega'(\infty)=0\},$$
$$\hat{D}_\omega^-=\{z:\ z=z(t)+\omega(t),\ |t|>1,\ \omega(\infty)=\mathrm{const}\},$$

причем функции $\omega(t)$ выбираются настолько малыми в норме пространства $C^{1,\alpha}(|t|=1)$, $||\omega||^{1,\alpha}<\delta_1$, чтобы функции $z=z(t)+\omega(t)$ были однолистными и области D_ω^+, $\hat{D}_\omega^+$ лежали в T^+ и содержали бы точку $z=0$. Возможность выбора такого δ_1 доказана в работе [2].

Далее введем класс функций

$$\mathcal{M}(k)=\{h(z):\ h\in A(T^+),\ |h(z)|\leqslant K,\ z\in\overline{T}^+\}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. *Найдутся положительные числа* ε, δ_* *такие, что если* $h(z) \in \mathcal{M}(K)$, $||h - \mathrm{g}(z, D^+, \nu, \mu)||^{2,\alpha} \leqslant \varepsilon$ *на* S *и выполнено условие* (7), *то при* $||\omega||^{1,\alpha} \leqslant \delta_* < \delta_1$ *существуют*
а) однопараметрическое семейство решений задачи из D^-_ω,
б) единственное решение из $\hat{D}^-_\omega$
такие, что

$$U^+(z, \overline{z}, D^+_{\omega_*}, \nu, \mu) = M(z, \overline{z}) + h(z), \quad z \in D^+_{\omega_*}. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу действия теоремы 1 и ввиду того, что области отыскиваются в классе D^-_ω, $\hat{D}^-_\omega$, приходим к нахождению пары аналитических функций (φ_1^-, ω) вне единичного круга $|t| > 1$ по следующему краевому условию:

$$\begin{gathered}\varphi_1^-(t) = h(z(t) + \omega(t)) + M(z(t) + \omega(t), \overline{z(t) + \omega(t)}) + \\ +2\nu(z(t) + \omega(t), \overline{z(t) + \omega(t)}) \cdot \frac{\overline{t(z' + \omega')}}{|z' + \omega'|},\ |t| = 1,\end{gathered} \tag{9}$$

$$\varphi_1^-(\infty) = 0,\ \omega(\infty) = \mathrm{const};\ \text{или}\ \omega(\infty) = \infty,\ \mathrm{Im}\,\omega'(\infty) = 0.$$

Линеаризация краевого условия. Из (9) вычтем равенство

$$\varphi_0^-(t) = \mathrm{g}(z(t)) + M(z(t), \overline{z(t)}) + 2\nu(z(t), \overline{z(t)}) \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|},\ |t| = 1. \tag{10}$$

При малых ω в норме $C^{1,\alpha}$ функции $h(z(t)+\omega(t))$, $(z'+\omega')^{\frac{1}{2}} \cdot (z'+\omega')^{-\frac{1}{2}}$ разложимы в ряд Тейлора, а $M(z(t)+\omega(t), \overline{z(t)+\omega(t)})$, $\nu(z(t)+\omega(t), \overline{z(t)+\omega(t)})$ представимы формулой Тейлора, т. к. ν, $M \in C^{2,\alpha}(T^+)$. Выделяя линейную часть, получим

$$\varphi_2^- - \frac{\nu\overline{tz'}}{|z'|}\left(\frac{\overline{\omega'}}{\overline{z'}} - \frac{\omega'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\omega} - \left(M'_z + \mathrm{g}'_z \cdot \omega + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\omega = R(\omega, h),$$

$$\varphi_2^- = \varphi_1^- - \varphi_0^-,\ \varphi_2^-(\infty) = 0,\ R(\omega, h) = (h - \mathrm{g}) + (h - \mathrm{g})'_z \cdot \omega + B(\omega, h)$$

где $B(\omega,h)$ — нелинейная часть оператора R. Используя равенство (10), вычислим $\mathrm{g}'_z|_{z=z(t)}$ и, подставив в предыдущее условие, получим

$$\varphi_3^- - \frac{\nu\overline{tz'}}{|z'|}\left(\frac{\overline{\omega}'}{\overline{z}'} - \frac{\omega'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\omega} - \frac{1}{t^2}\cdot\frac{\overline{z}'}{z'}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\omega = R(\omega, h),$$

$$\varphi_3^- = \varphi_2^- - \frac{d\varphi_0^-}{dt} \cdot \frac{\omega}{z'}, \quad \varphi_3^-(\infty) = 0.$$

Комплексно сопрягая написанное выше краевое условие и вводя обозначение $\overline{\varphi_3^-} = \varphi^+$, получим

$$\begin{gathered}\varphi^+ + \frac{\nu tz'}{|z'|}\left(\frac{\overline{\omega}'}{\overline{z}'} - \frac{\omega'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\omega - \\ - \frac{t^2 z'}{\overline{z}'}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\overline{\omega} = \overline{R(\omega, h)}, \quad \varphi^+(0) = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Замечание. При нахождении решения краевой задачи (11) условие $\varphi^+(0)=0$ автоматически будет выполнено.

Изучение линейной задачи. Запишем линейную однородную задачу (11):

$$L(\varphi^+,\omega) \equiv \varphi^+ + \frac{\nu t z'}{|z'|}\left(\frac{\overline{\omega}'}{\overline{z}'} - \frac{\omega'}{z'}\right) - \left(\mu + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\omega - \\ - \frac{t^2 z'}{\overline{z}'}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\overline{\omega} = 0. \tag{12}$$

Решение задачи (12) рассмотрим в двух случаях. Первый случай связан с отысканием области из D_ω^-. Второй случай касается отыскания области из $\tilde{D}_\omega$.

Случай а. Отыскание области из D_ω^-. Требуется отыскать пару аналитических функций $\varphi^+ \in A(|t|<1)$ и $\omega \in A(|t|>1)$ по краевому условию (12). Получим

$$\omega(\infty) = \infty, \tag{13}$$

$$\operatorname{Im}\omega'(\infty) = 0. \tag{14}$$

Сначала рассмотрим задачу (12) с условием (13). Когда произведем замену $\varphi^- = \omega \cdot t^{-2}$, $\varphi^-(\infty)=0$, то (12) примет вид

$$\hat{\varphi}^+ + A_{30}\varphi^- + \overline{A}_{40}\overline{\varphi^-} + A_{31}\frac{d\varphi^-}{dt} + \overline{A}_{41}\frac{d\overline{\varphi^-}}{dt} = 0, \quad \varphi^-(\infty) = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} A_{30} &= -t\left(\mu + \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right), \\ \overline{A}_{40} &= -\frac{z'}{t\overline{z}'}\left(\mu + 2\nu k - \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right), \\ A_{31} &= -\frac{\nu t^2}{|z'|}, \\ \overline{A}_{41} &= -\frac{\nu z'}{t^2 \overline{z}'|z'|}, \\ \hat{\varphi}^+ &= \frac{\varphi^+}{t}, \end{aligned}$$

т. к. $\varphi^+(0)=0$. Эта задача называется обобщенной задачей Гильберта, или общей задачей линейного сопряжения, содержащей производную [6].

Известно, что задача (15) является нётеровой, т. к. $A_{31} \neq 0$ при $|t|=1$. Воспользовавшись результатами исследования Н. П. Векуа [6, с. 349], подсчитаем индекс нашей задачи:

$$l - l' = 2,$$

где l, l' — число линейно независимых решений исчезающих на бесконечности задачи (15) и ей союзной соотвественно.

Покажем, что $l'=0$, т. е. союзная к (15) задача имеет только тривиальное решение. Запишем союзную задачу

$$\Omega^- = -t\left(\mu + \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\Omega^+ + \frac{\overline{tz'}}{z'}\left(\mu + 2\nu k - \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\Omega^+ + \\ + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\nu t^2}{|z'|}\Omega^+ + \frac{\nu \overline{z}'}{z'|z'|}\overline{\Omega}^+\right\}, \quad \Omega^-(\infty) = 0. \tag{16}$$

Введя замену $\Phi = \Omega^+ \cdot (\overline{z}')^{-1}$, получим

$$\Omega^- = -t\overline{z}'\left(\mu + \frac{2\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\Phi + \overline{tz'}\left(\mu + 2\nu k + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\Phi} + \\ + \frac{d}{dt}\left\{\nu\frac{\overline{tz'}}{|z'|}(t^3\Phi + t\overline{\Phi})\right\}, \quad \Omega^-(\infty) = 0.$$

Вычислим

$$\frac{d}{dt}\left\{\nu\frac{\overline{tz'}}{|z'|}(t^3\Phi + t\overline{\Phi})\right\} = t\overline{z}'\left(\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|} - \nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|} - \nu k + \frac{3\nu}{|z'|}\right)\Phi + \\ + \overline{tz'}\left(\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|} - \nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|} - \nu k + \frac{\nu}{|z'|}\right)\overline{\Phi} + \frac{\nu \overline{z}'}{|z'|}(t^2\Phi'_t - \overline{t^2\Phi'_t}).$$

Подставляя вычисленное в вышеприведенное краевое условие, получим

$$\Omega^- = -t\overline{z}'\left(\mu + \nu k + \frac{\partial \nu}{\partial n} - \frac{\nu}{|z'|}\right)\Phi + \overline{tz'}\left(\mu + \nu k + \frac{\partial \nu}{\partial n} - \frac{\nu}{|z'|}\right)\overline{\Phi} + \\ + \frac{\nu \overline{z}'}{|z'|}(t^2\Phi'_t - \overline{t^2\Phi'_t}), \quad \Omega^-(\infty) = 0,$$

где

$$\frac{\partial \nu}{\partial n} = \nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|} + \nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}.$$

Умножая предыдущее краевое условие на $z' \cdot |z'|^{-1}$, получим

$$\frac{z'}{|z'|}\Omega^- = \nu(t^2\Phi'_t - \overline{t^2\Phi'_t}) - \overline{a}|z'|(t\Phi - \overline{t\Phi}), \ \Omega^-(\infty) = 0, \tag{17}$$

где

$$\overline{a} = \mu + \nu k - \frac{\nu}{|z'|} + \frac{\partial \nu}{\partial n}.$$

Далее, при замене $t\Phi = \Psi$, $\Psi(0) = 0$ (17) примет вид

$$\frac{z'}{|z'|}\Omega^- = \nu(t\Psi'_t - \overline{t\Psi'_t}) - a|z'|(\Psi - \overline{\Psi}), \quad \Omega^-(\infty) = 0, \quad \Psi(0) = 0, \tag{18}$$

$$a = \mu + \nu k + \frac{\partial \nu}{\partial n}.$$

Из (18) видно, что $\mathrm{Re}\,\frac{z'}{|z'|}\Omega^- = 0$. Отсюда следует, что $\Omega^- \equiv 0$, т. к. $\Omega^-(\infty) = 0$, а $z'(\infty) > 0$.

Далее, исследуем задачу

$$\nu(t\Psi'_t - \overline{t\Psi'_t}) - a|z'|(\Psi - \overline{\Psi}) = 0, \quad \Psi(0) = 0. \tag{19}$$

Краевое условие (19), если выполнить замену $\Psi = u(\theta) + iv(\theta)$, $|t| = 1$, $t = e^{i\theta}$ и вычислить $t\Psi'_t = v'_\theta - iu'_\theta$, примет вид

$$\nu u'_s + a|z'|v = 0, \quad |t| = 1.$$

Единичный вектор касательной $\vec{s}$ и $\vec{n}$ расположены как оси Ox и Oy, поэтому условия Коши – Римана запишем как

$$u'_s = v'_n, \ u'_n = -v'_s.$$

Итак, требуется найти гармоническую функцию v в единичном круге по краевому условию

$$\nu v'_n + a|z'|v = 0, \quad |t| = 1.$$

В силу существования условия (7) заключаем, что $v = 0$. Тогда $u = 0$ в силу того, что действует условие $\Psi(0) = 0$.

Таким образом доказано, что союзная задача (16) имеет только тривиальное решение, а отсюда сразу вытекает, что $l = 2$, т. е. существуют два линейно независимых решения однородной задачи (12) с условием (13).

Нетрудно проверить, что одним из решений (12) является

$$\varphi_1^+ = 0, \quad \omega_1 = C_1 itz', \tag{20}$$

где C_1 — произвольная действительная константа.

Заметим, что второе решение $\omega_2(t)$ линейной задачи (12) с условием (13) должно иметь разложение в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\omega_2(t) = bt + \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{-k}, \quad \operatorname{Im} b = 0. \tag{21}$$

Этого можно добиться за счет подбора C_1 из (20), если исходить из записи общего решения однородной задачи. Коэффициент b из (21) чисто мнимым быть не может, т. к. решение $\omega_2(t)$ оказалось бы линейно зависимым с $\omega_1(t)$. Поэтому второе решение задачи (12), (13) имеет вид (21).

Исследование нелинейной задачи. Запишем нелинейное краевое условие (11) в операторном виде:

$$L(\varphi^+, \omega) = \overline{R(\omega, h)}, \quad |t| = 1. \tag{22}$$

Рассмотрим задачу (22) с условиями (13), (14). Приходим к уравнению

$$\omega(t) = A\overline{R(\omega, h)} + \lambda\omega_2(t), \quad \operatorname{Im}\lambda = 0, \tag{23}$$

где $A\overline{R(\omega,h)}$ — частное решение задачи (22), (13), (14). Согласно теории нелинейных уравнений и условиям теоремы найдутся положительные числа ε, δ_* и λ_* такие, что правая часть (23) будет сжимающим отображением и переводит шар $||\omega||^{1,\alpha} \leqslant \delta_*$ в себя. По теореме Банаха существует решение уравнения (23) $\omega(t) = \omega_\lambda(t)$ при $|\lambda| < \lambda_*$.

Таким образом, найдено однопараметрическое семейство областей

$$D_{\overline{\omega}_\lambda} = \{z : z = z(t) + \omega_\lambda(t),\ |t| > 1\} \subset D^+_{\omega_\lambda}$$

таких, что $U^+(z, \overline{z}, D^+_\omega, \nu, \mu) = M(z, \overline{z}) + h(z),\ z \in D^+_{\omega_\lambda}$. Пункт а) теоремы доказан.

Случай б. Отыскание области из $\tilde{D}_\omega$. Найдем пару аналитических функций $\varphi^+ \in A(|t| < 1)$ и $\omega(t) \in A(|t| > 1) \cap C^1(|t| \geqslant 1)$ по краевому условию (12), причем

$$\omega(\infty) = \text{const}\,. \tag{24}$$

Рассмотрим линейную однородную задачу (12) с условием (24). После замены $\varphi^- = \omega \cdot t^{-1}$, $\tilde{\varphi}^+ = \varphi^+ \cdot t^{-1}$ краевое условие (12) примет вид

$$\tilde{\varphi}^+ - \left(\mu + \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\varphi^- - \frac{z'}{\overline{z}'}\left(\mu + 2\nu k - \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\overline{\varphi^-} - \\ - \frac{\nu t}{|z'|} \cdot \frac{d\varphi^-}{dt} + \frac{\nu z'}{t\overline{z}'|z'|} \cdot \frac{d\overline{\varphi^-}}{dt}, \quad \varphi^-(\infty) = 0.$$

Заметим, что задача фредгольмова. Выпишем союзную задачу

$$\Omega^- = -\left(\mu + \frac{\nu}{|z'|} + 2\nu_z \cdot \frac{tz'}{|z'|}\right)\Omega^+ + \frac{\overline{z}'}{t^2 z'}\left(\mu + 2\nu k - frac\nu|z'| + 2\nu_{\overline{z}} \cdot \frac{\overline{tz'}}{|z'|}\right)\overline{\Omega}^+ + \\ + \frac{d}{dt}\left\{\frac{\nu t}{|z'|}\Omega^+ + \frac{\nu\overline{z}'}{tz'|z'|}\overline{\Omega}^+\right\}, \quad \Omega^-(\infty) = 0.$$

Используя обозначение $\Psi = t\Omega^+ \cdot (\overline{z}')^{-1}$, $\Psi(0) = 0$, получим

$$\frac{tz'}{|z'|}\Omega^- = \nu(t\Psi'_t - \overline{t\Psi'_t}) - a|z'|(\Psi - \overline{\Psi}), \quad \Omega^-(\infty) = 0, \quad \Psi(0) = 0.$$

По условию (7) заключаем, что

$$\Omega^- = 0,\ \Psi = 0.$$

Значит, союзная задача имеет только тривиальное решение. Отсюда следует, что задача (12) с условием (24) имеет только тривиальное решение.

Нелинейная краевая задача (22) с условием (24) эквивалентна уравнению

$$\omega = B\tilde{R}(\omega, h),$$

где B — линейный ограниченный оператор. Т. к. существует условие теоремы и к уравнению применим принцип сжатых отображений (область ищется в классе близких областей).

На этом доказательство теоремы 2 завершено. □

Список литературы

[1] А. И. Прилепко, “Обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов”, *Дифференц. уравнения*, **6**:1, (1970), 27–38.

[2] В. Г. Чередниченко, “О разрешимости внутренней обратной задачи логарифмического потенциала”, *Дифференц. уравнения*, **10**:1, (1974), 153–158.

[3] W. Lowrie, *Fundamentals of geophysics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[4] В. К. Иванов, *Избранные научные труды. Математика*, Физматлит, М., 2008.

[5] П. Б. Суляндзига, “О плоской обратной задаче магнитного потенциала”, *Дифференц. уравнения*, **13**:3, (1977), 529–537.

[6] Н. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1970.

Поступила в редакцию
14 ноября 2018 г.

Sulyandziga P. B., Ivanov A. N., Sulyandziga E. P. Internal inverse problem of complex magnetic potential. *Far Eastern Mathematical Journal.* 2019. V. 19. No 1. P. 75–83.

ABSTRACT

The article is dedicated to definition of an area by its internal complex magnetic potential. The problem to find an area which is close to given is reduced to solution of conjugation problem which linear part has first-order derivative. Proven solvability of the problem “in the small”.

Key words: *inverse problem, magnetic potential.*